Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας
2η σειρά ασκήσεων

Παράδοση: μόνο ηλεκτρονικά έως την Δευτέρα 2 Δεκέμβρη 2019.

Άσκηση 1

Κάθε πρωί δύο πρακτορεία εφημερίδων (E_1 και E_2) προμηθεύουν τρία περίπτερα (Π_1, Π_2,Π_3) με την εφημερίδα ‘Τα νέα του ΟΠΑ’. Το E_1 διαθέτει 170 φύλλα της εφημερίδας, ενώ το E_2 180 φύλλα. Η ζήτηση στα Π_1, Π_2,Π_3 είναι 50, 200 και 100 φύλλα αντίστοιχα. Εάν το κόστος μεταφοράς ανά φύλλο δίνεται από τον πίνακα (σε χιλιοστά του ευρώ)

	Π_1	Π_2	Π_3
E_1	3	2	2
E_2	2	4	4

υπολογίστε τον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς των φύλλων της εφημερίδας από τα πρακτορεία στα περίπτερα έτσι ώστε να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί που αφορούν τη διάθεση και τη ζήτηση. Ποιό είναι το ελάχιστο κόστος;

Λύση: Με κανόνα βορειοδυτικής γωνίας παίρνω αρχική βασική εφικτή λύση την

	Π_1	Π_2	Π_3
E_1	50	120	
E_2		80	100

Από τον πίνακα συμπεραίνω

$$\begin{aligned} \mu_1 - \lambda_1 &= 3 \\ \mu_2 - \lambda_1 &= 2 \\ \mu_2 - \lambda_2 &= 4 \\ \mu_3 - \lambda_2 &= 4 \end{aligned}$$

από όπου θέτοντας (αυθαίρετα) $\lambda_2 = 0$ παίρνω

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 0, 5, 4, 4)$$

Με αυτήν τη λύση έχω

$$\begin{aligned} v_{13} &= 2 + \lambda_1 - \mu_3 = 0 \geq 0 \\ v_{21} &= 2 + \lambda_2 - \mu_1 = -3 < 0 \end{aligned}$$

απ΄ όπου αντιλαμβάνομαι οτι υπάρχει συμφέρον να μπει η ακμή $(2, 1)$ στη βάση

	Π_1	Π_2	Π_3
E_1	$50 - \epsilon$	$120 + \epsilon$	
E_2	$+\epsilon$	$80 - \epsilon$	100

όπου με επιλογή $\epsilon = 50$ έχω τη νεά βάση

	Π_1	Π_2	Π_3
E_1		170	
E_2	50	30	100

Για τη νέα βάση, από τον πίνακα συμπεραίνω

$$\begin{aligned} \mu_2 - \lambda_1 &= 2 \\ \mu_1 - \lambda_2 &= 2 \\ \mu_2 - \lambda_2 &= 4 \\ \mu_3 - \lambda_2 &= 4 \end{aligned}$$

από όπου θέτοντας (αυθαίρετα) $\lambda_2 = 0$ παίρνω

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 0, 2, 4, 4)$$

Με αυτήν τη λύση έχω

$$\begin{aligned} v_{11} &= 3 + \lambda_1 - \mu_1 = 3 \geq 0 \\ v_{13} &= 2 + \lambda_1 - \mu_3 = 0 \geq 0 \end{aligned}$$

και άρα η λύση είναι βέλτιστη. Άρα σε μια βέλτιστη λύση το E_1 στέλνει μόνο στο Π_2 τα 170 φύλλα του και τα υπόλοιπα φύλλα προς τα τρια περίπτερα πηγαίνουν από το E_2. Το βέλτιστο κόστος είναι

$$2 * 170 + 50 * 2 + 30 * 4 + 100 * 4 = 960$$

χιλιοστά του ευρώ.

