Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διαφάνειες Μαθήματος[1]

Χειμώνας 2018

[1] για διορθώσεις: *lianeas@corelab.ntua.gr*

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

1. Γραμμικός Προγραμματισμός
   - Χώρος Λύσεων και Ιδιότητες (Από Δ. Φωτάκη, ΕΜΠ)
   - Δυϊκότητα (Από Δ. Φωτάκη, ΕΜΠ)
   - Συμπληρωματική Χαλαρότητα
   - Ο Αλγόριθμος *Simplex*
   - Το Πρόβλημα της Μεταφοράς
   - Το Πρόβλημα της Ανάθεσης

Γραμμικός Προγραμματισμός

- Ελαχιστοποίηση γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης υπό πεπερασμένο αριθμό γραμμικών περιορισμών (ισότητες ή ανισότητες).
  - **Περιορισμοί**: $(m \times n)$-πίνακας A, m-διάνυσμα b.
  - **Αντικειμενική**: n-διάνυσμα c.
  - **Άγνωστοι**: n-διάνυσμα x.
  - **Τυπική** μορφή (standard form):

$$\begin{array}{rrcl} \text{min} & c^T x & & \\ \text{subject to:} & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Γραμμικός Προγραμματισμός

- Ελαχιστοποίηση γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης υπό πεπερασμένο αριθμό γραμμικών περιορισμών (ισότητες ή ανισότητες).
  - **Περιορισμοί**: $(m \times n)$-πίνακας A, m-διάνυσμα b.
  - **Αντικειμενική**: n-διάνυσμα c.
  - **Άγνωστοι**: n-διάνυσμα x.
  - **Τυπική** μορφή (standard form):

$$
\begin{array}{lrcll}
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & b_i & i = 1 \dots m \\
& x_j & \geq & 0 & j = 1 \dots n
\end{array}
$$

Πρόβλημα Δίαιτας

	Βιτ.A	Βιτ.B	Βιτ. C	Θερμ.
Πίτσα	203	92	100	600
Φρούτα	270	80	512	250
Αυγά	90	84	230	350
Σουβλάκι	500	90	210	500
Απαιτήσεις	2000	300	430	

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{min} & 600x_\pi & + & 250x_\phi & + & 350x_\alpha & + & 500x_\sigma & & \\
\text{s.t.} & 203x_\pi & + & 270x_\phi & + & 90x_\alpha & + & 500x_\sigma & \geq & 2000 \\
 & 92x_\pi & + & 80x_\phi & + & 84x_\alpha & + & 90x_\sigma & \geq & 300 \\
 & 100x_\pi & + & 512x_\phi & + & 230x_\alpha & + & 210x_\sigma & \geq & 430 \\
 & x_\pi \geq 0 & & x_\phi \geq 0 & & x_\alpha \geq 0 & & x_\sigma \geq 0 & &
\end{array}$$

Ορολογία

- Αν x ικανοποιεί $A\,x \geq b$ και $x \geq 0$ είναι αποδεκτή (feasible) λύση.
  - Εφικτή περιοχή: $P = \{x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Γραμμικό Πρόγραμμα (ΓΠ, LP) είναι επιλύσιμο αν έχει αποδεκτή λύση και μη-επιλύσιμο διαφορετικά.
- Βέλτιστη λύση x^* : αποδεκτή λύση με ελάχιστη αντικειμενική τιμή, $c^T x^* = \min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- ΓΠ μη-φραγμένο (κάτω) αν $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists$ εφικτή λύση $x : c^T x \leq \lambda$.
  - *Επιλύσιμο και φραγμένο* (κάτω) : **πεπερασμένο.**
- Ένα ΓΠ μπορεί να είναι μη-επιλύσιμο, μη-φραγμένο, ή πεπερασμένο.

Ισοδύναμες Μορφές

- Τυπική μορφή : $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Κανονική μορφή : $\min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Μεγιστοπ. ↔ Ελαχιστοπ.: $\max c^T x \Leftrightarrow \min -c^T x$
- Ισότητα ↔ Ζευγάρι ανισότητες

$$a_i^T x = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_i^T x & \leq & b_i \\ a_i^T x & \geq & b_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_i^T x & \geq & -b_i \\ a_i^T x & \geq & b_i \end{cases}$$

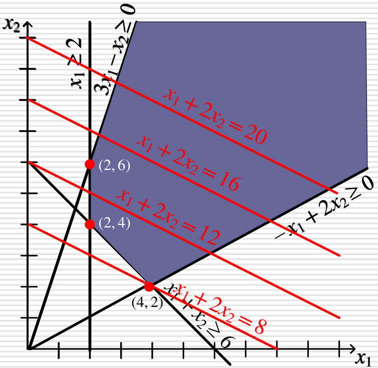
- Ανισότητα ↔ Ισότητα και slack μεταβλητή :

$$a_i^T x \geq b_i \Leftrightarrow a_i^T x - s_i = b_i\,,\;\; s_i \geq 0$$

- Αρνητική μεταβλητή : $x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0$
- Όχι πρόσημο : $x_j \gtrless 0 \Leftrightarrow x_j^+ - x_j^-\,,\;\; x_j^+\,, x_j^- \geq 0$

Παράδειγμα

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\text{min} & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & & & \geq & \cancel{2}\,1 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 6 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



- Εφικτή περιοχή : **πολύεδρο *P*** .
  Φραγμένο : **πολύτοπο *P***.
- Κορυφή : ακραίο σημείο
  (όχι κυρτός συνδυασμός άλλων)
  $\forall y \neq 0,\ x + y \notin P \vee x - y \notin P$
- Φραγμένο πολύεδρο (πεπερασμένο):
  Υπάρχει **κορυφή** που αντιστοιχεί σε **βέλτιστη** λύση !

