Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας
Λύσεις 2ης σειράς ασκήσεων

Άσκηση 1

Ο Αντρέας, η Βάσω και ο Γιώργος θα ετοιμάσουν μεγάλη ποσότητα φαγητού για μια συλλογική κουζίνα. Για το φαγητό θα χρειαστούν 5 κιλά φασόλια, 10 κιλά χόρτα και 3 κιλά ψάρι τα οποία και θα προμηθευτούν από μαγαζιά της γειτονιάς τους και θα μεταφέρουν στο χώρο παρασκευής του φαγητού. Καθένας τους μπορεί να μεταφέρει μέχρι 6 κιλά συνολικά. Τα κόστη (σε ευρώ) ανά κιλό για κάθε ζεύγος προϊόν-γειτονιά δίνονται από τον πίνακα

	Φασόλια	Χόρτα	Ψάρι
Γειτονιά Αντρέα	3	2	7
Γειτονιά Βάσως	2	4	4
Γειτονιά Γιώργου	1	1	5

Δεδομένου οτι πρέπει να φτιάξουν το φαγητό, αν ελαχιστοποιούν το κόστος τι πρέπει να αγοράσει ο καθένας τους και σε τι ποσότητα; Πόσο είναι τότε το ελάχιστο κόστος; Τι αλλάζει αν δεν πρέπει κανείς να ξοδέψει παραπάνω από 10 ευρώ;

Λύση: Με κανόνα βορειοδυτικής γωνίας παίρνουμε την λύση

	Φ	Χ	Ψ
Α	5	1	
Β		6	
Γ		3	3

Ψάχνουμε να δούμε αν υπάρχει πιθανό συμφέρον βάζοντας κάποια άλλη ακμή στη βάση. Αρχικά υπολογίζουμε τις δυικές μεταβλητές.

$$\begin{aligned}
\mu_1 - \lambda_1 &= 3 \\
\mu_2 - \lambda_1 &= 2 \\
\mu_2 - \lambda_2 &= 4 \\
\mu_2 - \lambda_3 &= 1 \\
\mu_3 - \lambda_3 &= 5
\end{aligned}$$

Θέτοντας $\lambda_1 = 0$ το σύστημα έχει λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, -2, 1, 3, 2, 6)$. Με αυτά υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
v_{13} &= 7 + \lambda_1 - \mu_3 = 1 \geq 0 \\
v_{21} &= 2 + \lambda_2 - \mu_1 = -3 < 0 \\
v_{23} &= 4 + \lambda_2 - \mu_3 = -4 < 0 \\
v_{31} &= 1 + \lambda_3 - \mu_1 = -1 < 0
\end{aligned}$$

Από τα αρνητικά, επιλέγουμε (τυχαία) την ακμή $\{3,1\}$ και την βάζουμε στη λύση:

	Φ	Χ	Ψ
Α	$5-\epsilon$	$1+\epsilon$	
Β		6	
Γ	ϵ	$3-\epsilon$	3

και με $\epsilon = 3$, έχουμε νέα βασική εφικτή λύση την

	Φ	Χ	Ψ
Α	2	4	
Β		6	
Γ	3		3

Ψάχνουμε πάλι να δούμε αν υπάρχει πιθανό συμφέρον βάζοντας κάποια άλλη ακμή στη βάση. Αρχικά υπολογίζουμε τις δυικές μεταβλητές.

$$\begin{aligned}
\mu_1 - \lambda_1 &= 3 \\
\mu_2 - \lambda_1 &= 2 \\
\mu_2 - \lambda_2 &= 4 \\
\mu_1 - \lambda_3 &= 1 \\
\mu_3 - \lambda_3 &= 5
\end{aligned}$$

Θέτοντας $\lambda_1 = 0$ το σύστημα έχει λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, -2, 2, 3, 2, 7)$. Με αυτά υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
v_{13} &= 7 + \lambda_1 - \mu_3 = 0 \geq 0 \\
v_{21} &= 2 + \lambda_2 - \mu_1 = -3 < 0 \\
v_{23} &= 4 + \lambda_2 - \mu_3 = -5 < 0 \\
v_{32} &= 1 + \lambda_3 - \mu_2 = 1 \geq 0
\end{aligned}$$

Από τα αρνητικά, επιλέγουμε (τυχαία) την ακμή $\{2,1\}$ και την βάζουμε στη λύση:

