Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας
Λύσεις 1ης σειράς ασκήσεων*

Άσκηση 1

Δίνεται το γραμμικό πρόγραμμα

$$
\begin{array}{rcl}
\max \; 2x_1 - x_2 - x_4 & & \\
3x_1 - 2x_3 & \leq & 5 \\
2x_3 - x_2 + 2x_4 & = & 2 \\
x_1 & \geq & -4 \\
x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

1. Γράψτε το παραπάνω πρόγραμμα σε κανονική μορφή.
2. Γράψτε το δυϊκό πρόβλημα.

Λύση: 1. Αλλάζουμε την μεταβλητή x_1 σε $x_1' = x_1 + 4$, σπάμε τον μοναδικό ισοτικό περιορισμό σε δυο ανισοτικούς και σπάμε και την μεταβλητή $x_4 \in \mathbb{R}$ σε δύο μεταβλητές $x_4^+ \geq 0$ και $x_4^- \geq 0$ έτσι ώστε $x_4 = x_4^+ - x_4^-$. Και έτσι παίρνουμε το ισοδύναμο πρόβλημα στην κανονική μορφή:

$$
\begin{array}{rcl}
\max \; 2x_1' - x_2 - x_4^+ + x_4^- - 8 & & \\
3x_1' - 2x_3 & \leq & 17 \\
2x_3 - x_2 + 2x_4^+ - 2x_4^- & \leq & 2 \\
-2x_3 + x_2 - 2x_4^+ + 2x_4^- & \leq & -2 \\
x_1', x_2, x_3, x_4^+, x_4^- & \geq & 0
\end{array}
$$

Σημείωση: Το πρόβλημα αυτό θα έχει διαφορετική βέλτιστη τιμή από το αρχικό και συγκεκριμένα η βέλτιστη τιμή του θα είναι κατά 8 μικρότερη από του αρχικού αφού μεγιστοποιούμε την ποσότητα $2x_1' - x_2 - x_4^+ + x_4^-$ αντί της $2x_1' - x_2 - x_4^+ + x_4^- + 8$.

2. Το δυικό του προβλήματος που δημιουργήσαμε στο πρώτο ερώτημα είναι το:

$$
\begin{array}{rcl}
\min \; 17\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 & & \\
3\lambda_1 & \geq & 2 \\
-\lambda_2 + \lambda_3 & \geq & -1 \\
-2\lambda_2 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 & \geq & 0 \\
+2\lambda_2 - 2\lambda_3 & \geq & -1 \\
-2\lambda_2 + 2\lambda_3 & \geq & 1 \\
x_1', x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

*Βασισμένες σε λύσεις του συμφοιτητή σας Μιχαήλ Βαζαίου.

Άσκηση 2

Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα

$$\max \ \ 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 18 \\ x_1 - 2x_2 &\geq -4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