Κορυφές

- Αν $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ είναι επιλύσιμο και φραγμένο, υπάρχει κορυφή – βέλτιστη λύση.
- Αν $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$, το P έχει τουλάχιστον μία κορυφή.
- $m \times n$ πίνακας A (περιορισμοί) :
  - #(ανεξάρτ.) εξισώσεων m < #μεταβλητών n .
  - βαθμό m (m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες).
- Εφικτή λύση $x \in P$ είναι κορυφή ανν στήλες $\{j \in [n] : x_j > 0\}$ γραμμικά ανεξάρτητες.

Βασικές Εφικτές Λύσεις

- **Βασική (εφικτή) λύση** (basic (feasible) solution):
  - **Βάση** : *m* γραμμικά ανεξάρτ. στήλες του A.
  - Βάση ορίζει **τιμές** για **βασικές** μεταβλητές.
  - **Μη-βασικές** μεταβλητές στο **0**.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 0x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 9 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

- Βασικές λύσεις: $[\frac{9}{2}, \frac{5}{4}, 0, 0]$, $[22, 0, 5, 0]$, $[2, 0, 0, 5]$, $[0, \frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, 0]$, $[0, -1, 0, 9]$, $[0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{11}{2}]$
- Βασικές εφικτές λύσεις $\leftrightarrow$ κορυφές

Βασικές Εφικτές Λύσεις

- x κορυφή – ΒΕΛ του $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ **ανν** υπάρχει $B \subseteq [n],\ |B| = m$,(βάση):
  - $x_N = 0,\ \ N = [n] \setminus B$ (μη-βασικές μεταβλητές).
  - A_B είναι αντιστρέψιμος .
  - $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$ (βασικές μεταβλητές).
- Κάθε ΒΕΛ αποτελεί κορυφή του *P* .
- Υπάρχουν κορυφές που αντιστοιχούν σε πολλές διαφορετικές ΒΕΛ.

Βασικές Εφικτές Λύσεις

- Αν $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$, το P έχει τουλάχιστον μία Βασική Εφικτή Λύση (ΒΕΛ).
- Για κάθε ΒΕΛ x, υπάρχει c_x : x βέλτιστη λύση του $\min\{c_x^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Υπάρχουν $< \binom{n}{m}$ «υποψήφιες» βέλτιστες λύσεις (κορυφές - ΒΕΛ) του $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- **Αλγόριθμος** :
  - Δημιούργησε όλες τις βασικές λύσεις.
  - Επέστρεψε τη βασική εφικτή λύση με μικρότερη αντικειμενική τιμή.

Αλγόριθμος Simplex

- [Dantzig, 1947], καλύτερη πρακτική επιλογή.
- Ξεκίνησε από κορυφή x (βάση B).
- Υπάρχει γειτονική κορυφή x' με μικρότερο κόστος:
  - Ναι : μετακινήσου στη x' και συνέχισε.
  - Όχι : βέλτιστη λύση.
- Πως ελέγχουμε αν ΓΠ επιλύσιμο και βρίσκουμε αρχική κορυφή ;
- Πως καταλαβαίνουμε αν ΓΠ μη-φραγμένο ;
- **Pivoting** : γειτονική κορυφή με μικρότερο κόστος.

Χρόνος Εκτέλεσης Simplex

- Μετακίνηση σε κορυφές με μικρότερο κόστος : τερματισμός με βέλτιστη λύση (αν υπάρχει).
- Παραμονή σε ίδια κορυφή (ή ίδιο κόστος) : αέναη ανακύκλωση !
  - Κανόνες εναλλαγής στηλών (π.χ. [Bland 77]) εγγυώνται τερματισμό .
- Πολύ γρήγορος στην πράξη αλλά εκθετικός (#κορυφών) στη χειρότερη περίπτωση.
- Ανοικτό αν υπάρχει κανόνας εναλλαγής στηλών που οδηγεί σε πολυωνυμικό χρόνο .

Αλγόριθμοι Πολυωνυμικού Χρόνου

- Ελλειψοειδές [Khachian 79] :
  - Δυαδική αναζήτηση: Σταδιακός περιορισμός ενός ελλειψοειδούς που εγγυημένα περιέχει λύση.
  - Πρακτικά μη-εφαρμόσιμος (αργός, αριθμητική αστάθεια).
- Μέθοδοι Εσωτερικού Σημείου [Karmakar 84] :
  - Κίνηση στο εσωτερικό του πολυέδρου (κατάλληλους μετασχηματισμούς).
  - Πρακτικά εφαρμόσιμος, αλλά Simplex!
- Ταχύτερος αλγόριθμος [Ye 91] .

Πιστοποίηση Άνω Φράγματος

- Έχει το ΓΠ εφικτή λύση με κόστος ≤ 2;

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{min} & 2x_2 + x_4 + 5x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\
 & x_1 + x_5 & = & 2 \\
 & x_3 + x_6 & = & 3 \\
 & 3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

- **Ναι**, π.χ. [0, 1, 3, 0, 2, 0, 0] .

Πιστοποίηση Κάτω Φράγματος;

- Έχει το ΓΠ εφικτή λύση με κόστος < 2;
- Έχουν όλες οι εφικτές λύσεις κόστος ≥ 2;

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\
& x_1 + x_5 & = & 2 \\
& x_3 + x_6 & = & 3 \\
& 3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Αν όλες οι εφικτές λύσεις έχουν κόστος ≥ 2, πως θα το πιστοποιήσουμε;

Πιστοποίηση Κάτω Φράγματος

$$\begin{array}{lrcl} \text{min} & 2x_2 + x_4 + 5x_7 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\ & x_1 + x_5 & = & 2 \\ & x_3 + x_6 & = & 3 \\ & 3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & -4 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 2 & = & -x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 \\ & \leq & 2x_2 + x_4 + 5x_7 \end{array}$$

- Το [0, 1, 3, 0, 2, 0, 0] (κόστος 2) είναι **βέλτιστη λύση** (με απόδειξη) !