	Φ	Χ	Ψ
Α	$2-\epsilon$	$4+\epsilon$	
Β	ϵ	$6-\epsilon$	
Γ	3		3

και με $\epsilon = 2$, έχουμε νέα βασική εφικτή λύση την

	Φ	Χ	Ψ
Α		6	
Β	2	4	
Γ	3		3

Ψάχνουμε πάλι να δούμε αν υπάρχει πιθανό συμφέρον βάζοντας κάποια άλλη ακμή στη βάση. Αρχικά υπολογίζουμε τις δυικές μεταβλητές.

$$\begin{aligned}
\mu_2 - \lambda_1 &= 2 \\
\mu_1 - \lambda_2 &= 2 \\
\mu_2 - \lambda_2 &= 4 \\
\mu_1 - \lambda_3 &= 1 \\
\mu_3 - \lambda_3 &= 5
\end{aligned}$$

Θέτοντας $\lambda_2 = 0$ το σύστημα έχει λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 0, 1, 2, 4, 6)$. Με αυτά υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
v_{11} &= 3 + \lambda_1 - \mu_1 = 3 \geq 0 \\
v_{13} &= 7 + \lambda_1 - \mu_3 = 3 \geq 0 \\
v_{23} &= 4 + \lambda_2 - \mu_3 = -2 < 0 \\
v_{32} &= 1 + \lambda_3 - \mu_2 = -2 < 0
\end{aligned}$$

Από τα αρνητικά, επιλέγουμε (τυχαία) την ακμή $\{2,3\}$ και την βάζουμε στη λύση:

	Φ	Χ	Ψ
Α		6	
Β	$2-\epsilon$	4	ϵ
Γ	$3+\epsilon$		$3-\epsilon$

και με $\epsilon = 2$, έχουμε νέα βασική εφικτή λύση την

	Φ	Χ	Ψ
Α		6	
Β		4	2
Γ	5		1

Ψάχνουμε πάλι να δούμε αν υπάρχει πιθανό συμφέρον βάζοντας κάποια άλλη ακμή στη βάση. Αρχικά υπολογίζουμε τις δυικές μεταβλητές.

$$\begin{aligned}
\mu_2 - \lambda_1 &= 2 \\
\mu_2 - \lambda_2 &= 4 \\
\mu_3 - \lambda_2 &= 4 \\
\mu_1 - \lambda_3 &= 1 \\
\mu_3 - \lambda_3 &= 5
\end{aligned}$$

Θέτοντας $\lambda_2 = 0$ το σύστημα έχει λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 0, -1, 0, 4, 4)$. Με αυτά υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
v_{11} &= 3 + \lambda_1 - \mu_1 = 5 \geq 0 \\
v_{13} &= 7 + \lambda_1 - \mu_3 = 5 \geq 0 \\
v_{21} &= 2 + \lambda_2 - \mu_1 = 2 \geq 0 \\
v_{32} &= 1 + \lambda_3 - \mu_2 = -4 < 0
\end{aligned}$$

επιλέγουμε την ακμή $\{3,2\}$ και την βάζουμε στη λύση:

	Φ	Χ	Ψ
Α		6	
Β		$4-\epsilon$	$2+\epsilon$
Γ	5	ϵ	$1-\epsilon$

και με $\epsilon = 1$, έχουμε νέα βασική εφικτή λύση την

	Φ	Χ	Ψ
Α		6	
Β		3	3
Γ	5	1	

Ψάχνουμε πάλι να δούμε αν υπάρχει πιθανό συμφέρον βάζοντας κάποια άλλη ακμή στη βάση. Αρχικά υπολογίζουμε τις δυικές μεταβλητές.

$$\begin{aligned}
\mu_2 - \lambda_1 &= 2 \\
\mu_2 - \lambda_2 &= 4 \\
\mu_3 - \lambda_2 &= 4 \\
\mu_1 - \lambda_3 &= 1 \\
\mu_2 - \lambda_3 &= 1
\end{aligned}$$

Θέτοντας $\lambda_2 = 0$ το σύστημα έχει λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 0, 3, 4, 4, 4)$. Με αυτά υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
v_{11} &= 3 + \lambda_1 - \mu_1 = 1 \geq 0 \\
v_{13} &= 7 + \lambda_1 - \mu_3 = 5 \geq 0 \\
v_{21} &= 2 + \lambda_2 - \mu_1 = -2 < 0 \\
v_{33} &= 5 + \lambda_3 - \mu_3 = 4 \geq 0
\end{aligned}$$