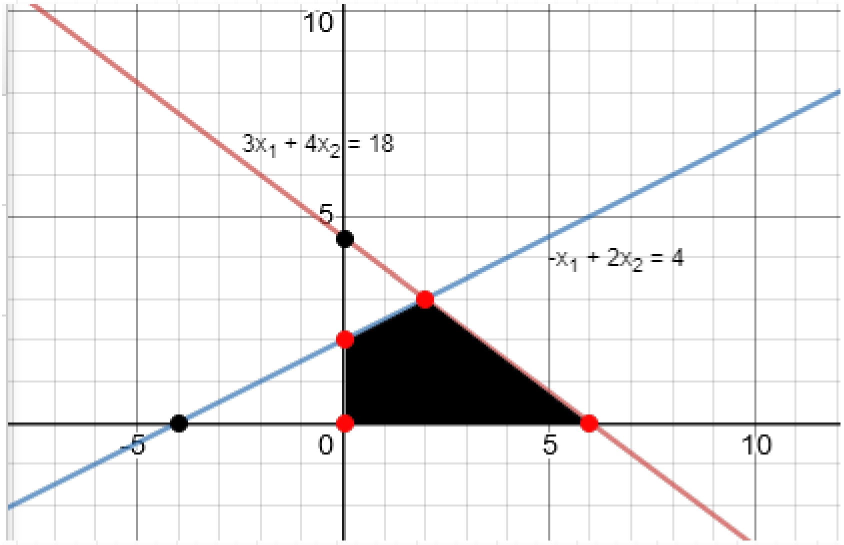
1. Βρείτε τις βασικές λύσεις και απεικονίστε τις (αγνοώντας τις μεταβλητές χαλαρότητας) σε διάγραμμα με άξονες τις αρχικές μεταβλητές x_1, x_2.
2. Στο ίδιο διάγραμμα, απεικονίστε τις βασικές εφικτές λύσεις καθώς και το σύνολο όλων των εφικτών σημείων.
3. Γράψτε το δυϊκό πρόβλημα.
4. Βρείτε τις βασικές λύσεις του δυϊκού και απεικονίστε τις (αγνοώντας τις μεταβλητές χαλαρότητας) σε διάγραμμα με άξονες τις δυϊκές μεταβλητές.
5. Αντιστοιχίστε τις βασικές λύσεις που βρήκατε στα ερωτήματα 1 και 4 σύμφωνα με το ποιές είναι συμπληρωματικές, δηλ. ικανοποιούν τις συμπληρωματικές συνθήκες χαλαρότητας.
6. Βρείτε τη βέλτιστη τιμή και μια βέλτιστη λύση.
7. Εάν ο περιορισμός $x_1 - 2x_2 \geq -4$ γίνει $x_1 - 2x_2 \geq -4 + \epsilon$ για μικρό $\epsilon > 0$, πόσο αλλάζει η βέλτιστη τιμή; (Δεν είναι ανάγκη να λύσετε ξανά το πρόβλημα.)

Λύση: Αρχικά φέρνουμε το πρόβλημα σε τυπική μορφή αλλάζοντας τη φορά της δεύτερης ανισότητας και προσθέτοντας μεταβλητές χαλαρότητας και παίρνουμε το:

$$max \quad 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + z_1 &= 18 \\ -x_1 + 2x_2 + z_2 &= 4 \\ x_1, x_2, z_1, z_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1, 2. Οι βασικές λύσεις (x_1, x_2, z_1, z_2) είναι οι:
$(6, 0, 0, 10)$,
$(0, 2, 10, 0)$,
$(0, 0, 18, 4)$,
$(2, 3, 0, 0)$,
$(0, 9/2, 0, -5)$,
$(-4, 0, 30, 0)$,
από τις οποίες οι τέσσερις πρώτες (με κόκκινο χρώμα) είναι οι βασικές εφικτές λύσεις.
Στο παρακάτω σχήμα βλέπετε τις βασικές εφικτές λύσεις (κόκκινες τελείες), τις βασικές μη εφικτές λύσεις (μαύρες τελείες), και την εφικτή περιοχή (μαύρη περιοχή). Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται η μεταβλητή x_1 και στον κάθετο η x_2.



3. Μετατρέπουμε πρώτα το αρχικό πρόβλημα σε κανονική μορφή:

$$max \quad 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 & \leq & 18 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

και το δυικό του είναι το εξής:

$$min \quad 18\lambda_1 + 4\lambda_2$$

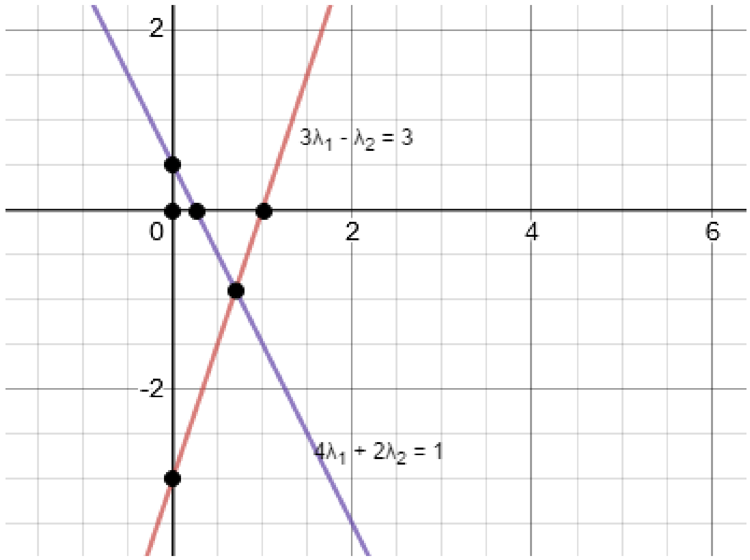
$$\begin{array}{rcl} 3\lambda_1 - \lambda_2 & \geq & 3 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 & \geq & 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

4. Προσθέτουμε μεταβλητές χαλαρότητας στο δυικό και το φέρνουμε έτσι σε τυπική μορφή:

$$min \quad 18\lambda_1 + 4\lambda_2$$

$$\begin{array}{rcl} 3\lambda_1 - \lambda_2 - u_1 & = & 3 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - u_2 & = & 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, u_1, u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Οι βασικές λύσεις $(\lambda_1, \lambda_2, u_1, u_2)$ είναι οι:
$(1, 0, 0, 3)$,
$(7/10, -9/10, 0, 0)$,
$(0, 0, -3, -1)$,
$(0, -3, 0, -7)$,
$(0, 1/2, -7/2, 0)$,
$(1/4, 0, -9/4, 0)$,
Από αυτές εφικτή είναι μόνο η πρώτη (κόκκινο χρώμα). Στο παρακάτω σχήμα μπορείτε να δείτε τις βασικές λύσεις να αναπαραστούνται με μαύρες τελείες. Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται η μεταβλητή λ_1 και στον κάθετο η λ_2.



5. Η αντιστοίχιση που ζητείται είναι η εξής (πρώτα αναγράφεται η λύση του πρωτεύοντος και μετά του δυικού σε κάθε ζευγάρι):
Η $(6,0,0,10)$ αντιστοιχίζεται με την $(1,0,0,3)$
Η $(0,2,10,0)$ αντιστοιχίζεται με την $(0,1/2,-7/2,0)$
Η $(0,0,18,4)$ αντιστοιχίζεται με την $(0,0,-3,-1)$
Η $(2,3,0,0)$ αντιστοιχίζεται με την $(7/10,-9/10,0,0)$
Η $(0,9/2,0,-5)$ αντιστοιχίζεται με την $(1/4,0,-9/4,0)$
Η $(-4,0,30,0)$ αντιστοιχίζεται με την $(0,-3,0,-7)$

6. Το μοναδικό ζευγάρι εφικτών βασικών λύσεων από το παραπάνω υποερώτημα είναι το πρώτο. Και αφού σε αυτό ικανοποιούνται οι συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας έχουμε ότι η βέλτιστη λύση στο πρωτεύον είναι η $(x_1, x_2, z_1, z_2) = (6,0,0,4)$ δηλαδή η $(x_1, x_2) = (6,0)$ και η βέλτιστη λύση στο δυικό είναι η $(\lambda_1, \lambda_2, u_1, u_2) = (1,0,0,3)$ δηλαδή η $(\lambda_1, \lambda_2) = (1,0)$. Η βέλτιστη τιμή (προφανώς ίση για πρωτεύον και δυικό) είναι 18.

7. Στην βέλτιστη λύση ο περιορισμός $x_1 - 2x_2 \geq -4$ δεν ικανοποιείται ως ισότητα δηλαδή ισχύει $x_1^* - 2x_2^* > -4$ και άρα μια οριακή μεταβολή του δεξιού μέρους του περιορισμού δεν επηρεάζει την βέλτιστη τιμή η οποία παραμένει 18.

