Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας
3η σειρά ασκήσεων

Παράδοση μόνο ηλεκτρονικά εώς Δευτέρα 23 Δεκέμβρη 2019.

Άσκηση 1

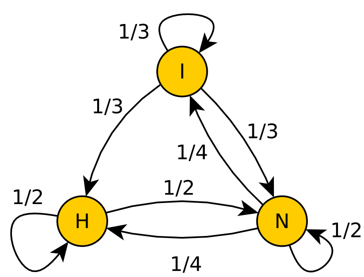
Μια ποδοσφαιρική ομάδα έχει βρεθεί ότι μετά από έναν νικητήριο αγώνα στον επόμενο θα νικήσει με πιθανότητα 50%, θα χάσει με 25% ή θα φέρει ισοπαλία με 25%. Μετά από ήττα, στον επόμενο αγώνα θα νικήσει ή θα χάσει με ίση πιθανότητα αλλά αποκλείεται να φέρει ισοπαλία, ενώ μετά από μια ισοπαλία κάθε αποτέλεσμα είναι ισοπίθανο. Υπολογίστε τα παρακάτω στατιστικά για την ομάδα αυτή:

α) Το ποσοστό νικών μετά από πολλούς αγώνες.

β) Τον μέσο αριθμό αγώνων μεταξύ δύο ηττών.

γ) Την πιθανότητα μετά από μια ισοπαλία η ομάδα να παραμείνει αήττητη για τα επόμενα 4 παιχνίδια.

Λύση: Η μαρκοβιανή αλυσίδα που αντιστοιχεί στην 'στατιστική' της ομάδας είναι η



(α) Αρκεί να υπολογίσουμε τη στάσιμη κατανομή (και να πάρουμε το αποτέλεσμα κατά προσέγγιση). Έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} 1 &= \pi_H + \pi_I + \pi_N \\ \pi_H &= \pi_H/2 + \pi_I/3 + \pi_N/4 \\ \pi_I &= \pi_I/3 + \pi_N/4 \\ \pi_N &= \pi_H/2 + \pi_I/3 + \pi_N/2 \end{aligned}$$

Το σύστημα έχει λύση $(\pi_H, \pi_I, \pi_N) = (6/17, 3/17, 8/17)$ και το ζητούμενο ποσοστό είναι το 8/17.

(β) Έστω Y_{HH} η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των αγώνων που μεσολαβούν μεταξύ δύο ηττών. Αν A είναι το ενδεχόμενο να χάσει κατευθείαν η ομάδα μετά απο ήττα τότε ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων που μεσολαβούν από μια ήττα στην επόμενη είναι

$$\mathbb{E}[Y_{HH}] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_{HH}|A] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_{HH}|\bar{A}] = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{NH}] = \frac{1}{2}T_{NH},$$

όπου X_{NH} η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των βημάτων στην αλυσίδα για να πάμε από την κατάσταση N στην H. Για να υπολογίσουμε το T_{NH} έχουμε τους τύπους

$$\begin{aligned} T_{HH} &= 0 \\ T_{IH} &= 1 + T_{HH}/3 + T_{IH}/3 + T_{NH}/3 \\ T_{NH} &= 1 + T_{HH}/4 + T_{IH}/4 + T_{NH}/2 \end{aligned}$$

με λύση $(T_{HH}, T_{IH}, T_{NH}) = (0, 10/3, 11/3)$ και άρα $\mathbb{E}[Y_{HH}] = 11/6$.

