Επιχειρησιακή Έρευνα
1η σειρά ασκήσεων

Παράδοση μόνο ηλεκτρονικά έως Τρίτη 5 Νοέμβρη 2019.

Άσκηση 1

Δίνεται το γραμμικό πρόγραμμα

$$\max\ x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_3 & \leq & 5 \\ x_3 - 3x_2 & = & 2 \\ x_1 & \geq & -4 \\ x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

1. Γράψτε το παραπάνω πρόγραμμα σε κανονική μορφή.
2. Γράψτε το δυϊκό πρόβλημα.

Λύση: 1. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x_1' = x_1 + 4$ και σπάμε την ισότητα σε δύο ανισότητες:

$$\max\ x_1' - 2x_2 + x_3 - 4$$

$$\begin{array}{rcl} x_1' - 2x_3 & \leq & 9 \\ x_3 - 3x_2 & \leq & 2 \\ 3x_2 - x_3 & \leq & -2 \\ x_1', x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

το οποίο έχει τις ίδιες λύσεις (όχι τιμές) στο χώρο με το

$$\max\ x_1' - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{rcl} x_1' - 2x_3 & \leq & 9 \\ -3x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ 3x_2 - x_3 & \leq & -2 \\ x_1', x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

2. Το δυϊκό αυτού είναι το

$$\min\ 9\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 & \geq & 1 \\ -3\lambda_2 + 3\lambda_3 & \geq & -2 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & \geq & 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Άσκηση 2

Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα

$$\max \; 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_2 - x_1 &\geq -1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Βρείτε τις βασικές λύσεις και απεικονίστε τις (αγνοώντας τις μεταβλητές χαλαρότητας) σε διάγραμμα με άξονες τις αρχικές μεταβλητές x_1, x_2
2. Στο ίδιο διάγραμμα, απεικονίστε τις βασικές εφικτές λύσεις καθώς και το σύνολο όλων των εφικτών σημείων.
3. Γράψτε το δυϊκό πρόβλημα.
4. Βρείτε τις βασικές λύσεις του δυϊκού και απεικονίστε τις (αγνοώντας τις μεταβλητές χαλαρότητας) σε διάγραμμα με άξονες τις δυϊκές μεταβλητές.
5. Αντιστοιχίστε τις βασικές λύσεις που βρήκατε στα ερωτήματα 1 και 4 σύμφωνα με το ποιές είναι συμπληρωματικές, δηλ. ικανοποιούν τις συμπληρωματικές συνθήκες χαλαρότητας.
6. Βρείτε τη βέλτιστη τιμή και μια βέλτιστη λύση.
7. Εάν ο περιορισμός $x_1 + 2x_2 \leq 7$ γίνει $x_1 + 2x_2 \leq 7 + \epsilon$ για μικρό $\epsilon > 0$, πόσο αλλάζει η βέλτιστη τιμή ως συνάρτηση του ϵ;
   (Δεν είναι ανάγκη να λύσετε ξανά το πρόβλημα.)

Λύση: 1, 2. Το πρόγραμμα είναι ισοδύναμο με το

$$\max \; 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + z_1 &= 7 \\ x_1 - x_2 + z_2 &= 1 \\ x_1, x_2, z_1, z_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Από τις βασικές του λύσεις (x_1, x_2, z_1, z_2), οι βασικές εφικτές λύσεις είναι οι 4άδες $(0,0,7,1)$, $(0,7/2,0,9/2)$, $(1,0,6,0)$, $(9/3,6/3,0,0)$, ενώ οι βασικές μη εφικτές είναι οι $(0,-1,9,0)$, $(7,0,0,-6)$.

3. Το δυϊκό του είναι το

$$\min \; 7\lambda_1 + \lambda_2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &\geq 3 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 &\geq 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Το δυϊκό είναι ισοδύναμο με το

$$\min \; 7\lambda_1 + \lambda_2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 - \nu_1 &= 3 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \nu_2 &= 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Από τις βασικές του λύσεις $(\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2)$, οι βασικές εφικτές λύσεις είναι οι 4άδες $(3,0,0,5)$, $(4/3,5/3,0,0)$, ενώ οι βασικές μη εφικτές είναι οι $(0,0,-3,-1)$, $(0,3,0,-4)$, $(0,-1,-4,0)$, $(1/2,0,-5/2,0)$.