Άσκηση 2

Δύο διυλιστήρια πετρελαίου Δ_1, Δ_2 με αντίστοιχο απόθεμα 10 και 6 εκατομμύρια τόνους πετρελαίου προμηθεύουν τις δύο πόλεις Π_1 και Π_2. Η ζήτηση σε πετρέλαιο είναι 5 και 7 εκατομμύρια τόνοι για την Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Δίδεται επίσης το κόστος μεταφοράς ανά τόνο από τον πίνακα (σε εκατοστά του ευρώ) που ακολουθεί:

	Π_1	Π_2
Δ_1	1	3
Δ_2	1	2

(α) Βρείτε τον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς πετρελαίου από τα διυλιστήρια στις πόλεις έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί που αφορούν τη διάθεση και τη ζήτηση.

(β) Θεωρήστε ότι από κάθε διυλιστήριο προς κάθε πόλη υπάρχει ο περιορισμός ότι δε μπορούν να σταλούν περισσότερο από 4 εκατομμύρια τόνοι λόγω περιορισμών στη χωρητικότητα των φορτηγών πλοίων που πραγματοποιούν τη μεταφορά. Επιβεβαιώστε ότι ο οικονομικότερος τρόπος μεταφοράς είναι αυτός όπου το Δ1 στέλνει 4 εκ. τόνους στην Π1 και 3 στην Π2, ενώ το Δ2 στέλνει 1 και 4 εκ. τόνους στην Π1 και Π2 αντίστοιχα.
(Υπόδειξη: θεωρήστε ένα τροποποιημένο πρόβλημα μεταφοράς με διυλιστήρια όπου το κάθενα διαθέτει το πολύ 4 εκ. τόνους προς όλες τις πόλεις συνολικά...)

Λύση: (α) Προσθέτουμε μια εικονική πόλη με ζήτηση 4εκ. τόνους, και μηδενικά κόστη, οπότε έχουμε τον πίνακα

	Π_1	Π_2	Π_3
Δ_1	1	3	0
Δ_2	1	2	0

Δεν χρησιμοποιούμε κανόνα βορειοδυτικής γωνίας για να πάρουμε μια αρχική βάση (δεν είναι 'υποχρεωτικό') παρά υποπτευόμαστε μια άλλη καλύτερη αρχική βάση, την

	Π_1	Π_2	Π_3
Δ_1	5	1	4
Δ_2		6	

Από τον πίνακα συμπεραίνω

$$\begin{aligned} \mu_1 - \lambda_1 &= 1 \\ \mu_2 - \lambda_1 &= 3 \\ \mu_3 - \lambda_1 &= 0 \\ \mu_2 - \lambda_2 &= 2 \end{aligned}$$

από όπου θέτοντας (αυθαίρετα) $\lambda_1 = 0$ παίρνω

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 1, 1, 3, 0)$$

Με αυτήν τη λύση έχω

$$\begin{aligned} v_{21} &= 1 + \lambda_2 - \mu_1 = 1 \geq 0 \\ v_{23} &= 0 + \lambda_2 - \mu_3 = 1 \geq 0 \end{aligned}$$

απ΄ όπου αντιλαμβάνομαι οτι η λύση είναι βέλτιστη.

(β) Θα πειράξω το πρόβλημα δημιουργώντας δυο αντίγραφα του κάθε δυιλιστηρίου. Μέσω του πίνακα κόστους θα φροντίσω στη βέλτιστη λύση το πρώτο αντίγραφο να στέλνει μόνο στην πρώτη πόλη και το δεύτερο μόνο στη δεύτερη. Ορίζω τον πίνακα να είναι ο