(γ) Η πιθανότητα που ψάχνουμε είναι $1 - \mathbb{P}r[(\exists t \in [4] : X_t = H)|X_0 = I]$. Το $\mathbb{P}r[(\exists t \in [4] : X_t = H)|X_0 = I]$ μπορούμε να το υπολογίσουμε με δυναμικό προγραμματισμό:

Ενδεχόμενο	$X_0 = H$	$X_0 = I$	$X_0 = N$
$\exists t \in [0] : X_t = H$	1	0	0
$\exists t \in [1] : X_t = H$	1	$\frac{1}{3} * 1 + \frac{1}{3} * 0 + \frac{1}{3} * 0 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} * 1 + \frac{1}{4} * 0 + \frac{1}{2} * 0 = \frac{1}{4}$
$\exists t \in [2] : X_t = H$	1	$\frac{1}{3} * 1 + \frac{1}{3} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{19}{36}$	$\frac{1}{4} * 1 + \frac{1}{4} * \frac{1}{3} + \frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{11}{24}$
$\exists t \in [3] : X_t = H$	1	$\frac{1}{3} * 1 + \frac{1}{3} * \frac{19}{36} + \frac{1}{3} * \frac{11}{24} = \frac{143}{216}$	$\frac{1}{4} * 1 + \frac{1}{4} * \frac{19}{36} + \frac{1}{2} * \frac{11}{24} = \frac{25}{36}$
$\exists t \in [4] : X_t = H$		$\frac{1}{3} * 1 + \frac{1}{3} * \frac{143}{216} + \frac{1}{3} * \frac{25}{36} = \frac{509}{648}$	

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1 - \frac{509}{648} = \frac{139}{648}$

Άσκηση 2

Θεωρήστε την τιμή μιας μετοχής που αλλάζει κάθε λεπτό και λαμβάνει τιμές στο σύνολο $\{0, 1, 2\}$. Οταν η τιμή είναι 0, θα αυξηθεί σίγουρα κατά 1 στο επόμενο λεπτό. Εάν η τιμή είναι 1, τότε με πιθανότητα $3/4$ χάνει την αξία της (πέφτει στο 0) ή γίνεται 2 με πιθανότητα $1/4$. Όταν η τιμή είναι 2, είτε ελαττώνεται κατά 1 με πιθανότητα $1/4$, είτε χάνει την αξία της με πιθανότητα $1/4$, ή παραμένει η ίδια.

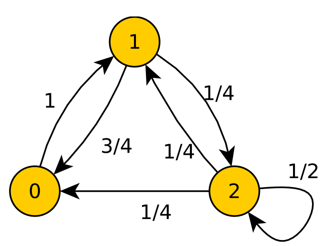
α) Ποιο ποσοστό του χρόνου η τιμή της μετοχής δεν έχει αξία;

β) Ποια είναι η μέση χρονικά τιμή της μετοχής εάν την παρακολουθούσατε για ένα αρκετά μεγάλο διάστημα;

γ) Πόσος χρόνος μεσολαβεί μέχρι η μετοχή να ξαναχάσει την αξία της, αφότου γίνει 1;

δ) Υπολογίστε την πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον 5 λεπτά μέχρι η μετοχή να χάσει την αξία της, αφότου γίνει 1.

Λύση: Η τιμή της μετοχής περιγραφεται απο την μαρκοβιανή αλυσίδα:



(α) Αρκεί να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή και να δούμε το π_0. Οι εξισώσεις της στάσιμης κατανομής είναι

$$
\begin{aligned}
1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \\
\pi_0 &= 3\pi_1/4 + \pi_2/4 \\
\pi_1 &= \pi_0 + \pi_2/4 \\
\pi_2 &= \pi_1/4 + \pi_2/2
\end{aligned}
$$

Το σύστημα έχει λύση $(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (7/19, 8/19, 4/19)$ και το ζητούμενο ποσοστό είναι το 7/19.

(β) Χρησιμοποιώντας την στάσιμη κατανομή, η μέση χρονικά τιμή της μετοχής είναι $0 * \frac{7}{19} + 1 * \frac{8}{19} + 2\frac{4}{19} = \frac{16}{19}$.