Υπολογισμός Κάτω Φράγματος

$$\begin{array}{lrcl} \text{min} & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Λύση [1.8, 0, 3] με κόστος 27.6. Καλύτερη;

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 & \geq & 20 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 26 & \leq & 7x_1 + 5x_3 \\ & \leq & 7x_1 + x_2 + 5x_3 \end{array}$$

Υπολογισμός Κάτω Φράγματος

$$\begin{array}{lrcl} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & 10y_1 + 6y_2 & & \\ \text{s.t.} & y_1 + 5y_2 & \leq & 7 \\ & -y_1 + 2y_2 & \leq & 1 \\ & 3y_1 - y_2 & \leq & 5 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Λύση [1.8, 0, 3] με κόστος 27.6. Καλύτερη;

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1(x_1 - x_2 + 3x_3) & \geq & 10y_1 \\ y_2(5x_1 + 2x_2 - x_3) & \geq & 6y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10y_1 + 6y_2 \leq (y_1 + 5y_2)x_1 + (-y_1 + 2y_2)x_2 + (3y_1 - y_2)x_3$$

- **Πρωτεύον** (primal) και **δυϊκό** (dual) ΓΠ.

Υπολογισμός Κάτω Φράγματος

$$\begin{array}{rrcl} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \max & 10y_1 + 6y_2 & & \\ \text{s.t.} & y_1 + 5y_2 & \leq & 7 \\ & -y_1 + 2y_2 & \leq & 1 \\ & 3y_1 - y_2 & \leq & 5 \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Δυϊκό λύση $y = [2, 1]$ ωφέλειας 26 (κάτω φράγμα στο πρωτεύον).
- Πρωτεύον λύση $x = [1.75, 0, 2.75]$ κόστους 26 !
- Ισότητα δεν είναι τυχαία ! **Θεώρημα Δυϊκότητας στο ΓΠ.**

Άλλο Παράδειγμα

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\
 & x_1 + x_5 & = & 2 \\
 & x_3 + x_6 & = & 3 \\
 & 3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 4y_1 + 2y_2 & + & 3y_3 + 6y_4 \\
\text{s.t.} & y_1 + y_2 & \leq & 0 \\
 & y_1 + 3y_4 & \leq & 2 \\
 & y_1 + y_3 + y_4 & \leq & 0 \\
 & y_1 & \leq & 1 \\
 & y_2 & \leq & 0 \\
 & y_3 & \leq & 0 \\
 & y_4 & \leq & 5
\end{array}
$$

- Πρωτεύον λύση [0, 1, 3, 0, 2, 0, 0] κόστους 2.
- Δυϊκό λύση [-1, 0, 0, 1] ωφέλειας 2.

Δυϊκότητα

- Πρωτεύον: $p = \min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Δυϊκό : $d = \max\{b^T y : A^T y \leq c, y \geq 0\}$

  $d = \min\{(-b^T)y : (-A^T)y \geq -c, y \geq 0\}$
- Δυϊκό του δυϊκού :

  $$\max\{(-c^T)z : (-A^T)^T z \leq -b, z \geq 0\}$$

  $$= \min\{c^T z : Az \geq b, z \geq 0\} = p$$
- ... είναι το πρωτεύον!

Ασθενής Δυϊκότητα

- Πρωτεύον: $p = \min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Δυϊκό : $d = \max\{b^T y : A^T y \leq c, y \geq 0\}$
- Ασθενής Δυϊκότητα : αν *x* και *y* εφικτές λύσεις για το πρωτεύον και δυϊκό, $c^T x \geq b^T y$

$$c \geq A^T y \Leftrightarrow c^T \geq (A^T y)^T = y^T A$$

$$c^T x \geq (y^T A)x = y^T (Ax) \geq y^T b = b^T y$$

- Αν πρωτεύον και δυϊκό εφικτά, $p \geq d$

Ισχυρή Δυϊκότητα

- Πρωτεύον: $p = \min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Δυϊκό : $d = \max\{b^T y : A^T y \leq c\}$
- Ισχυρή Δυϊκότητα : αν πρωτεύον βέλτιστη λύση, δυϊκό βέλτιστη λύση και $p = d$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_B^* & = & A_B^{-1} b \\ x_N^* & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcccl} c^T x^* & = & c_B^T x_B^* & = & c_B^T (A_B^{-1} b) \\ & = & (c_B^T A_B^{-1}) b & = & y^T b \end{array}$$

- $y = (A_B^{-1})^T c_B$ εφικτή και βέλτιστη λύση για δυϊκό.

$$0 \leq c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = c_N^T - y^T A_N \Rightarrow A_N^T y \leq c_N$$

- Βέλτιστη για δυϊκό εύκολα από ταμπλό Simplex.

Συνέπειες

- Αν πρωτεύον και δυϊκό επιλύσιμα, βέλτιστες λύσεις με ίδια τιμή.
- Αν πρωτεύον μη-φραγμένο, δυϊκό μη-επιλύσιμο.
- Αν δυϊκό μη-φραγμένο, πρωτεύον μη-επιλύσιμο.
- Πρωτεύον και δυϊκό μη-επιλύσιμα.