επιλέγουμε την ακμή $\{2,1\}$ και την βάζουμε στη λύση:

	Φ	Χ	Ψ
Α		6	
Β	ϵ	$3-\epsilon$	3
Γ	$5-\epsilon$	$1+\epsilon$	

και με $\epsilon = 3$, έχουμε νέα βασική εφικτή λύση την

	Φ	Χ	Ψ
Α		6	
Β	3		3
Γ	2	4	

Ψάχνουμε πάλι να δούμε αν υπάρχει πιθανό συμφέρον βάζοντας κάποια άλλη ακμή στη βάση. Αρχικά υπολογίζουμε τις δυικές μεταβλητές.

$$\begin{aligned}\mu_2 - \lambda_1 &= 2\\ \mu_1 - \lambda_2 &= 2\\ \mu_3 - \lambda_2 &= 4\\ \mu_1 - \lambda_3 &= 1\\ \mu_2 - \lambda_3 &= 1\end{aligned}$$

Θέτοντας $\lambda_2 = 0$ το σύστημα έχει λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 0, 1, 2, 2, 4)$. Με αυτά υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}v_{11} &= 3 + \lambda_1 - \mu_1 = 1 \geq 0\\ v_{13} &= 7 + \lambda_1 - \mu_3 = 3 \geq 0\\ v_{22} &= 4 + \lambda_2 - \mu_2 = 2 \geq 0\\ v_{33} &= 5 + \lambda_3 - \mu_3 = 2 \geq 0\end{aligned}$$

από όπου συμπεραίνω ότι η λύση είναι βέλτιστη καθώς όλες η μεταβλτές χαλαρότητας είναι θετικές.

Συνεπώς σε μια βέλτιστη λύση ο Αντρέας αγοράζει 6 κιλά χόρτα, η Βάσω 3 κιλά φασόλια και 3 κιλά ψάρι και ο Γιώργος 2 κιλά φασόλια και 4 κιλά χόρτα, με συνολικά κόστος $6 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 36$. Αν καθένας τους διαθέτει 10 ευρώ τότε δεν μπορούν να συγκεντρώσουν τα υλικά αφού αυτό απαιτεί στην καλύτερη των περιπτώσεων 36 (>30) ευρώ συνολικά.

Άσκηση 2

Κάθε πρωί δύο πρακτορεία εφημερίδων (E_1 και E_2) προμηθεύουν τρία περίπτερα (Π_1, Π_2,Π_3) με την εφημερίδα 'Τα νέα του ΟΠΑ'. Το E_1 διαθέτει 170 φύλλα της εφημερίδας, ενώ το E_2 180 φύλλα. Η ζήτηση στα Π_1, Π_2,Π_3 είναι 50, 180 και 100 φύλλα αντίστοιχα. Το κόστος μεταφοράς ανά φύλλο δίνεται από τον πίνακα (σε χιλιοστά του ευρώ)

	Π_1	Π_2	Π_3
E_1	3	5	2
E_2	2	4	1

Ο υπεύθυνος του πρακτορείου E_2 τον τελευταίο καιρό είναι τσακωμένος με τον ιδιοκτήτη του Π_3. Με τον περιορισμό να μην πάνε εφημερίδες από το E_2 στο Π_3, υπολογίστε τον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς των φύλλων της εφημερίδας από τα πρακτορεία στα περίπτερα έτσι ώστε να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί που αφορούν τη διάθεση και τη ζήτηση. Ποιό είναι το ελάχιστο κόστος;

Λύση: Αρχικά, για να εξισώσω την προσφορά με τη ζήτηση προσθέτω περίπτερο Π_4 με ζήτηση 20 φύλλων και μηδενικά κόστη. Επιπλέον, για να σεβαστώ την διαμάχη E_2-Π_3 θα βάλω κόστος μεταφοράς από E_2 σε Π_3 ίσο με 2 φορές το μέγιστο κόστος που εμφανίζεται. Αυτό αρκεί καθώς οποιοσδήποτε κύκλος έχει μήκος 4 και θα εχει το πολύ μια μηδενικού κόστους ακμή (!). Έτσι θα δουλέψω με τον πίνακα

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
E_1	3	5	2	0
E_2	2	4	10	0

Για να μη πάω και αυτήν τη φορά στα τυφλά και κάνω πολλές επαναλήψεις, θα επιλέξω αρχική βάση λίγο πιο έξυπνα από ότι με τον κανόνα της βορειοδυτικής γωνίας. Κοιτώντας τον πίνακα κόστους, επιλέγω αρχική βάση την