(γ) Ο χρόνος που μεσολαβεί ισούται με τον αναμενόμενο αριθμό βημων από την 1 στην 0: T_{10}. Για τον υπολογισμό του έχουμε τις εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
T_{00} &= 0 \\
T_{10} &= 1 + 3T_{00}/4 + T_{20}/4 \\
T_{20} &= 1 + T_{00}/4 + T_{10}/4 + T_{20}/2
\end{aligned}
$$

με λύση $(T_{00}, T_{10}, T_{20}) = (0, 12/7, 20/7)$ και άρα η απάντηση είναι 12/7.

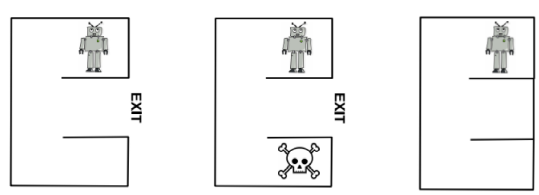
(δ) Η πιθανότητα που ψάχνουμε είναι $1 - \mathbb{P}r[(\exists t \in [4] : X_t = 0)|X_0 = 1]$. Το $\mathbb{P}r[(\exists t \in [4] : X_t = 0)|X_0 = 1]$ μπορούμε να το υπολογίσουμε με δυναμικό προγραμματισμό:

Ενδεχόμενο	$X_0 = 0$	$X_0 = 1$	$X_0 = 2$
$\exists t \in [0] : X_t = 0$	1	0	0
$\exists t \in [1] : X_t = 0$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\exists t \in [2] : X_t = 0$	1	$\frac{13}{16}$	$\frac{9}{16}$
$\exists t \in [3] : X_t = 0$	1	$\frac{57}{64}$	$\frac{47}{64}$
$\exists t \in [4] : X_t = 0$		$\frac{239}{256}$	

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1 - \frac{239}{256} = \frac{17}{256}$

Άσκηση 3

Ένα ρομπότ βρίσκεται σε ένα λαβύρινθο (σχήμα α) που αποτελείται από 6 διακριτές θέσεις, από όπου προσπαθεί να βγεί. Σε κάθε βήμα το ρομπότ κινείται προς μια από τις διαθέσιμες διπλανές θέσεις με ίση πιθανότητα.



(α) (β) (γ)

α) Δώστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που να περιγράφει την κίνηση του ρομπότ.

β) Βρείτε την πιθανότητα το ρομπότ να βγεί κάποτε από τον λαβύρινθο.

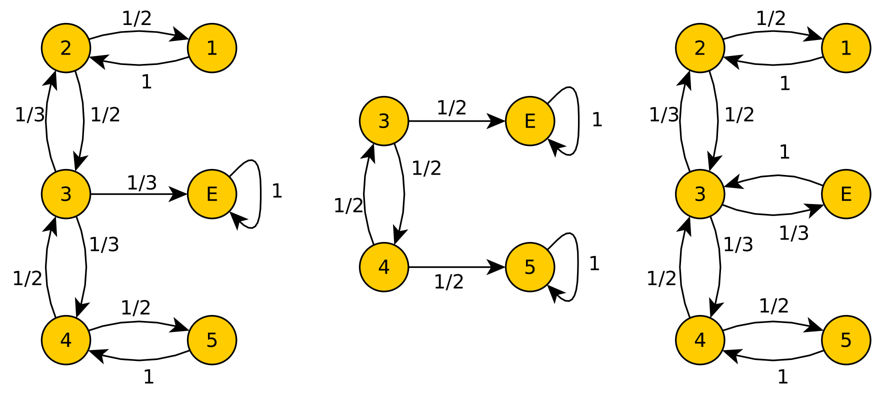
γ) Βρείτε τον μέσο αριθμό βημάτων μέχρι το ρομπότ να βγεί από τον λαβύρινθο.

δ) Βρείτε την πιθανότητα να εξέλθει του λαβυρίνθου χωρίς να πέσει στην παγίδα θανάτου, όπως φαίνεται στο σχήμα β

ε) Για τον ίδιο λαβρινθο (σχήμα β) βρείτε την πιθανότητα το ρομπότ να βγεί από αυτόν περνώντας πρώτα από τη θέση δίπλα από την παγίδα θανάτου.