Συνέπειες

	Βέλτιστη	Μη-φραγμ	Μη-επιλυσ
Βέλτιστη	✓	✗	✗
Μη-φραγμ	✗	✗	✓
Μη-επιλυσ	✗	✓	✓

Κατασκευή Δυϊκού

- min ↔ max
- Ισότητα ↔ Μεταβλητή μη-περιορισμένο πρόσημο
- Ανισότητα ↔ Μεταβλητή μη-αρνητική

$$\begin{array}{lll}
\min cx & & \max by \\
A_i x = b_i & i \in M_e & y_i \gtrless 0 \\
A_i x \geq b_i & i \in M_i & y_i \geq 0 \\
x_j \geq 0 & j \in N_r & A^j y \leq c_j \\
x_j \gtrless 0 & j \in N_u & A^j y = c_j
\end{array}$$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα

Έστω $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ εφικτές λύσεις ενός πρωτεύοντος και του δυϊκού του:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad\qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i$$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i & \leq & b_1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i & \leq & b_2 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i & \leq & b_m \\ x_1, \ldots, x_n & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \lambda_i & \geq & c_1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2} \lambda_i & \geq & c_2 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in} \lambda_i & \geq & c_n \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m & \geq & 0 \end{array}$$

x και λ κατ' αντιστοιχία βέλτιστες

$$\Updownarrow$$

$\forall j \in [1, \ldots, m]$ και $\forall i \in [1, \ldots, n]$:

$(\lambda_j = 0$ ή $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = b_j)$ και $(x_i = 0$ ή $\sum_{k=1}^{m} a_{ki} \lambda_i = c_i)$

Συμπληρωματική Χαλαρότητα (εναλλακτικά)

Έστω $(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$ και $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ εφικτές λύσεις ενός πρωτεύοντος και του δυϊκού του:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad\qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i$$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i + z_1 & = & b_1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i + z_2 & = & b_2 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i + z_m & = & b_m \\ x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \lambda_i - \nu_1 & = & c_1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2} \lambda_i - \nu_2 & = & c_2 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in} \lambda_i - \nu_n & = & c_n \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \nu_1, \ldots, \nu_n & \geq & 0 \end{array}$$

x και λ κατ' αντιστοιχία βέλτιστες

$\Updownarrow$

$\forall j \in [1, \ldots, m]$ και $\forall i \in [1, \ldots, n]$:

$(\lambda_j = 0$ ή $z_j = 0)$ και $(x_i = 0$ ή $\nu_i = 0)$

Complementary Slackness

- Εφικτές λύσεις x (πρωτεύον) και y (δυϊκό) είναι βέλτιστες ανν
  - Συνθήκες πρωτεύοντος:
    $\forall j \in [m] \; x_j(c_j - A^j y) = 0 \;\; (x_j \neq 0 \Rightarrow A^j y = c_j)$
  - Συνθήκες δυϊκού:
    $\forall i \in [n] \; y_i(A_i x - b_i) = 0 \;\; (y_i \neq 0 \Rightarrow A_i x = b_i)$

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= c^T x - y^T A x + y^T A x - y^T b \\ &= x^T(c - A^T y) + y^T(Ax - b) \geq 0 \end{aligned}$$

$$c^T x = b^T y \Leftrightarrow x^T(c - A^T y) = 0 \wedge y^T(Ax - b) = 0$$

Παράδειγμα 1

Έστω το πρωτεύον-δυϊκό ζεύγος:

$$\begin{array}{rcl} \max & x_1 + x_2 & \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \min & 6\lambda_1 + 3\lambda_2 & \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \geq & 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 & \geq & 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ψάχνουμε τη συμπληρωματική λύση της λύσης $(x_1, x_2) = (4, 1)$

Από συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας:

$$x_1 > 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$
$$x_2 > 0 \Rightarrow 2\lambda_1 - \lambda_2 = 1$$

με λύση το ζεύγος:

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

Παράδειγμα 1

Έστω το πρωτεύον-δυϊκό ζεύγος:

$$\begin{array}{rcl} \max & x_1 + x_2 & \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \min & 6\lambda_1 + 3\lambda_2 & \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \geq & 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 & \geq & 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ψάχνουμε τη συμπληρωματική λύση της λύσης $(x_1, x_2) = (4, 1)$

Από συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας:

$$x_1 > 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$
$$x_2 > 0 \Rightarrow 2\lambda_1 - \lambda_2 = 1$$

με λύση το ζεύγος:

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

Παράδειγμα 2

Έστω το πρόγραμμα:

$$\max \quad 2x_1 + x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &\leq 1 \\ x_2 - 2x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Είναι η λύση $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$ βέλτιστη;

Παράδειγμα 2

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 &\leq 1 \\ x_2 - 2x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min \quad & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 &\geq 2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &\geq 1 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 &\geq -1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ψάχνουμε τη συμπληρωματική λύση της λύσης $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$

Αν βέλτιστη, τότε από συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας:

$$\begin{aligned} x_1 > 0 &\Rightarrow \lambda_1 + 2\lambda_3 = 2 \\ x_2 > 0 &\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 < 2 &\Rightarrow \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

με λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 1)$ που είναι εφικτή και δίνει

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$$

Παράδειγμα 2

$$\begin{array}{rcl} \max & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 & \leq & 1 \\ x_2 - 2x_3 & \leq & 2 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \min & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 & \geq & 2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & \geq & 1 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 & \geq & -1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Ψάχνουμε τη συμπληρωματική λύση της λύσης $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$

Αν βέλτιστη, τότε από συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας:

$$x_1 > 0 \Rightarrow \lambda_1 + 2\lambda_3 = 2$$
$$x_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 1$$
$$x_2 - 2x_3 < 2 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

με λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 1)$ που είναι εφικτή και δίνει

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$$

Παράδειγμα 3

Πίνακας παραγωγής:

	Βανίλια	Σοκολάτα	Κεράσι	Τιμή
Choco	25%	75%	-	10000
Cocktail	25%	25%	50%	5000
Cherry	25%	-	75%	15000
Διαθεσιμότητα	5	3	8	

Ο παραγωγός ξεπουλάει όλα του τα προϊόντα και μεγιστοποιεί το κέρδος του.