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
E_1		50	100	20
E_2	50	130		

Ψάχνουμε να δούμε αν υπάρχει πιθανό συμφέρον βάζοντας κάποια άλλη ακμή στη βάση. Αρχικά υπολογίζουμε τις δυικές μεταβλητές.

$$\begin{aligned} \mu_2 - \lambda_1 &= 5 \\ \mu_3 - \lambda_1 &= 2 \\ \mu_4 - \lambda_1 &= 0 \\ \mu_1 - \lambda_2 &= 2 \\ \mu_2 - \lambda_2 &= 4 \end{aligned}$$

Θέτοντας $\lambda_1 = 0$ το σύστημα έχει λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (0, 1, 3, 5, 2, 0)$. Με αυτά υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} v_{11} &= 3 + \lambda_1 - \mu_1 = 0 \geq 0 \\ v_{23} &= 10 + \lambda_2 - \mu_3 = 9 \geq 0 \\ v_{24} &= 0 + \lambda_2 - \mu_4 = 0 \geq 0 \end{aligned}$$

από όπου συμπεραίνω ότι η λύση είναι βέλτιστη καθώς όλες η μεταβλτές χαλαρότητας είναι θετικές. Άρα το E_1 στέλνει 50 φύλλα στο Π_2 και 100 φύλλα στο Π_3 και το E_2 στέλνει 50 φυλλα στο Π_1 και 130 φύλλα στο Π_2, με συνολικό κόστος $5 \cdot 50 + 100 \cdot 2 + 50 \cdot 2 + 130 \cdot 4 = 1070$ χιλιοστά του ευρώ.

Άσκηση 3

Πέντε νοσοκομεία, τα Α, Β, Γ, Δ και Ε, θα γίνουν 'νοσοκομεία *covid*' και για αυτό θα πρέπει να στείλουν τους ασθενείς τους σε πέντε άλλα νοσοκομεία τα V, W, X, Y και Z. Κάθε νοσοκομείο *covid* θα στείλει σε ακριβώς ένα νοσοκομείο υποδοχής χρησιμοποιώντας τα οχήματά του. Τα συνολικά καύσιμα που χρειάζονται για τη μεταφορά των ασθενών από το κάθε νοσοκομείο *covid* στο κάθε νοσοκομείο υποδοχής δίνονται από τον πίνακα (σε 10άδες λίτρων):

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
V	8	3	7	6	8
W	9	2	9	5	5
X	7	5	4	8	6
Y	5	7	2	3	5
Z	6	4	6	5	7

Με στόχο να ελαχιστοποιήσετε τα συνολικά καύσιμα που θα καταναλωθούν, βρείτε τη βέλτιστη ανάθεση νοσοκομείων *covid* σε νοσοκομεία υποδοχής

Λύση: Πρώτα αφαιρώ από όλες τις γραμμές στο μικρότερο στοιχείο τους και πανω τον

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
V	5	0	4	3	5
W	7	0	7	3	3
X	3	1	0	4	2
Y	3	5	0	1	3
Z	2	0	2	1	3

και ακολούθως από όλες τις στήλες το μικρότερο στοιχείο τους

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
V	3	0	4	2	3
W	5	0	7	2	1
X	1	1	0	3	0
Y	1	5	0	0	1
Z	0	0	2	0	1

Υπάρχουν 4 ανεξάρτητα μηδενικά (π.χ. τα κόκκινα) και μπορώ να καλύψω (βέλτιστα) όλα τα μηδενικά με 4 γραμμές:

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
V	3	0	4	2	3
W	5	0	7	2	1
X	1	1	0	3	0
Y	1	5	0	0	1
Z	0	0	2	0	1

Αφαιρούμε το 1 από τα ακάλυπτα στοιχεία και το προσθέτουμε σε όσα καλύπτονται από δύο ευθείες και παίρνουμε τον

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
V	2	0	3	1	2
W	4	0	6	1	0
X	1	2	0	3	0
Y	1	6	0	0	1
Z	0	1	2	0	1

όπου πλέον έχομε 5 ανεξάρτητα μηδενικά (σημειωμένα με κόκκινο). Άρα μια βέλτιστη αντιστοίχιση των νοσοκομείων είναι η

$$V \leftarrow B,\ W \leftarrow E,\ X \leftarrow \Gamma,\ Y \leftarrow \Delta,\ Z \leftarrow A$$

με συνολικά $3 + 5 + 4 + 3 + 6 = 21$ απαιτούμενες δεκάδες λίτρων καύσιμα

Άσκηση 4

Τα 2 ξαδερφάκια σας θέλουν να βοηθήσουν να καθαρίσετε το σπίτι. Δεν θέλετε να τα κουράσετε, θέλετε απλά να αναθέσετε 2 δουλειές στο καθένα. Ο πίνακας δίνει τους αντίστοιχους χρόνους για τα ζεύγη (ξαδερφάκι,εργασία).