στ) Εάν η έξοδος κλείσει (σχήμα γ) βρείτε πόσο συχνά περνάει το ρομπότ από κάθε θέση του λαβυρίνθου καθώς κινείται ατέρμονα μέσα σε αυτόν.

Λύση: α) Η κίνηση του ρομπότ περιγράφεται από την μαρκοβιανή αλυσίδα του σχήματος (i).



(i) (iii) (iiii)

β) Από όλες τις καταστάσεις υπάρχει μονοπάτι (του γράφου, οχι μονοπάτι στο χρόνο) που οδηγεί στην E (που αντιστοιχεί στην έξοδο). Άρα με πιθανότητα 1 το ρομποτ θα βγει από το λαβύρινθο.

γ) Ο ζητούμενος μέσος αριθμός βημάτων αντιστοιχεί στο T_{1E} που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
T_{1E} &= 1 + T_{2E} \\
T_{2E} &= 1 + T_{1E}/2 + T_{3E}/2 \\
T_{3E} &= 1 + T_{2E}/3 + T_{4E}/3 + T_{EE}/3 \\
T_{4E} &= 1 + T_{3E}/2 + T_{5E}/2 \\
T_{5E} &= 1 + T_{4E} \\
T_{EE} &= 0
\end{aligned}$$

με λύση $(T_{1E}, T_{2E}, T_{3E}, T_{4E}, T_{5E}, T_{EE}) = (13, 12, 9, 12, 13, 0)$ και άρα κατά μέσο όρο θα χρειαστούν 13 βήματα μέχρι το ρομπότ να βγει από την έξοδο.

δ) Για να βρούμε την ζητούμενη πιθανότητα Θα μπορούσαμε απλά να χρησιμοποιήσουμε την αλυσίδα (i) με την κατάσταση 5 να έχει $self$-$loop$ και να κάνουμε οτι κάνουμε πιο κάτω. Για να γλιτώσουμε πράξεις όμως κατασκευάζουμε την αλυσίδα του σχήματος (ii).

Για να την κατασκευάσουμε, αρχικά παρατηρούμε οτι μπορούμε να 'συμπτήξουμε' τα μονοπάτια (στο χρόνο) που πάνε από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 2 (και συνεχίζουν ποικιλοτρόπως), καθώς όλα τα μονοπάτια επιστρέφουν σίγουρα στην 3 και με ίση πιθανότητα κάποτε θα φύγουν προς την Ε ή την 4 (άσχετα με το πόσες φορές θα φύγουν από την 3 προς την 2). Μετά παρατηρούμε οτι υπάρχουν δύο είδη μονοπατιών αυτά που περνάνε από την κατάσταση 5 κάποτε και αυτά που δεν περνάνε ποτέ. Όμως στις δύο αλυσίδες των σχημάτων (i) και (ii) αυτά έχουν ίδια πιθανότητα.

Η ζητούμενη πιθανότητα μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της αλυσίδας (ii) και θα είναι το f_{3E} που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
f_{3E} &= f_{EE}/2 + f_{4E}/2 \\
f_{4E} &= f_{3E}/2 + f_{5E}/2 \\
f_{5E} &= 0 \\
f_{EE} &= 1
\end{aligned}$$

με λύση $(f_{3E}, f_{4E}, f_{5E}, f_{EE}) = (2/3, 1/3, 0, 1)$ και άρα με πιθανότητα 2/3 το ρομπότ θα βγει από την έξοδο χωρίς να πέσει στην παγίδα.

ε) 1ος τρόπος: Ορίζω τα ενδεχόμενα
- A: Ενδεχόμενο από την 3 να πάω στην 4
- B: Ενδεχόμενο από την 3 να καταλήξω στην E

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $\mathbb{P}r[A \wedge B] = \mathbb{P}r[A]\mathbb{P}r[B|A] = \frac{1}{2} f_{4E} = 1/6$.

