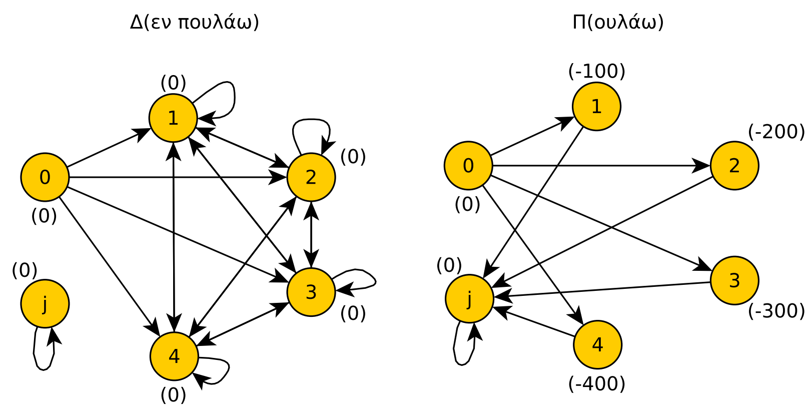
Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας
4η σειρά ασκήσεων

Παράδοση: Πέμπτη 10 Ιανουαρίου 2019.

Άσκηση 1

Επιθυμείτε να πουλήσετε τον παλιό σας υπολογιστή μέσα σε χρονικό διάστημα 4 ωρών αλλιώς θα τον δώσετε στον μικρό σας αδερφό. Κάθε ώρα σας κάνουν μια προσφορά για αγορά του υπολογιστή στην τιμή 100 ή 200 ή 300 ή 400 ευρώ με ίση πιθανότητα. Θεωρήστε ότι κάθε προσφορά είναι ανεξάρτητη από τις προηγούμενες. Εάν δεχθείτε μια προσφορά τότε κερδίζετε ποσό ίσο με την τιμή της προσφοράς. Εάν αρνηθείτε τότε δεν κερδίζεται τίποτα και δε μένει άλλη επιλογή από το να περιμένετε την επόμενη προσφορά που θα σας γίνει. Βρείτε την πολιτική αποφάσεων που επιτυγχάνει το μεγαλύτερο μέσο κέρδος από την πώληση.

Λύση: Ορίζουμε την ακόλουθη Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων



Από κάθε κόμβο το κάθε βελάκι ακολουθείται ισοπίθανα. Η κατάσταση 0 αντιστοιχεί στην αρχική κατάσταση όπου δεν έχουμε προσφορά και η κατάσταση j στην κατάσταση που δεν έχουμε υπολογιστή. Οι υπόλοιπες αντιστοιχούν στην προσφορά που έχουμε δεχτεί.

Ψάχνουμε την βέλτιστη πολιτική για φραγμένο ορίζοντα 4 βημάτων, δεδομένου $X_0 = 0$, την οποία και θα υπολογίσουμε επαγωγικά ξεκινώντας από το τέλος όπου η απάνηση είναι εύκολη: Στην 4η προσφορά πούλα.

Χρησιμοποιώντας τις (γνωστές!) αναδρομικές εξισώσεις παίρνουμε το πινακάκι

	μένουν 4 βήματα	μένουν 3 βήματα	μένουν 2 βήματα	μένει 1 βήμα	μένουν 0 βήματα
0	$\Delta : -343.75$	$\Delta : 0$	$\Delta : 0$	$\Delta : 0$	$\Delta : 0$
1		$\Delta : -325$	$\Delta : -300$	$\Delta : -250$	$\Pi : -100$
2		$\Delta : -325$	$\Delta : -300$	$\Delta : -250$	$\Pi : -200$
3		$\Delta : -325$	$\Delta : -300$	$\Pi : -300$	$\Pi : -300$
4		$\Pi : -400$	$\Pi : -400$	$\Pi : -400$	$\Pi : -400$
j		$\Delta : 0$	$\Delta : 0$	$\Delta : 0$	$\Delta : 0$

Ο συμβολισμός $A : c$ σημαίνει οτι η βέλτιστη απόφαση είναι η A κι έχει αναμενόμενο κόστος c. Για παράδειγμα, αν είμαστε στην κατάσταση 3 και μένουν 2 βήματα, η βέλτιστη απόφαση είναι Δ(εν πουλάμε) και το αναμενόμενο κόστος από εκεί και κάτω είναι -300.