Στο βέλτιστο πλάνο καταναλώνεται όλη η σοκολάτα και το κεράσι και δεν παράγεται καθόλου Cocktail;

Παράδειγμα 3

	Βανίλια	Σοκολάτα	Κεράσι	Τιμή
Choco	25%	75%	-	10000
Cocktail	25%	25%	50%	5000
Cherry	25%	-	75%	15000
Διαθεσιμότητα	5	3	8	15000

- x_1 παραγωγή Choco, x_2 παραγωγή Cocktail, x_3 παραγωγή Cherry
- Ο παραγωγός λύνει το:

$$\max \quad 10000x_1 + 5000x_2 + 15000x_3$$

$$\begin{aligned} x_1/4 + x_2/4 + x_3/4 &\leq 5 \\ 3x_1/4 + x_2/4 &\leq 3 \\ x_2/2 + 3x_3/4 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

	Βανίλια	Σοκολάτα	Κεράσι	Τιμή
Choco	25%	75%	-	10000
Cocktail	25%	25%	50%	5000
Cherry	25%	-	75%	15000
Διαθεσιμότητα	5	3	8	15000

- x_1 παραγωγή Choco, x_2 παραγωγή Cocktail, x_3 παραγωγή Cherry
- Ο παραγωγός λύνει το:

$$\max \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 20 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 12 \\ 2x_2 + 3x_3 &\leq 32 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

Ο παραγωγός λύνει το:

$$
\begin{array}{rcl}
\max & & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\
x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 20 \\
3x_1 + x_2 & \leq & 12 \\
2x_2 + 3x_3 & \leq & 32 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\min & & 20\lambda_1 + 12\lambda_2 + 32\lambda_3 \\
\lambda_1 + 3\lambda_2 & \geq & 2 \\
\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & \geq & 1 \\
\lambda_1 + 3\lambda_3 & \geq & 3 \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Καταναλώνεται η σοκολάτα ($3x_1 + x_2 = 12$) και το κεράσι ($2x_2 + 3x_3 = 32$) και δεν παράγεται Cocktail ($x_2 = 0$)!

$$\downarrow$$

Υποψήφια βέλτιστη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (4, 0, 32/3)$

Είναι βέλτιστη;

Παράδειγμα 3

Ο παραγωγός λύνει το:

$$\begin{array}{rcl} \max & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 20 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ 2x_2 + 3x_3 & \leq & 32 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \min & 20\lambda_1 + 12\lambda_2 + 32\lambda_3 & \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & \geq & 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & \geq & 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 & \geq & 3 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Καταναλώνεται η σοκολάτα $(3x_1 + x_2 = 12)$ και το κεράσι $(2x_2 + 3x_3 = 32)$ και δεν παράγεται Cocktail $(x_2 = 0)$!

$$\downarrow$$

Υποψήφια βέλτιστη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (4, 0, 32/3)$

Είναι βέλτιστη;

Παράδειγμα 3

Ο παραγωγός λύνει το:

$$\begin{array}{rcl} \max & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 20 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ 2x_2 + 3x_3 & \leq & 32 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \min & 20\lambda_1 + 12\lambda_2 + 32\lambda_3 & \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & \geq & 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & \geq & 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 & \geq & 3 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Έστω η $(x_1, x_2, x_3) = (4, 0, 32/3)$ βέλτιστη:

$$\begin{array}{c} x_1 > 0 \Rightarrow \lambda_1 + 3\lambda_2 = 2 \\ x_3 > 0 \Rightarrow \lambda_1 + 3\lambda_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 < 20 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \end{array}$$

Που έχει σαν λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 2/3, 1)$ και δίνει:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 40 = 20\lambda_1 + 12\lambda_2 + 32\lambda_3$$

Ανάλυση Ευαισθησίας

Έστω το ακόλουθο ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού.

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad\qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i$$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i & \leq & b_1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i & \leq & b_2 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i & \leq & b_m \\ x_1, \ldots, x_n & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \lambda_i & \geq & c_1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2} \lambda_i & \geq & c_2 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in} \lambda_i & \geq & c_n \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m & \geq & 0 \end{array}$$

Αν 'πειράξουμε' μια συνθήκη του πρωτεύοντος κατά ϵ αλλάζει μόνο η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού (όχι ο χώρος λύσεων του).

Ανάλυση Ευαισθησίας

Έστω το ακόλουθο ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού.

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad\qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i\lambda_i + \epsilon\lambda_1$$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i & \le & b_1 + \epsilon \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i & \le & b_2 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i & \le & b_m \\ x_1,\ldots,x_n & \ge & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\lambda_i & \ge & c_1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\lambda_i & \ge & c_2 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in}\lambda_i & \ge & c_n \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_m & \ge & 0 \end{array}$$

Αν ‘πειράξουμε’ μια συνθήκη του πρωτεύοντος κατά ϵ αλλάζει μόνο η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού (όχι ο χώρος λύσεων του).

Η κοινή βέλτιστη τιμή (αν υπάρχει) αλλάζει το πολύ κατά $\epsilon\lambda_1^*$.

Ανάλυση Ευαισθησίας

Έστω το ακόλουθο ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού.