2ος τρόπος: Υπάρχουν 3 διαφορετικά είδη μονοπατιών (στο χρόνο) που ξεκινούν από την 3
- τύπου A: μονοπάτια που πάνε στην E χωρίς να περάσουν από την 4
- τύπου B: μονοπάτια που πάνε στην E και περνάνε από την 4
- τύπου Γ: μονοπάτια που πάνε στην 5

Η πιθανότητα να τύχει μονοπάτι τύπου Γ είναι $1 - f_{3E} = 1/3$. Η πιθανότητα να τύχει μονοπάτι τύπου A είναι $1/2$. Άρα τυχαίνει μονοπάτι τύπου B με πιθανότητα $1 - 1/2 - 1/3 = 1/6$, που είναι και η ζητούμενη πιθανότητα.

στ) Οι ζητούμενες συχνότητες δίνονται από τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας (iii) που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_E \\
\pi_1 &= \pi_2/2 \\
\pi_2 &= \pi_1 + \pi_3/3 \\
\pi_3 &= \pi_2/2 + \pi_2/2 + \pi_E \\
\pi_4 &= \pi_5 + \pi_3/3 \\
\pi_5 &= \pi_4/2 \\
\pi_E &= \pi_3/3
\end{aligned}$$

Μπορούμε να λύσουμε αυτό το σύστημα αλλά μπορούμε και να εκμεταλλευτούμε την συμμετρία του προβλήματος και να λύσουμε το

$$\begin{aligned}
1 &= 2\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 + \pi_E \\
\pi_1 &= \pi_2/2 \\
\pi_2 &= \pi_1 + \pi_3/3 \\
\pi_3 &= \pi_2/2 + \pi_2/2 + \pi_E \\
\pi_4 &= \pi_2 \\
\pi_5 &= \pi_1 \\
\pi_E &= \pi_3/3
\end{aligned}$$

Το σύστημα έχει λύση $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_E) = (1/10, 1/5, 3/10, 1/5, 1/10, 1/10)$ που είναι και οι ζητούμενες συχνότητες.

Άσκηση 4

Σαν συλλέκτης κόμικς θέλετε να μαζέψετε και τα N τεύχη του Αστερίξ (χωρίς να έχετε κανένα) και υπάρχουν δυο τρόποι να γίνει αυτό.

Στον 1ο τρόπο, κάθε μέρα σας έρχεται ένα τυχαίο από τα N τεύχη με ίση πιθανότητα.

Στον 2ο τρόπο, κάθε μέρα με πιθανοτητα p σας έρχεται ένα τεύχος που δεν έχετε και με $1 - p$ πρέπει να τα επιστρέψετε όλα πίσω.

α) Με τον 1ο τρόπο, όταν φτάσει η στιγμή που θα έχετε k διαφορετικά τεύχη, σε πόσο χρόνο αναμένεται να έχετε $k + 1$ τεύχη;

β) Σε πόσο χρόνο αναμένεται να μαζέψετε όλα τα τεύχη με τον 1ο τρόπο;
(Υπόδειξη: χρησιμοποιήσετε Μαρκοβιανή αλυσίδα N καταστάσεων)

γ) Μέχρι να τα μαζέψετε όλα, με τον 1ο τρόπο, για πόσες μέρες αναμένεται να έχετε $> N/2$ τεύχη;

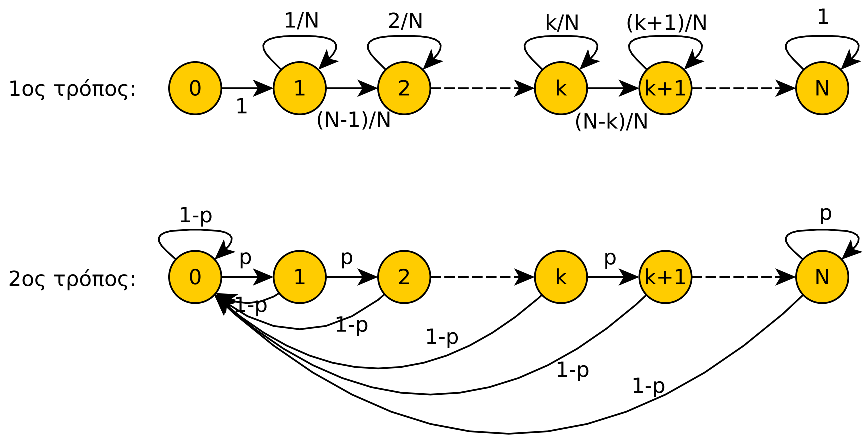
δ) Σε πόσο χρόνο αναμένεται να μαζέψετε όλα τα τεύχη με τον 2ο τρόπο;