Ενδεικτικά δύο αναδρομικοί υπολογισμοί:

- Αν είμαστε στην κατάσταση 2 και μένουν 2 βήματα τότε με απόφαση Δ το αναμενόμενο κόστος είναι

$$0 + \frac{1}{4}(-250) + \frac{1}{4}(-250) + \frac{1}{4}(-300) + \frac{1}{4}(-400) = -300$$

ενώ με απόφαση Π είναι

$$-200 + 1 \cdot 0 = -200$$

Συγκρίνοντας, επιλέγουμε Δ και σημειώνουμε το αντίστοιχο αναμενόμενο κόστος (-300).

- Αν είμαστε στην κατάσταση 4 και μένουν 3 βήματα τότε με απόφαση Δ το αναμενόμενο κόστος είναι

$$0 + \frac{1}{4}(-300) + \frac{1}{4}(-300) + \frac{1}{4}(-300) + \frac{1}{4}(-400) = -325$$

ενώ με απόφαση Π είναι

$$-400 + 1 \cdot 0 = -400$$

Συγκρίνοντας, επιλέγουμε Π και σημειώνουμε το αντίστοιχο αναμενόμενο κόστος (-400).

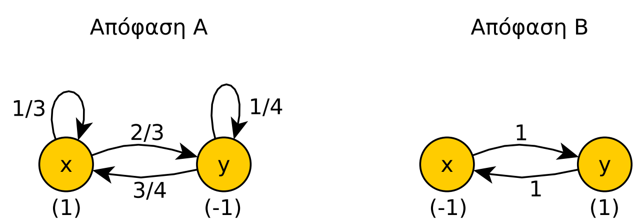
Άσκηση 2

Βρείτε x και y που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x = \min\{1 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y, -1 + \frac{1}{2}y\}$$
$$y = \min\{-1 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}y, 1 + \frac{1}{2}x\}$$

(Υπόδειξη: Προσπαθείστε να μεταφράσετε το παραπάνω σε πρόβλημα εύρεσης βέλτιστης πολιτικής για το κριτήριο του αναμενόμενου υποτιμόμενου κόστους για κάποια Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων)

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε την Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων που περιγράφεται στο σχήμα



Γνωρίζουμε οτι για το κριτήριο του συνολικού υποτιμούμενου κόστους με συντελεστή υποτίμησης $\beta = 1/2$, τα κόστη $v_{\sigma^*}(x)$ και $v_{\sigma^*}(y)$ της βέλτιστης πολιτικής σ^* ικανοποιούν τις

$$v_{\sigma^*}(x) = \min\{1 + \frac{1}{2}\big(\frac{1}{3}v_{\sigma^*}(x) + \frac{2}{3}v_{\sigma^*}(y)\big), -1 + \frac{1}{2}\big(v_{\sigma^*}(y)\big)\}$$
$$v_{\sigma^*}(y) = \min\{-1 + \frac{1}{2}\big(\frac{3}{4}v_{\sigma^*}(x) + \frac{1}{4}v_{\sigma^*}(y)\big), 1 + \frac{1}{2}\big(v_{\sigma^*}(x)\big)\}$$

και άρα αν βρούμε αυτά τα κόστη θα έχουμε βρει τα ζητούμενα x και y.

Ορΐζω αρχική πολιτική την σ_0: $\sigma_0(x) = B$ και $\sigma_0(y) = A$. Με αυτήν, σε κάθε βήμα πληρώνουμε το λιγότερο δυνατό οπότε οφείλει να είναι η βέλτιστη. Για περαιτέρω επιβεβαιώση, υπολογίζουμε τα κόστη υπο αυτή την πολιτική τα οποία ικανοποιούν τις

$$v_{\sigma_0}(x) = -1 + \frac{1}{2}\big(v_{\sigma_0}(y)\big)$$
$$v_{\sigma_0}(y) = -1 + \frac{1}{2}\big(\frac{3}{4}v_{\sigma_0}(x) + \frac{1}{4}v_{\sigma_0}(y)\big)$$

Το σύστημα έχει λύση $(v_{\sigma_0}(x), v_{\sigma_0}(y)) = (-2, -2)$. Οι τιμές αυτές ικανοποιούν τις συνθήκες βελτιστότητας και (κατά συνέπεια) το ζεύγος $(x, y) = (-2, -2)$ επιλύει το σύστημα της εκφώνησης.