	Π_1	Π_2	Π_3
Δ_1	1	50	0
Δ_1'	50	3	0
Δ_2	1	50	0
Δ_2'	50	2	0

Το 50 είναι αρκετά μεγάλος αριθμός για τον σκοπό που θέλω γιατί είναι μεγαλύτερος από $3 * 12$ που είναι το συνολικό κόστος μεταφοράς ακόμη και αν όλη η ζήτηση ικανοποιηθεί με τον πιο ακριβό τρόπο. Με την επιλογή του 50, οποιαδήποτε λύση δεν 'χρησιμοποιεί' κάποιο από τα 'απαγορευμένα' κελιά (με κόστος 50) έχει χαμηλότερο κόστος από οποιαδήποτε λύση 'χρησιμοποιεί' κάποιο από αυτά τα κελιά. Επιπλέον αφού κάθε δυιλιστήριο στέλνει το πολύ 4 μονάδες σε κάθε πόλη ορίζω την προσφορά κάθε δυιλιστηρίου ίση με 4 και την ζήτηση της εικονικής πόλης ίση με 2.[1] Η λύση που προτείνεται σαν βέλτιστη είναι η

	Π_1	Π_2	Π_3
Δ_1	4		
Δ_1'		3	1
Δ_2	1		3
Δ_2'		4	

Από τον πίνακα συμπεραίνω

$$\begin{aligned} \mu_1 - \lambda_1 &= 1 \\ \mu_2 - \lambda_2 &= 3 \\ \mu_3 - \lambda_2 &= 0 \\ \mu_1 - \lambda_3 &= 1 \\ \mu_3 - \lambda_3 &= 0 \\ \mu_2 - \lambda_4 &= 2 \end{aligned}$$

[1] Τυπικά, αν δεν γνωρίζαμε οτι στη βέλτιστη λύση το Δ_2 δεν στέλνει όλη του την προσφορά, χρησιμοποιώντας την ίδια λογική θα έπρεπε να λύσουμε δύο προβλήματα, ένα με προσφορά 2 και 4 για τα Δ_2 και Δ_2', και ένα με προσφορά 4 και 2 για τα Δ_2 και Δ_2',

από όπου θέτοντας (αυθαίρετα) $\lambda_2 = 0$ παίρνω

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 0, 0, 1, 1, 3, 0)$$

Με αυτήν τη λύση έχω

$$\begin{aligned}
v_{12} &= 50 + \lambda_1 - \mu_2 = 47 \geq 0 \\
v_{13} &= 0 + \lambda_1 - \mu_3 = 0 \geq 0 \\
v_{21} &= 50 + \lambda_2 - \mu_1 = 49 \geq 0 \\
v_{32} &= 50 + \lambda_3 - \mu_2 = 47 \geq 0 \\
v_{41} &= 50 + \lambda_4 - \mu_1 = 51 \geq 0 \\
v_{43} &= 0 + \lambda_2 - \mu_3 = 0 \geq 0
\end{aligned}$$

απ΄ όπου αντιλαμβάνομαι οτι η λύση είναι βέλτιστη.

Άσκηση 3

Μια παρέα πέντε προγραμματιστών σκοπεύει να κατασκευάσει μια πλατφόρμα μουσικής αναπαραγωγής μέσω διαδικτύου. Η κατασκευή της απαιτεί την ανάπτυξη API, $backend$, $frontend$, $documentation$ και μιας πλατφόρμας $e - commerce$. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι ώρες που θα έπαιρνε σε κάθε έναν προγραμματιστή η ανάπτυξη κάθε μέρους της πλατφόρμας:

	API	$Backend$	$Frontend$	$Documentation$	$E - commerce$
Ανδρέας	12	24	38	22	4
Βάσω	12	4	4	40	12
Γιώργος	38	20	12	6	4
Δανάη	16	22	18	10	26
Έκτορας	18	10	8	6	40

Βρείτε ποιο μέρος της πλατφόρμας πρέπει να αναλάβει κάθε προγραμματιστής ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό πλήθος ωρών εργασίας που απαιτούνται. Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος ωρών εργασίας;

Λύση: Θα το λύσουμε με ουγγρικό αλγόριθμο. Αφαιρώντας το ελάχιστο στοιχείο κάθε γραμμής από τη γραμμή παίρνω