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad\qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i + \epsilon\lambda_1$$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i & \leq & b_1 + \epsilon \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i & \leq & b_2 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i & \leq & b_m \\ x_1, \ldots, x_n & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \lambda_i & \geq & c_1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2} \lambda_i & \geq & c_2 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in} \lambda_i & \geq & c_n \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m & \geq & 0 \end{array}$$

Αν ‘πειράξουμε’ μια συνθήκη του πρωτεύοντος κατά ϵ αλλάζει μόνο η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού (όχι ο χώρος λύσεων του).

Η κοινή βέλτιστη τιμή (αν υπάρχει) αλλάζει το πολύ κατά $\epsilon\lambda_1^*$.

Ανάλυση Ευαισθησίας

Έστω αλλάξαμε την j-στή ανισότητα (και εφικτότητα διατηρείται):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j + \epsilon \qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i + \epsilon \lambda_j$$

Έστω $(x_1, \ldots, x_n)$ και $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ συμπληρωματικές λύσεις αρχικού.

Αν $\epsilon > 0$ και αρχικά η j-στή ανισότητα ήταν αυστηρή (δεν ήταν *tight*)

$$\downarrow$$

Το ζεύγος λύσεων παραμένει βέλτιστο!

Αφού $\lambda_j = 0$ και για κάθε $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)$ είναι:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i + \epsilon \lambda_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda'_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda'_i + \epsilon \lambda'_j$$

Ανάλυση Ευαισθησίας

Έστω αλλάξαμε την j-στή ανισότητα (και εφικτότητα διατηρείται):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j + \epsilon \qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i + \epsilon \lambda_j$$

Έστω $(x_1, \ldots, x_n)$ και $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ συμπληρωματικές λύσεις αρχικού.

Αν $\epsilon > 0$ και αρχικά η j-στή ανισότητα ήταν αυστηρή (δεν ήταν *tight*)

$$\downarrow$$

Το ζεύγος λύσεων παραμένει βέλτιστο!

Αφού $\lambda_j = 0$ και για κάθε $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)$ είναι:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i + \epsilon \lambda_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda'_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda'_i + \epsilon \lambda'_j$$

Ανάλυση Ευαισθησίας

Έστω αλλάξαμε την j-στή ανισότητα (και εφικτότητα διατηρείται):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j + \epsilon \qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i + \epsilon \lambda_j$$

Έστω $(x_1, \ldots, x_n)$ και $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ συμπληρωματικές λύσεις αρχικού.

Αν $\epsilon < 0$ ή η j-στή ανισότητα ήταν ισότητα

$$\downarrow$$

Η $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ ίσως παραμένει βέλτιστη!

Έλεγχος χρησιμοποιώντας συμπληρωματική χαλαρότητα.

Ανάλυση Ευαισθησίας

Έστω αλλάξαμε την j-στή ανισότητα (και εφικτότητα διατηρείται):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \leq b_j + \epsilon \qquad\qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i\lambda_i + \epsilon\lambda_j$$

Έστω $(x_1, \ldots, x_n)$ και $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ συμπληρωματικές λύσεις αρχικού.

Αν $\epsilon < 0$ ή η j-στή ανισότητα ήταν ισότητα

$$\downarrow$$

Η $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ ίσως παραμένει βέλτιστη!

Έλεγχος χρησιμοποιώντας συμπληρωματική χαλαρότητα.

Έστω αλλάξαμε την j-στή ανισότητα (και εφικτότητα διατηρείται):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j + \epsilon \qquad \min \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i + \epsilon \lambda_j$$

Έστω $(x_1, \ldots, x_n)$ και $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ συμπληρωματικές λύσεις αρχικού.

Αν $\epsilon > 0$ και αρχικά η j-στή ανισότητα ήταν ισότητα
ή
αν $\epsilon < 0$

$\downarrow$

Η $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ ίσως παραμένει βέλτιστη!

Γενικά, για ϵ συγκριτικά μικρό περιμένουμε βελτιστότητα.

Παράδειγμα

Βελτιστες λύσεις $(x_1, x_2, x_3) = (4, 0, 32/3)$ και $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 2/3, 1)$ στο

$$\begin{array}{rcl} \max & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 20 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ 2x_2 + 3x_3 & \leq & 32 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \min & 20\lambda_1 + 12\lambda_2 + 32\lambda_3 & \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & \geq & 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & \geq & 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 & \geq & 3 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Πειράζοντας τον πρώτο περιορισμό οι λύσεις παραμένουν:

$$\begin{array}{rcl} \max & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 25 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ 2x_2 + 3x_3 & \leq & 32 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \min & 25\lambda_1 + 12\lambda_2 + 32\lambda_3 & \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & \geq & 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & \geq & 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 & \geq & 3 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Παράδειγμα 2

Βελτιστες λύσεις $(x_1, x_2, x_3) = (1.75, 0, 2.75)$ και $(\lambda_1, \lambda_2) = (2, 1)$ στο

$$\begin{array}{rcl} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & \\ x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \max & 10\lambda_1 + 6\lambda_2 & \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 & \leq & 7 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 & \leq & 1 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 & \leq & 5 \\ \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Πειράζοντας και τους δύο περιορισμούς:

$$\begin{array}{rcl} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & \\ x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10.5 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6.5 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \max & 10.5\lambda_1 + 6.5\lambda_2 & \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 & \leq & 7 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 & \leq & 1 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 & \leq & 5 \\ \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Αν $(\lambda_1', \lambda_2') = (2, 1)$ βέλτιστη, από συμπληρωματική χαλαρότητα $\rightarrow$
$(x_1', x_2', x_3') = (1.875, 0, 2.875)$ και $7x_1' + x_2' + 5x_3' = 27.5 = 10.5\lambda_1' + 6.5\lambda_2'$