Άσκηση 3

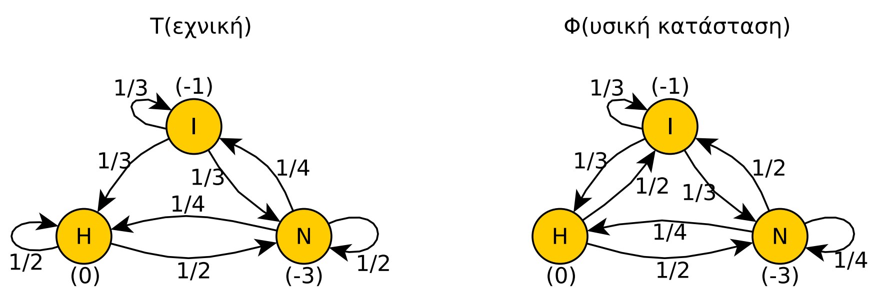
Προπονείτε μια ομάδα ποδοσφαίρου που δίνει έναν αγώνα κάθε εβδομάδα. Έχετε παρατηρήσει οτι:

Αν επικεντρωθείτε περισσότερο στην τεχνική όλη την εβδομάδα, τότε στον επόμενο αγώνα αν προέρχεστε από νικητήριο αγώνα θα νικήσετε με πιθανότητα 50%, θα χάσετε με 25% ή θα φέρετε ισοπαλία με 25%, αν προέρχεστε από ήττα, θα νικήσετε ή θα χάσετε με ίση πιθανότητα αλλά αποκλείεται να φέρετε ισοπαλία, ενώ αν προέρχεστε από ισοπαλία κάθε αποτέλεσμα είναι ισοπίθανο.

Αν επικεντρωθείτε περισσότερο στην φυσική κατάσταση όλη την εβδομάδα, τότε στον επόμενο αγώνα αν προέρχεστε από νικητήριο αγώνα θα νικήσετε με πιθανότητα 25%, θα χάσετε με 25% ή θα φέρετε ισοπαλία με 50%, αν προέρχεστε από ήττα, θα νικήσετε ή θα φέρετε ισοπαλια με ίση πιθανότητα αλλά αποκλείεται να χάσετε, ενώ αν προέρχεστε από ισοπαλία κάθε αποτέλεσμα είναι ισοπίθανο.

Ανεξαρτήτα από την απόφασή σας, στην κάθε νίκη παίρνετε 3 βαθμούς, στην κάθε ισοπαλία 1 και στην ήττα 0. Βρείτε την πολιτική που μεγιστοποιεί τους αναμενόμενους βαθμούς ανά αγώνα (δηλ. που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο μέσο 'κόστος').

Λύση: Ορίζουμε την ακόλουθη Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων στην οποία θα βρούμε βέλτιστη πολιτική για ελαχιστοποίηση του μέσου αναμενόμενου κόστους



Υποπτεύομαι σαν βέλτιστη πολιτική την σ_0: $\sigma_0(H) = \Phi$, $\sigma_0(I) = \Phi$, $\sigma_0(N) = T$. Τα 'κόστη' αυτής της πολιτικής ικανοποιούν τις

$$h_0(H) + \gamma = 0 + \frac{1}{2}h_0(I) + \frac{1}{2}h_0(N)$$
$$h_0(I) + \gamma = -1 + \frac{1}{3}h_0(H) + \frac{1}{3}h_0(I) + \frac{1}{3}h_0(N)$$
$$h_0(N) + \gamma = -3 + \frac{1}{4}h_0(H) + \frac{1}{4}h_0(I) + \frac{1}{2}h_0(N)$$