ε) Ποιόν από τους δύο τρόπους θα προτιμούσατε, για τις διάφορες τιμές των N και p;

Λύση: α) Από την αλυσίδα του 1ου τρόπου

$$T_{k(k+1)} = 1 + \frac{k}{N}T_{k(k+1)} + \frac{N-k}{N}T_{(k+1)(k+1)} = 1 + \frac{k}{N}T_{k(k+1)}$$

από όπου παίρνουμε $T_{k(k+1)} = \frac{N}{N-k}$



β) Για τον κόμβο $i < N$ είναι

$$T_{iN} = 1 + \frac{i}{N}T_{iN} + \frac{N-i}{N}T_{(i+1)N} \Leftrightarrow T_{iN} = \frac{N}{N-i} + T_{(i+1)N}$$

Λύνοντας αυτές τις σχέσεις 'από το τέλος προς τη αρχή', δηλ. ξεκινώντας από $i = N-1$ και μικραίνοντας το i κατα 1 παίρνουμε $T_{(N-1)N} = \frac{N}{1}$, $T_{(N-2)N} = \frac{N}{2} + \frac{N}{1}$,$T_{(N-3)N} = \frac{N}{3} + \frac{N}{2} + \frac{N}{1}$ καταλήγοντας στο

$$T_{0N} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N}{N-k}$$

που είναι και το άθροισμα για $0 \leq k \leq N$ των αναμενόμενων βημάτων για να βρεθούμε από την k στην $k+1$.

γ) Με τον ίδιο τρόπο με πριν έχουμε $T_{(N-1)N} = \frac{N}{1}$, $T_{(N-2)N} = \frac{N}{2} + \frac{N}{1}$,$T_{(N-3)N} = \frac{N}{3} + \frac{N}{2} + \frac{N}{1}$ καταλήγοντας στο

$$T_{(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1)N} = \sum_{k=\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1}^{N-1} \frac{N}{N-k}$$

γ) Με τον 2ο τρόπο έχουμε για κάθε $i < N$, $T_{iN} = 1 + pT_{(i+1)N} + (1-p)T_{0N}$ τα οποία λύνοντας από το τέλος στην αρχή δίνουν

$$T_{(N-1)N} = 1 + (1-p)T_{0N}$$

ακολούθως

$$T_{(N-2)N} = 1 + p[1 + (1-p)T_{0N}] + (1-p)T_{1N} = 1 + p + (1+p)(1-p)T_{0N}$$

έπειτα

$$T_{(N-3)N} = 1 + p[1 + p + (1+p)(1-p)T_{0N}] + (1-p)T_{0N} = 1 + p + p^2 + (1 + p + p^2)(1-p)T_{0N}$$

και τελικά

$$T_{0N} = (1 + p + \ldots + p^{N-1})\big[1 + (1-p)T_{0N}\big] = \frac{1-p^N}{1-p} + \frac{1-p^N}{1-p}(1-p)T_{0N}$$

με λύση $T_{0N} = \frac{1-p^N}{p^N(1-p)}$ που είναι και το ζητούμενο.

στ) Δεν υπάρχει καθολική απάντηση, ανάλογα με τα N και p συγκρίνω τις τιμές των ερωτημάτων γ και ε και επιλέγω τον τρόπο που δίνει την μικρότερη.