Παράδειγμα 2

Βελτιστες λύσεις $(x_1, x_2, x_3) = (1.75, 0, 2.75)$ και $(\lambda_1, \lambda_2) = (2, 1)$ στο

$$\begin{array}{lrcl} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & & \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & 10\lambda_1 + 6\lambda_2 & & \\ & \lambda_1 + 5\lambda_2 & \leq & 7 \\ & -\lambda_1 + 2\lambda_2 & \leq & 1 \\ & 3\lambda_1 - \lambda_2 & \leq & 5 \\ & \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Πειράζοντας και τους δύο περιορισμούς:

$$\begin{array}{lrcl} \min & 7x_1 + x_2 + 5x_3 & & \\ & x_1 - x_2 + 3x_3 & \geq & 10.5 \\ & 5x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 6.5 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & 10.5\lambda_1 + 6.5\lambda_2 & & \\ & \lambda_1 + 5\lambda_2 & \leq & 7 \\ & -\lambda_1 + 2\lambda_2 & \leq & 1 \\ & 3\lambda_1 - \lambda_2 & \leq & 5 \\ & \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Αν $(\lambda_1', \lambda_2') = (2, 1)$ βέλτιστη, από συμπληρωματική χαλαρότητα $\rightarrow$
$(x_1', x_2', x_3') = (1.875, 0, 2.875)$ και $7x_1' + x_2' + 5x_3' = 27.5 = 10.5\lambda_1' + 6.5\lambda_2'$

Πρακτικά η καλύτερη επιλογή. Γενική περιγραφή:

- Ξεκίνησε από κορυφή x (μια βασική λύση B)
- Υπάρχει γειτονική κορυφή x' με μικρότερο κόστος;
  - Ναι: μετακινήσου σε γειτονική κορυφή x' με μικρότερο κόστος και συνέχισε.
  - Όχι: βέλτιστη λύση.

Σημαντικά σημεία:

- Πως ελέγχουμε αν ΓΠ επιλύσιμο και βρίσκουμε αρχική κορυφή;
- Πως καταλαβαίνουμε αν ΓΠ μη-φραγμένο;
- Πώς διαλέγουμε το x'?

Ταμπλώ *Simplex*

Αν n μεταβλητές και m περιορισμοί το ταμπλώ *Simplex*

- έχει $n+1$ στήλες και $m+1$ γραμμές
- Στην 1η γραμμή γράφουμε τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης + μια σταθερά (αρχικά 0)
- Για τις υπόλοιπες, στην i-στη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές των περιορισμών (με $b_i > 0$)

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i & = & b_1 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i & = & b_m \\ x_1, \ldots, x_n & \geq & 0 \end{array}$$

$\rightarrow$

	x_1	$\ldots$	x_n	ct
Αντικ. Συν.	c_1	$\ldots$	c_n	0
1ος περ.	a_{11}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m-στός περ.	a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}	b_m

Βήματα

Έστω ξέρουμε μια βασική λύση B (με m μεταβλητές)

1. Με γραμμοπράξεις μετάτρεψε τον υποπίνακα που αντιστοιχεί στις μεταβλητές της B σε μοναδιαίο
2. Με γραμμοπράξεις μηδένισε τις θέσεις της 1ης γραμμής (αυτή της αντικ. συν.) που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές
3. Αν τιμές 1ης γραμμής μη θετικές σταμάτα: Η βάση είναι βέλτιστη (Η τιμή εμφανίζεται με '-' πάνω δεξιά)
4. Αν όχι, διάλεξε στήλη k με θετική τιμή στην πιο πάνω θέση της
   - Αν υπόλοιπες τιμές στήλης αρνητικές, τότε μη φραγμένο
   - Αλλιώς διάλεξε τη γραμμή ℓ, όπου $\ell = argmin_i\{\frac{b'_k}{a'_{ik}} | a'_{ik} > 0\}$
5. Βάλε την μεταβλητή x_k στην B βγάζοντας την μεταβλητή που είχε μονάδα στην ℓ-στή γραμμή της στήλης της και πήγαινε στο βήμα 1

Παράδειγμα 1

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_3 &\leq 3 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_3 + z_1 &= 3 \\ x_2 + x_3 + z_2 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
1	-1	2	0	0	0
2	0	1	1	0	3
0	1	1	0	1	2

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
2	-1	0	1	-1	1
0	1	1	0	1	2

(Για τη γραμμή της 'θετικής στήλης': $\ell = argmin_i\{\frac{b'_k}{a'_{ik}} | a'_{ik} > 0\}$)

Παράδειγμα 1

$$\begin{array}{rcl} \max \quad x_1 - x_2 + 2x_3 & & \\ 2x_1 + x_3 & \leq & 3 \\ x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \max \quad x_1 - x_2 + 2x_3 & & \\ 2x_1 + x_3 + z_1 & = & 3 \\ x_2 + x_3 + z_2 & = & 2 \\ x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 & \geq & 0 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
1	−1	2	0	0	0
2	0	1	1	0	3
0	1	1	0	1	2

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
1	−3	0	0	−2	−4
2	−1	0	1	−1	1
0	1	1	0	1	2

(Για τη γραμμή της ‘θετικής στήλης’: $\ell = argmin_i\{\frac{b'_k}{a'_{ik}} | a'_{ik} > 0\}$)

Παράδειγμα 1

$$\begin{array}{rcl} \max & x_1 - x_2 + 2x_3 & \\ 2x_1 + x_3 & \leq & 3 \\ x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{rcl} \max & x_1 - x_2 + 2x_3 & \\ 2x_1 + x_3 + z_1 & = & 3 \\ x_2 + x_3 + z_2 & = & 2 \\ x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 & \geq & 0 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
1	-3	0	0	-2	-4
2	-1	0	1	-1	1
0	1	1	0	1	2