Επιλέγω αυθαίρετα $h_0(N) = 0$ και παίρνω τη λύση

$$(h_0(H), h_0(I), h_0(N), \gamma) = \Big(\frac{26}{9}, \frac{22}{9}, 0, -\frac{5}{3}\Big)$$

Ψάχνω τώρα για νέα υποψήφια βέλτιστη πολιτική:

	T	Φ	σ_1
H	$0+\frac{1}{2}\frac{26}{9}+\frac{1}{2}0=\frac{13}{9}$	$0+\frac{1}{2}\frac{22}{9}+\frac{1}{2}0=\frac{11}{9}$	Φ
I	$-1+\frac{1}{3}\frac{26}{9}+\frac{1}{3}\frac{22}{9}+\frac{1}{3}0=\frac{7}{9}$	$-1+\frac{1}{3}\frac{26}{9}+\frac{1}{3}\frac{22}{9}+\frac{1}{3}0=\frac{7}{9}$	Φ
N	$-3+\frac{1}{4}\frac{26}{9}+\frac{1}{4}\frac{22}{9}+\frac{1}{2}0=-\frac{5}{3}$	$-3+\frac{1}{4}\frac{26}{9}+\frac{1}{2}\frac{22}{9}+\frac{1}{4}0=-\frac{19}{18}$	T

Παρατηρώ ότι οι σ_0 και σ_1 ταυτίζονται και άρα είναι βέλτιστες. Αν δεν συνέβαινε αυτό (σχεδόν...) θα επαναλάμβανα τη διαδικασία για την σ_1. Το αναμενόμενο μέσο κόστος ισούτε με $\gamma = -\frac{5}{3}$.

Άσκηση 4

Ασχολείστε με αγοραπωλησίες κόμικς και διαρκώς μαζεύετε τα 3 σπάνια τεύχη του Αστερίξ και μετά τα πουλάτε (αρχικά δεν έχετε κανένα). Υπάρχουν δυο τρόποι συλλογής των τευχών:

Στον 1ο τρόπο, αν δεν τα έχετε μαζέψει όλα πληρώνετε 1 ευρώ και με πιθανότητα 1/4 σας έρχεται ένα τεύχος που δεν έχετε και με πιθανότητα 3/4 δεν σας έρχεται καινούριο τεύχος, ενώ αν τα έχετε μαζέψει όλα τα πουλάτε 20 ευρώ και μένετε με 0 τεύχη.

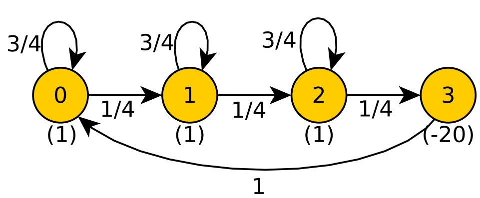
Στον 2ο τρόπο, αν δεν τα έχετε μαζέψει όλα πληρώνετε 1 ευρώ, με πιθανότητα 1/2 σας έρχεται ένα τεύχος που δεν έχετε και με πιθανότητα 1/2 πρέπει να επιστρέψετε ένα πίσω, ενώ αν τα έχετε μαζέψει όλα τα πουλάτε 20 ευρώ και μένετε με 0 τεύχη.

1. Βρείτε την βέλτιστη πολιτική για το κριτήριο του αναμενόμενου συνολικού υποτιμόμενου κόστους με συντελεστή $\beta = 3/4$. Η πολιτική αυτή θα υποδεικνύει ανάλογα με τα πόσα τεύχη έχετε στη διάθεσή σας ποιόν τρόπο συλλογής θα διαλέγατε.
2. Βρείτε την βέλτιστη πολιτική για το κριτήριο του αναμενόμενου μέσου κόστους. Αντίστοιχα, η πολιτική αυτή θα υποδεικνύει ανάλογα με τα πόσα τεύχη έχετε στη διάθεσή σας ποιόν τρόπο συλλογής θα διαλέγατε.