5. Η αντιστοίχιση είναι

πρωτεύον		δυϊκό
$(0,0,7,1)$	$\leftrightarrow$	$(0,0,-3,-1)$
$(0,7/2,0,9/2)$	$\leftrightarrow$	$(1/2,0,-5/2,0)$
$(0,-1,9,0)$	$\leftrightarrow$	$(0,-1,-4,0)$
$(7,0,0,-6)$	$\leftrightarrow$	$(3,0,0,5)$
$(1,0,6,0)$	$\leftrightarrow$	$(0,3,0,-4)$
$(9/3,6/3,0,0)$	$\leftrightarrow$	$(4/3,5/3,0,0)$

6. Το μόνο ζεύγος εφικτών λύσεων είναι το τελευταίο και από αυτό, αφού ικανοποιούνται οι συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας, παίρνουμε τις βέλτιστες λύσεις σε πρωτεύον και δυϊκό αντίστοιχα: $(x_1, x_2) = (9/3, 6/3)$ και $(\lambda_1, \lambda_2) = (4/3, 5/3)$.

7. Για μικρό ϵ περιμένουμε η λύση $(\lambda_1, \lambda_2) = (4/3, 5/3)$ να παραμένει βέλτιστη στο δυϊκό, που πλέον είναι το

$$\min\ (7+\epsilon)\lambda_1 + \lambda_2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &\geq 3 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 &\geq 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας, βλέπουμε μεταβολή ίση με $\frac{4}{3}\epsilon$ στη βέλτιστη τιμή.

Άσκηση 3

Βρείτε τη βέλτιστη λύση και τιμή του γραμμικού προγράμματος που ακολουθεί χρησιμοποιώντας *Simplex* στο δυϊκό του:

$$\min\ x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 7 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Πόσο θα άλλαζε η βέλτιστη τιμή εάν προσθέταμε τον περιορισμό $2x_1 + 4x_2 \geq 10$;

Λύση: Το δυϊκό του είναι το

$$\max\ 7\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 &\leq 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &\leq 5 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

το οποίο με την προσθήκη των μεταβλητών χαλαρότητας γίνεται

$$\max\ 7\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 + z_1 &= 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + z_2 &= 5 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Τρέχοντας *Simplex* έχω διαδοχικά τα ταμπλώ

λ_1	λ_2	z_1	z_2	ct
7	2	0	0	0
1	3	1	0	1
2	1	0	1	5

λ_1	λ_2	z_1	z_2	ct
0	-19	-7	0	-7
1	3	1	0	1
0	-5	-2	1	3

και από το τελευταίο παίρνω τη βέλτιστη λύση $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$ του δυϊκού αλλά και τη βέλτιστη λύση $(x_1, x_2) = (7, 0)$ του πρωτεύοντος.

Παρατηρώ οτι η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος ανήκει και στο μικρότερο χώρο που προκύπτει προσθέτοντας τον περιορισμό $2x_1 + 4x_2 \geq 10$ και άρα είναι βέλτιστη και σε αυτό το χώρο.

Άσκηση 4

Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:

$$\min \; 2x_1 + 5x_2 + 8x_3$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq & 3 \\ x_2 + x_3 & \geq & 2 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

1. Βρείτε τη βέλτιστη λύση και τιμή.
   (Υπόδειξη: ίσως είναι πιο απλό χωρίς *simplex*.)

2. Βρείτε τη βέλτιστη λύση και τη βέλτιστη τιμή εάν η αντικειμενική συνάρτηση αλλάξει σε $2x_1 + 5x_2 + 10x_3$

3. Βρείτε τη βέλτιστη λύση και τιμή εάν στο αρχικό πρόβλημα ο 2ος περιορισμός αλλάξει σε $x_2 + x_3 \geq 1.999$.