	A	B	F	D	E
Α	8	20	34	18	0
Β	8	0	0	36	8
Γ	34	16	8	2	0
Δ	6	12	8	0	16
Έ	12	4	2	0	34

Αφαιρώντας το ελάχιστο στοιχείο κάθε στήλης από τη στήλη παίρνω

	A	B	F	D	E
Α	2	20	34	18	0
Β	2	0	0	36	8
Γ	28	16	8	2	0
Δ	0	12	8	0	16
Έ	6	4	2	0	34

Εδώ έχουμε το πολύ 4 'ανεξάρτητα' μηδενικά. Καλύπτω με τις λιγότερες ευθείες (4)

	A	B	F	D	E
A	2	20	34	18	0
B	2	0	0	36	8
Γ	28	16	8	2	0
Δ	0	12	8	0	16
Έ	6	4	2	0	34

και αφαιρώντας το μικρότερο στοιχείο των ακάλυπτων από τα ακάλυπτα στοιχεία και προσθέτοντάς το στα δύο φορές καλυμμένα παίρνω

	A	B	F	D	E
A	0	18	32	18	0
B	2	0	0	38	10
Γ	26	14	6	2	0
Δ	0	12	8	2	18
Έ	4	2	0	0	34

Εδώ έχουμε το πολύ 4 'ανεξάρτητα' μηδενικά. Καλύπτω με τις λιγότερες ευθείες (4)

	A	B	F	D	E
A	0	18	32	18	0
B	2	0	0	38	10
Γ	26	14	6	2	0
Δ	0	12	8	2	18
Έ	4	2	0	0	34

και αφαιρώντας το μικρότερο στοιχείο των ακάλυπτων από τα ακάλυπτα στοιχεία και προσθέτοντάς το στα δύο φορές καλυμμένα παίρνω τον

	A	B	F	D	E
A	**0**	16	30	16	0
B	4	**0**	0	38	12
Γ	26	12	4	0	**0**
Δ	0	10	6	**0**	18
Έ	6	2	**0**	0	36

όπου πλέον βρίσκω 5 'ανεξάρτητα' μηδενικά στις θέσεις (A,A), (B,B), (E, F), (Δ,D), (Γ,E), που μου φανερώνουν μια βέλτιστη ανάθεση κόστους $12 + 4 + 8 + 10 + 4 = 38$ ωρών.

Άσκηση 4

Στην επιχείρησή σας υπάρχουν 3 θέσεις εργασίας E_1, E_2, E_3 για τις οποίες πρέπει να προσλάβετε 3 εργαζόμενους. Παρουσιάζονται 4 υποψήφιοι Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 όπου εκτιμάτε ότι το κέρδος (σε ευρώ/ώρα) που θα μπορούσε να αποφέρει ο καθένας ανάλογα με τη θέση που θα καταλάμβανε δίνεται από τον πίνακα:

	E_1	E_2	E_3
Y_1	12	8	10
Y_2	2	15	11
Y_3	8	14	4
Y_4	16	2	5

(α) Ποιους από τους 3 υποψήφιους θα προσλαμβάνατε και σε ποια θέση ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος;

(β) Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα εάν γνωρίζετε ότι ο Y_4 δεν μπορεί να αναλάβει την E_1.