Άσκηση 3

Βρείτε τη βέλτιστη λύση και τιμή του γραμμικού προγράμματος που ακολουθεί χρησιμοποιώντας *Simplex* στο δυϊκό του:

$$\begin{array}{rcl} \min\ 18x_1 + 42x_2 + 24x_3 & & \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \geq & 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & \geq & 2 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Πόσο θα άλλαζε η βέλτιστη τιμή εάν προσθέταμε περιορισμό $3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \geq 3$;
Πόσο θα άλλαζε η βέλτιστη τιμή εάν αλλάζαμε τον 1ο περιορισμό σε $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 3.5$;

Λύση: Το δυικό του προβλήματος της εκφώνησης είναι το:

$$max \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 &\leq 18 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &\leq 42 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &\leq 24 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Σε αυτό προσθέτουμε μεταβλητές χαλαρότητας και παίρνουμε το:

$$max \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 + z_1 &= 18 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + z_2 &= 42 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + z_3 &= 24 \\ \lambda_1, \lambda_2, z_1, z_2, z_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Τρέχω $Simplex$ και έχω αρχικό ταμπλό:

λ_1	λ_2	z_1	z_2	z_3	ct
3	2	0	0	0	0
2	1	1	0	0	18
2	3	0	1	0	42
3	1	0	0	1	24

Δεύτερο ταμπλό:

λ_1	λ_2	z_1	z_2	z_3	ct
0	1	0	0	-1	-24
0	1/3	1	0	-2/3	2
0	7/3	0	1	-2/3	26
1	1/3	0	0	1/3	8

Τρίτο ταμπλό:

λ_1	λ_2	z_1	z_2	z_3	ct
0	0	-3	0	1	-30
0	1	3	0	-2	6
0	0	-7	1	4	12
1	0	-1	0	1	6

Τέταρτο ταμπλό:

λ_1	λ_2	z_1	z_2	z_3	ct
0	0	-5/4	-1/4	0	-33
0	1	-2/4	2/4	0	12
0	0	-7/4	1/4	1	3
1	0	3/4	-1/4	0	3

και από το τελευταίο ταμπλό παίρνω την βέλτιστη λύση για το δυικό $(\lambda_1, \lambda_2) = (3, 12)$, την βέλτιστη λύση για το πρωτεύον $(x_1, x_2, x_3) = (5/4, 1/4, 0)$ και την (κοινή για πρωτεύον και δυικό) βέλτιστη τιμή 33.

• Παρατηρούμε ότι η βέλτιστη λύση ικανοποιεί και τον περιορισμό $3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \geq 3$. Άρα η προσθήκη του συγκεκριμένου περιορισμού ναι μεν μειώνει τον χώρο των εφικτών λύσεων, αλλά αφήνει την βέλτιστη λύση στο μικρότερο αυτό χώρο. Συνεπώς δεν αλλάζει η βέλτιστη λύση ούτε η βέλτιστη τιμή.
(Αν μια λύση $x \in A \cup B$ είναι βέλτιστη στο σύνολο $A \cup B$, τότε αν $x \in A$, x βέλτιστη και στο A.)

• Το δυικό πλέον είναι το:

$$max \quad (3 + 0.5)\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 &\leq 18 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &\leq 42 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 &\leq 24 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Υποθέτοντας οτι η μεταβολή είναι μικρή, περιμένουμε η βέλτιστη λύση $(\lambda_1, \lambda_2) = (3, 12)$ να παραμένει βέλτιστη κι η βέλτιστη τιμή να αλλάζει κατά $0.5 * \lambda_1 = 1.5$

Ελέγχω αν η $(\lambda_1, \lambda_2) = (3, 12)$ παραμένει βέλτιστη κοιτώντας αν η συμπληρωματική της λύση είναι εφικτή. Για αυτήν, ο τρίτος περιορισμός του δυικού ικανοποιείται με αυστηρή ανισότητα, οπότε στο πρωτεύον, η συμπληρωματική λύση έχει $x_3 = 0$ Αφού $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ στο πρωτεύον και οι δύο περιορισμοί ικανοποιούνται με ισότητα:

$$2x_1 + 2x_2 = 3.5$$

$$x_1 + 3x_2 = 2$$

με λύση $(x_1, x_2) = (13/8, 1/8)$. Άρα η συμπληρωματική λύση $(x_1, x_2, x_3) = (13/8, 1/8, 0)$ είναι εφικτή και άρα και οι δύο βέλτιστες.