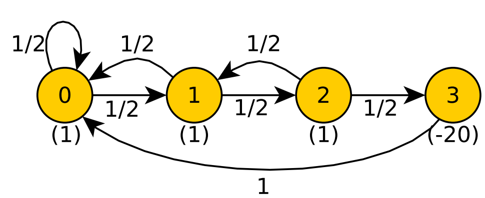
(Υπόδειξη: χρησιμοποιήσετε Μαρκοβιανή αλυσίδα 4 καταστάσεων με κάθε κατάσταση να αντιστοιχεί στο πλήθος διαφορετικών τευχών που έχετε στη διάθεσή σας)

Λύση: Ορίζουμε την ακόλουθη Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων, που μοντελοποιεί την περιγραφή της άσκησης

A(τρόπος)



B(τρόπος)



1. Για το κριτήριο του συνολικού υποτιμούμενου κόστους με $\beta = 3/4$ υποπτεύομαι βέλτιστη πολιτική την σ_0: $\sigma_0(0) = B, \sigma_0(1) = B, \sigma_0(2) = A, \sigma_0(3) = B$.

Τα κόστη αυτής της πολιτικής ικανοποιούν τις

$$
\begin{aligned}
v_0(0) =& 1 + \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{2}v_0(0) + \frac{1}{2}v_0(1)\Big)\\
v_0(1) =& 1 + \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{2}v_0(0) + \frac{1}{2}v_0(2)\Big)\\
v_0(2) =& 1 + \frac{3}{4}\Big(\frac{3}{4}v_0(2) + \frac{1}{4}v_0(3)\Big)\\
v_0(3) =& -20 + \frac{3}{4}\Big(1 \cdot v_0(0)\Big)
\end{aligned}
$$

με το σύστημα εξισώσεων να έχει ('άσχημη') λύση

$$(v_0(0), v_0(1), v_0(2), v_0(3)) = (\frac{880}{787}, -\frac{632}{787}, -\frac{4664}{787}, -\frac{15080}{787})$$

Ψάχνω τώρα για νέα υποψήφια βέλτιστη πολιτική:

	A	B	σ_1
0	$1 + \frac{3}{4}(\frac{3}{4} \cdot \frac{880}{787} + \frac{1}{4}(-\frac{632}{787})) = \frac{2327}{1574}$	$1 + \frac{3}{4}(\frac{1}{2} \cdot \frac{880}{787} + \frac{1}{2}(-\frac{632}{787})) = \frac{880}{787}$	B
1	$1 + \frac{3}{4}(\frac{3}{4}(-\frac{632}{787}) + \frac{1}{4}(-\frac{4664}{787})) = -\frac{443}{787}$	$1 + \frac{3}{4}(\frac{1}{2} \cdot \frac{880}{787} + \frac{1}{2}(-\frac{4664}{787})) = -\frac{632}{787}$	B
2	$1 + \frac{3}{4}(\frac{3}{4}(-\frac{4664}{787}) + \frac{1}{4}(-\frac{15080}{787})) = -\frac{4664}{787}$	$1 + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}(-\frac{632}{787}) + \frac{1}{2}(-\frac{15080}{787})) = -\frac{5105}{787}$	B
3	$-20 + \frac{3}{4}(1 \cdot \frac{880}{787}) = -\frac{15080}{787}$	$-20 + \frac{3}{4}(1 \cdot \frac{880}{787}) = -\frac{15080}{787}$	B

Παίρνω λοιπόν αυστηρά καλύτερη πολιτική, την σ_1, και κάνω τα ίδια για την νέα πολιτική.

Τα κόστη της σ_1 ικανοποιούν τις

$$
\begin{aligned}
v_0(0) =& 1 + \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{2}v_0(0) + \frac{1}{2}v_0(1)\Big)\\
v_0(1) =& 1 + \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{2}v_0(0) + \frac{1}{2}v_0(2)\Big)\\
v_0(2) =& 1 + \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{2}v_0(1) + \frac{1}{2}v_0(3)\Big)\\
v_0(3) =& -20 + \frac{3}{4}\Big(1 \cdot v_0(0)\Big)
\end{aligned}
$$

με το σύστημα εξισώσεων να έχει λύση

$$(v_0(0), v_0(1), v_0(2), v_0(3)) = (-\frac{16}{77}, -\frac{232}{77}, -\frac{808}{77}, -\frac{1552}{77})$$