Λύση: (α) Λύνουμε με ουγγρικό αλγόριθμο αφού πρώτα προσθέσουμε μια εικονική εργασία με κέρδος 0 για όλους. Επιπλέον θα τε μετατρέψουμε σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης: Η βέλτιστη ανάθεση στο αρχικό πρόβλημα είναι ίδια με αυτή που μεγιστοποιεί το κέρδος στο πρόβλημα με πίνακα

	E_1	E_2	E_3	E_4
Y_1	12	8	10	0
Y_2	2	15	11	0
Y_3	8	14	4	0
Y_4	16	2	5	0

και είναι ίδια με αυτή που ελαχιστοποιεί το κόστος στο πρόβλημα με πίνακα (μέσω της αλλαγής $c'_{ij} = Max - c_{ij}$)

	E_1	E_2	E_3	E_4
Y_1	4	8	6	16
Y_2	14	1	5	16
Y_3	8	2	12	16
Y_4	0	14	11	16

Αφαιρώντας το μικρότερο κάθε γραμμής από τη γραμμή παίρνω

	E_1	E_2	E_3	E_4
Y_1	0	4	2	12
Y_2	13	0	4	15
Y_3	6	0	10	14
Y_4	0	14	11	16

Αφαιρώντας το μικρότερο κάθε στήλης από τη στήλη παίρνω

	E_1	E_2	E_3	E_4
Y_1	0	4	0	0
Y_2	13	0	2	3
Y_3	6	0	8	2
Y_4	0	14	9	4

Εδώ έχουμε το πολύ 3 ‘ανεξάρτητα’ μηδενικά. Καλύπτω με τις λιγότερες ευθείες (3)

	E_1	E_2	E_3	E_4
Y_1	0	4	0	0
Y_2	13	0	2	3
Y_3	6	0	8	2
Y_4	0	14	9	4

και αφαιρώντας το μικρότερο στοιχείο των ακάλυπτων από τα ακάλυπτα στοιχεία και προσθέτοντάς το στα δύο φορές καλυμμένα παίρνω

	E_1	E_2	E_3	E_4
Y_1	2	6	0	**0**
Y_2	13	0	**0**	1
Y_3	6	**0**	6	0
Y_4	**0**	14	7	2

Μια βέλτιστη ανάθεση δίνεται από τα μηδενικά της διαγωνίου, που μας λέει να προσλάβουμε τον 2ο υποψήφιο για την 3η θέση εργασίας, τον 3ο υποψήφιο για την 2η θέση εργασίας και τον 4ο υποψήφιο για την 1η θέση εργασίας, με κέρδος $11 + 14 + 16 = 41$ ευρώ/ώρα.

(β) Αρκεί να λύσουμε το πρόβλημα ανάθεσης με πειραγμένο πίνακα που το κόστος της ανάθεσης της E_1 στον Y_4 είναι πολύ μεγάλο. Αφού όλοι οι πίνακες είναι ισοδύναμοι ως προς τις βέλτιστες αναθέσεις πάμε στον τελευταίο (που έχει πολλά μηδενικά) και τον μετατρέπουμε στον

	E_1	E_2	E_3	E_4
Y_1	2	6	0	0
Y_2	13	0	0	1
Y_3	6	0	6	0
Y_4	60	14	7	2

Στη θέση (4,1) έχουμε βάλει τον αριθμό $60 > 4*14$, όπου το 14 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που εμφανιζόταν πριν στον πίνακα. Αυτό αρκεί αν θέλουμε στη βέλτιστη λύση ο Y_4 να μην παίρνει την E_1 αφού οποιαδήποτε ανάθεση δεν αναθέτει την E_1 στον Y_4, έχει κόστος το πολύ $4 * 14 = 56$.

Αφαιρώντας το ελάχιστο της 4ης γραμμής από την 4η γραμμή και της 1ης στήλης από την 1η στήλη παίρνουμε τον πίνακα

	E_1	E_2	E_3	E_4
Y_1	**0**	6	0	0
Y_2	11	0	**0**	1
Y_3	4	**0**	6	0
Y_4	56	12	5	**0**

από όπου βλέπουμε οτι μια βέλτιστη ανάθεση με τον επιπλέον περιορισμό του ερωτήματος είναι ο Y_1 να πάρει την E_1, ο Y_2 να πάρει την E_3 και ο Y_3 να πάρει την E_2 με κέρδος $12 + 11 + 14 = 37$ ευρώ/ ώρα.