Σημείωση: Εναλλακτικά μπορούμε να τρέξουμε *Simplex* στο δυικό ξεκινώντας με βάση την βέλτιστη λύση που έχουμε βρει από πριν. Αν το κάνουμε αυτό θα δούμε ότι ο *Simplex* τερματίζει κατευθείαν και άρα η λύση του δυικού που είχαμε βρει παραμένει όντως βέλτιστη.

Άσκηση 4

Φτιάχνετε χαρταετούς τριών ειδών, τριγωνικούς, εξαγωνικούς και τύπου παρά πέντε, τους οποίους πουλάτε 2, 5 και 7 ευρώ τον καθένα, αντίστοιχα. Για κάθε χαρταετό χρειάζεστε πανί, πλαστικά κοντάρια για τη στήριξη και σπάγγους. Τι ακριβώς χρειάζεστε για κάθε χαρταετό φαίνεται στο πίνακα.

	Πανί	Πλαστικά	Σπάγγος
Τριγωνικός	4 τ.μ.	3 μ.	2 μ.
Εξαγωνικός	5 τ.μ.	4 μ.	1 μ.
Τύπου παρά πέντε	7 τ.μ.	0 μ.	4 μ.

Η διαθεσιμότητα σε πανί είναι 80 τ.μ., σε πλαστικά κοντάρια 40 μ. και σε σπάγγο 26 μ.

1. Γράψτε ένα γραμμικό πρόγραμμα που μεγιστοποιεί τα έσοδά σας και δώστε και το δυϊκό του. (Οι χαρταετοί που φτιάχνονται σίγουρα πωλούνται και η βέλτιστη λύση του γ.π. είναι ακέραια.)
2. Με χρήση των συνθηκών συμπληρωματικής χαλαρότητας, δείξτε οτι σε μια βέλτιστη λύση καταναλώνετε όλα τα πλαστικά και τον σπάγγο και δεν φτιάχνετε καθόλου τριγωνικούς χαρταετούς.
3. Κατά πόσο θα άλλαζε η βέλτιστη λύση αν κάποιος σας χάριζε 10 τ.μ. πανί ή, εναλλακτικά, 2 μέτρα σπάγγο;

Λύση: 1. Έστω:
x_1 = η ποσότητα τριγωνικών χαρταετών που παράγω
x_2 = η ποσότητα εξαγωνικών χαρταετών που παράγω
x_3 = η ποσότητα χαρταετών τύπου παρά πέντε που παράγω

Το γραμμικό πρόγραμμα που ζητείται είναι το:

$$max \quad 2x_1 + 5x_2 + 7x_3$$

$$\begin{aligned} 4x_1+5x_2+7x_3 &\leq 80 \\ 3x_1+4x_2 &\leq 40 \\ 2x_1+x_2+4x_3 &\leq 26 \\ x_1,x_2,x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Σημείωση: Κανονικά θα έπρεπε να βάλουμε περιορισμό ότι τα x_1, x_2, x_3 είναι ακέραια (οπότε θα μιλάγαμε για ακέραιο προγραμματισμό), αλλά εδώ η εκφώνηση μας καθησυχάζει ότι η βέλτιστη λύση είναι ακέραια.