Ψάχνω τώρα για νέα υποψήφια βέλτιστη πολιτική:

	A	B	σ_2
0	$1 + \frac{3}{4}(\frac{3}{4}(-\frac{16}{77}) + \frac{1}{4}(-\frac{232}{77})) = \frac{7}{22}$	$1 + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}(-\frac{16}{77}) + \frac{1}{2}(-\frac{232}{77})) = -\frac{16}{77}$	B
1	$1 + \frac{3}{4}(\frac{3}{4}(-\frac{232}{77}) + \frac{1}{4}(-\frac{808}{787})) = -\frac{205}{77}$	$1 + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}(-\frac{16}{77}) + \frac{1}{2}(-\frac{808}{77})) = -\frac{232}{77}$	B
2	$1 + \frac{3}{4}(\frac{3}{4}(-\frac{808}{77}) + \frac{1}{4}(-\frac{1552}{77})) = -\frac{191}{22}$	$1 + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}(-\frac{232}{77}) + \frac{1}{2}(-\frac{1552}{77})) = -\frac{808}{77}$	B
3	$-20 + \frac{3}{4}(1 \cdot (-\frac{16}{77})) = -\frac{1552}{77}$	$-20 + \frac{3}{4}(1 \cdot (-\frac{16}{77})) = -\frac{1552}{77}$	B

Παρατηρώ ότι οι σ_1 και σ_2 ταυτίζονται και άρα είναι βέλτιστες.

2. Για το κριτήριο του αναμενόμενου μέσου κόστους υποπτεύομαι βέλτιστη πολιτική την σ_0: $\sigma_0(0) = B, \sigma_0(1) = B, \sigma_0(2) = A, \sigma_0(3) = B$. Την υποπτευόμαστε γιατί διαισθητικά μόνο αν φτάσουμε στην κατάσταση 2 δεν αξίζει να ρισκάρουμε να φύγουμε προς τα πίσω, καθώς από την 2 μπορεί να φύγουμε πολύ πίσω με 'σημαντική' πιθανότητα. Τα 'κόστη' αυτής της πολιτικής ικανοποιούν τις

$$
\begin{aligned}
h_0(0) + \gamma =& 1 + \frac{1}{2}h_0(0) + \frac{1}{2}h_0(1) \\
h_0(1) + \gamma =& 1 + \frac{1}{2}h_0(0) + \frac{1}{2}h_0(2) \\
h_0(2) + \gamma =& 1 + \frac{3}{4}h_0(2) + \frac{1}{4}h_0(3) \\
h_0(3) + \gamma =& -20 + 1 \cdot h_0(0)
\end{aligned}
$$

με το σύστημα εξισώσεων επιλέγοντας αυθαίρετα $h_0(0) = 0$ να έχει λύση

$$(h_0(0), h_0(1), h_0(2), h_0(3), \gamma) = (0, -\frac{42}{11}, -\frac{126}{11}, -\frac{210}{11}, -\frac{10}{11})$$

Ψάχνω τώρα για νέα υποψήφια βέλτιστη πολιτική:

	A	B	σ_1
0	$1 + \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4}(-\frac{42}{11}) = \frac{1}{22}$	$1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}(-\frac{42}{11}) = -\frac{10}{11}$	B
1	$1 + \frac{3}{4}(-\frac{42}{11}) + \frac{1}{4}(-\frac{126}{11}) = -\frac{52}{11}$	$1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}(-\frac{126}{11}) = -\frac{52}{11}$	B
2	$1 + \frac{3}{4}(-\frac{126}{11}) + \frac{1}{4}(-\frac{210}{11}) = -\frac{136}{11}$	$1 + \frac{1}{2}(-\frac{42}{11}) + \frac{1}{2}(-\frac{210}{11}) = -\frac{115}{11}$	A
3	$-20 + 1 \cdot 0 = -20$	$-20 + 1 \cdot 0 = -20$	B

Παρατηρώ ότι οι σ_0 και σ_1 ταυτίζονται και άρα είναι βέλτιστες. Αν δεν συνέβαινε αυτό (σχεδόν...) θα επαναλάμβανα τη διαδικασία για την σ_1.