Λύση: 1. Υποπτεύομαι σαν βέλτιτση λύση την $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0)$ και θα την δείξω βέλτιστη χρησιμοποιώντας συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας. Το δυϊκό του πραπάνω προβλήματος είναι το

$$\max \; 3\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 & \leq & 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \leq & 5 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 & \leq & 8 \\ \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ψάχνοντας την συμπληρωματική λύση, από $x_1 > 0$ παίρνω $\lambda_1 = 2$ και από $x_2 > 0$ παίρνω $\lambda_1 + \lambda_2 = 5$ που δίνει $\lambda_2 = 3$ η οποία είναι και εφικτή και άρα και οι δύο βέλτιστες.

2. Με την αλλαγή της αντικειμενικής στο πρωτεύον, στο δυϊκό αλλάζει μόνο ο 3ος περιορισμός και το δυϊκό γίνεται

$$\max \; 3\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 & \leq & 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \leq & 5 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 & \leq & 10 \\ \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Όμως στην βέλτιστη λύση αυτός δεν ικανοποιείται με ισότητα (και το φράγμα που δίνει μεγαλώνει) άρα η βέλτιστη λύση παραμένει και στα δύο προγράμματα.

3. Αν ο δεύτερος περιορισμός του πρωτεύοντος αλλάξει για λίγο εικάζουμε οτι η βέλτιστη λύση στο δυϊκό δεν αλλάζει και παραμένει η $(\lambda_1, \lambda_2) = (2, 3)$. Το επιβεβαιώνουμε με συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας. Από $\lambda_1 > 0$ έχουμε $x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$ ενώ από $\lambda_2 > 0$ έχουμε $x_2 + x_3 = 1.99$. Επιπλέον, ο τρίτος περιορισμός του δυϊκού δεν ικανοποιείται με ισότητα στην λύση $(2, 3)$ και άρα το $x_3 = 0$. Τελικά η δυϊκή λύση που παίρνουμε (στο πρωτεύον) είναι η $(x_1, x_2, x_3) = (2.01, 1.99, 0)$ που είναι εφικτή και άρα και οι δύο βέλτιστες.

Άσκηση 5

Δίνεται το γραμμικό πρόγραμμα

$$\max \ x_1 + x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_1 - x_3 &\leq 2 \\ x_2 - x_3 &\leq -1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Με τη βοήθεια του δυϊκού δείξτε ότι στη βέλτιστη λύση ο πρώτος περιορισμός ικανοποιείται με ισότητα.
2. Βρείτε μια βασική εφικτή λύση του.
3. Βρείτε τη βέλτιστη λύση.

Λύση: 1. Το δυϊκό πρόβλημα είναι το

$$\min \ 6\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &\geq 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &\geq 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 &\geq 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Αν στο πρωτεύον ο πρώτος περιορισμός δεν ικανοποιείται με ισότητα στην βέλτιστη λύση τότε από συνθήκες σημπληρωματικής χαλαρότητας πρέπει $\lambda_1 = 0$ και ο 3ος περιορισμός του δυϊκού δεν μπορεί να ικανοποιηθεί ποτέ (πρέπει $\lambda_1 \geq 1$), άτοπο.

2. Μια βασική εφικτή λύση του είναι η $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 1)$ καθώς είναι εφικτή και μόνο η πρώτη ανισότητα δεν ικανοποιείται με ισότητα (και άρα έχει θετική μεταβλητή χαλαρότητας). Λόγω του 2 όμως ξέρουμε οτι δεν είναι βέλτιστη αυτή η βασική εφικτή λύση.

3. Παρατηρώ ότι στο δυϊκό η δεύτερη ανισότητα δεν μπορεί να ικανοποιείται με ισότητα (λόγω $\lambda_1 \geq 1$) οπότε, λόγω των συνθηκών συμπληρωματικής χαλαρότητας, στη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος πρέπει $x_2 = 0$. Σε συνδυασμό με το 1ο ερώτημα έχω οτι στη βέλτιστη λύση είναι $x_1 + x_3 = 6$ και άρα η βέλτιστη τιμή στο πρωτεύον είναι 6. Αυτή πετυχαίνεται σε όλα τα σημεία $(x_1, x_2, x_3) \in \{(a, 0, 6 - a) : a \in [1, 5]\}$ και καθένα από αυτά είναι συμπληρωματικό της λύσης $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, 0)$.