Το δυικό του προβλήματος είναι το:

$$min \quad 80\lambda_1+40\lambda_2+26\lambda_3$$

$$\begin{aligned} 4\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3 &\geq 2 \\ 5\lambda_1+4\lambda_2+\lambda_3 &\geq 5 \\ 7\lambda_1+4\lambda_3 &\geq 7 \\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Εισάγουμε μεταβλητές χαλαρότητας σε πρωτεύον και δυικό και εχουμε:
Πρωτεύον:

$$max \quad 2x_1+5x_2+7x_3$$

$$\begin{aligned} 4x_1+5x_2+7x_3+z_1 &= 80 \\ 3x_1+4x_2+z_2 &= 40 \\ 2x_1+x_2+4x_3+z_3 &= 26 \\ x_1,x_2,x_3,z_1,z_2,z_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Δυικό:

$$min \quad 80\lambda_1+40\lambda_2+26\lambda_3$$

$$\begin{aligned} 4\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3-u_1 &= 2 \\ 5\lambda_1+4\lambda_2+\lambda_3-u_2 &= 5 \\ 7\lambda_1+4\lambda_3-u_3 &= 7 \\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,u_1,u_2,u_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Κατανάλωση όλων των πλαστικών και του σπάγγου σημαίνει ότι $z_2 = 0, z_3 = 0$ (αφού οι μεταβλητές z_1, z_2 και z_3 δείχνουν πόσα τ.μ. πανί, πόσα μ. πλαστικών και πόσα μ. σπάγγου περισσεύουν αντίστοιχα). Επιπλέον, μη παραγωγή τριγωνικών χαρταετών σημαίνει $x_1 = 0$ και με βάση αυτά παίρνουμε το σύστημα:

$$5x_2+7x_3+z_1=80$$
$$4x_2=40$$
$$x_2+4x_3=26$$

το οποίο έχει λύση $x_2 = 10, x_3 = 4, z_1 = 2$ και δίνει την τιμή 78 στην αντικειμενική συνάρτηση.

Με βάση τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας έχουμε:

$$4x_1+5x_2+7x_3<80 \Rightarrow \lambda_1=0$$
$$x_2>0 \Rightarrow u_2=0$$
$$x_3>0 \Rightarrow u_3=0$$

οπότε παίρνουμε το σύστημα:

$$3\lambda_2+2\lambda_3-u_1=2$$
$$4\lambda_2+\lambda_3=5$$
$$4\lambda_3=7$$

που έχει λύση $\lambda_2 = 13/16, \lambda_3 = 7/4, u_1 = 63/16$. Έτσι, η συμπληρωματική λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 13/16, 7/4)$ είναι εφικτή και άρα και οι δύο λύσεις είναι βέλτιστες (με κοινή τιμή 78).

3. • Αν κάποιος μας έδινε 10 τ.μ. πανί η βέλτιστη λύση θα παρέμενε ίδια (ομοίως και η βέλτιστη τιμή). Αυτό συμβαίνει γιατί ο πρώτος περιορισμός που αφορά το πανί δεν ικανοποιούταν ως ισότητα πριν την αύξηση του διαθέσιμου πανιού αφού ήταν $4x_1^* + 5x_2^* + 7x_3^* = 78 < 80$ (δες διαφάνεια 43).

• Αν κάποιος μας δώσει 2 μέτρα σπάγγο σημαίνει ότι το δεξί μέρος του τελευταίου περιορισμού θα γίνει 28 από 26. Αυτό δεν θα άλλαζε το χώρο του δυικού. Εκεί κοιτάμε αν η $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 13/16, 7/4)$ παραμένει βέλτιστη. Η συμπληρωματική στο πρωτεύον θα έχει $x_1 = 0$ γιατί ο πρώτος περιορισμός του δυικού ικανοποιείται με αυστηρή ανισότητα και επείδη $\lambda_2, \lambda_3 > 0$ τα $x_1 = 0$, x_2 και x_3 θα ικανοποιούν το σύστημα

$$3x_1 + 4x_2 = 40$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 28$$

από όπου παίρνουμε σαν συπληρωματική λύση στο πρωτεύον την $(x_1, x_2, x_3) = (0, 10, 18/4)$ που είναι εφικτή κα άρα και οι δύο βέλτιστες. Συνεπώς η βέτλιστη λύση αλλάζει κατά $2 * \lambda_3 = 7/2$.