	Πλύσιμο πιάτων	Σκούπισμα σαλονιού	Πέταγμα σκουπιδιών	Ξεσκόνισμα βιβλιοθήκης
Ανέστης	3 λεπτά	2 λεπτά	5 λεπτά	4 λεπτά
Γιώτα	2 λεπτά	4 λεπτά	3 λεπτά	2 λεπτά

Τι θα αναθέσετε και σε ποιό ξαδερφάκι αν θέλετε να ελαχιστοποιήσετε το συνολικό χρόνο που θα 'εργαστούν' (αθροιστικά) για να κάνουν τις δουλειές;

Λύση: Θα δημιουργήσουμε δύο κλώνους, έναν για κάθε ξαδερφάκι, και θα έχουμε ένα 4×4 πρόβλημα ανάθεσης με πίνακα

	ΠΠ	ΣΣ	ΠΣ	ΞΒ
A1	3	2	5	4
A2	3	2	5	4
Γ1	2	4	3	2
Γ2	2	4	3	2

Αφαιρώντας από κάθε γραμμή το μικρότερο στοιχείο της παίρνουμε

	ΠΠ	ΣΣ	ΠΣ	ΞΒ
A1	1	0	3	2
A2	1	0	3	2
Γ1	0	2	1	0
Γ2	0	2	1	0

Αφαιρώντας από κάθε στήλη το μικρότερο στοιχείο της παίρνουμε

	ΠΠ	ΣΣ	ΠΣ	ΞΒ
A1	1	0	2	2
A2	1	0	2	2
Γ1	0	2	0	0
Γ2	0	2	0	0

Ο πίνακας αυτός έχει 3 ανεξάρτητα μηδενικά (με κόκκινο) και μπορούμε να καλύψουμε όλα τα μηδενικά με 3 ευθείες

	ΠΠ	ΣΣ	ΠΣ	ΞΒ
A1	1	0	2	2
A2	1	0	2	2
Γ1	0	2	0	0
Γ2	0	2	0	0

Αφαιρούμε το 1 από τα ακάλυπτα στοιχεία και το προσθέτουμε σε όσα καλύπτονται από δύο ευθείες και παίρνουμε τον

	ΠΠ	ΣΣ	ΠΣ	ΞΒ
A1	0	0	1	1
A2	0	0	1	1
Γ1	0	3	0	0
Γ2	0	3	0	0

ο οποίος έχει 4 ανεξάρτητα μηδενικά στη διαγώνιο. Αυτό υποδυκνύει πως μπορούμε να πάρουμε βέλτιστη λύση αναθέτοντας στον Ανέστη το πλύσιμο των πιάτων κα το σκούπισμα του σαλονιού και στην Γιώτα το πέταγμα των σκουπιδιών και το ξεσκόνισμα της βιβλιοθήκης.

Άσκηση 5

Για ένα πρόβλημα ανάθεσης n ατόμων σε n εργασίες με μη αρνητικά κόστη, κατασκευάστε-περιγράψτε έναν πίνακα κόστους στον οποίο η ελαχίστου κόστους ανάθεση έχει κόστος 0, χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερα μηδενικά. Γιατί δεν γίνεται με λιγότερα μηδενικά;

Λύση: Ένας τέτοιος $n \times n$ πίνακας μπορεί να είναι ο πίνακας που έχει στις n θέσεις της διαγωνίου 0 και σε όλες τις άλλες θέσεις έχει οτιδήποτε θετικό, π.χ. παντού εκτός διαγωνίου έχει 1. Το i-στό άτομο θα αναλάβει την i-στή εργασία και το συνολικό κόστος αυτής της ανάθεσης είναι 0. Για να έχουμε κόστος ανάθεσης 0 θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον n μηδενικά, αλλιώς για κάθε ανάθεση θα υπάρχει ζεύγος άτομο-εργασία με θετικό κόστος ανάληψης της εργασίας από το άτομο (αρχή του περιστερώνα).