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
1	$-1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
0	1	1	0	1	2

(Για τη γραμμή της ‘θετικής στήλης’: $\ell = argmin_i\{\frac{b'_k}{a'_{ik}} | a'_{ik} > 0\}$)

Παράδειγμα 1

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_3 & \leq 3 \\ x_2 + x_3 & \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_3 + z_1 & = 3 \\ x_2 + x_3 + z_2 & = 2 \\ x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
1	−3	0	0	−2	−4
2	−1	0	1	−1	1
0	1	1	0	1	2

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
0	−5/2	0	−1/2	−3/2	−9/2
1	−1/2	0	1/2	−1/2	1/2
0	1	1	0	1	2

(Για τη γραμμή της 'θετικής στήλης': $\ell = argmin_i\{\frac{b'_k}{a'_{ik}} | a'_{ik} > 0\}$)

Παράδειγμα 1

$$\begin{array}{rcl} \max & & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_3 & \leq & 3 \\ x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \max & & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_3 + z_1 & = & 3 \\ x_2 + x_3 + z_2 & = & 2 \\ x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 & \geq & 0 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
1	-3	0	0	-2	-4
2	-1	0	1	-1	1
0	1	1	0	1	2

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
0	$-5/2$	0	$-1/2$	$-3/2$	$-9/2$
1	$-1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
0	1	1	0	1	2

Μόνο ‘μη θετικές στήλες’

$$\downarrow$$

$(x_1, x_2, x_3) = (1/2, 0, 2)$ βέλτιστη λύση με τιμή $9/2$

Λίγη Διαίσθηση

Με τις γραμμοπράξεις μεταξύ περιορισμών ‘παίζουμε’ με το γραμμικό σύστημα:

- Λύνουμε με παραμέτρους τις μη βασικές μεταβλητές.
- Οι παράμετροι αλλάζουν από βήμα σε βήμα και στο τέλος τις μηδενίζουμε.

Για τις γραμμοπράξεις με τη γραμμή αντικειμενικής συνάρτησης:

- Βλέπω την πάνω γραμμή σαν περιορισμό (z τιμή της αντικειμενικής)

$$\begin{array}{rl} \text{Αρχικά:} & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - z = 0 \\ \text{Στα επόμενα:} & c'_1x_1 + c'_2x_2 + \ldots + c'_nx_n - z = A \end{array}$$

- Μηδενίζουμε τους συντελεστές των βασικών μεταβλητών ‘περνώντας’ την συνεισφορά τους στην A (σταθερά πάνω δεξιά)

Γιατί ‘θετική στήλη’ και $\ell = argmin_i\{\frac{b'_k}{a'_{ik}} | a'_{ik} > 0\}$;

- ‘Θετική στήλη’ δηλώνει δυνατότητα συνεισφοράς στην σταθερά αντικειμενικής
- $\ell = argmin_i\{\frac{b'_k}{a'_{ik}} | a'_{ik} > 0\}$ γιατί θέλουμε οι σταθερές των (πειραγμένων) περιορισμών να είναι μη αρνητικοί και να έχουμε πάντα βασική εφικτή λύση

Λίγη Διαίσθηση

Με τις γραμμοπράξεις μεταξύ περιορισμών 'παίζουμε' με το γραμμικό σύστημα:

- Λύνουμε με παραμέτρους τις μη βασικές μεταβλητές.
- Οι παράμετροι αλλάζουν από βήμα σε βήμα και στο τέλος τις μηδενίζουμε.

Για τις γραμμοπράξεις με τη γραμμή αντικειμενικής συνάρτησης:

- Βλέπω την πάνω γραμμή σαν περιορισμό (z τιμή της αντικειμενικής)

$$\begin{array}{rl} \text{Αρχικά:} & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - z = 0 \\ \text{Στα επόμενα:} & c_1'x_1 + c_2'x_2 + \ldots + c_n'x_n - z = A \end{array}$$

- Μηδενίζουμε τους συντελεστές των βασικών μεταβλητών 'περνώντας' την συνεισφορά τους στην A (σταθερά πάνω δεξιά)

Γιατί 'θετική στήλη' και $\ell = argmin_i\{\frac{b_k'}{a_{ik}'}|a_{ik}' > 0\}$;

- 'Θετική στήλη' δηλώνει δυνατότητα συνεισφοράς στην σταθερά αντικειμενικής
- $\ell = argmin_i\{\frac{b_k'}{a_{ik}'}|a_{ik}' > 0\}$ γιατί θέλουμε οι σταθερές των (πειραγμένων) περιορισμών να είναι μη αρνητικοί και να έχουμε πάντα βασική εφικτή λύση

Λίγη Διαίσθηση

Με τις γραμμοπράξεις μεταξύ περιορισμών 'παίζουμε' με το γραμμικό σύστημα:

- Λύνουμε με παραμέτρους τις μη βασικές μεταβλητές.
- Οι παράμετροι αλλάζουν από βήμα σε βήμα και στο τέλος τις μηδενίζουμε.

Για τις γραμμοπράξεις με τη γραμμή αντικειμενικής συνάρτησης:

- Βλέπω την πάνω γραμμή σαν περιορισμό (z τιμή της αντικειμενικής)

$$\begin{aligned} \text{Αρχικά:} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - z = 0 \\ \text{Στα επόμενα:} \quad & c_1'x_1 + c_2'x_2 + \ldots + c_n'x_n - z = A \end{aligned}$$

- Μηδενίζουμε τους συντελεστές των βασικών μεταβλητών 'περνώντας' την συνεισφορά τους στην A (σταθερά πάνω δεξιά)

Γιατί 'θετική στήλη' και $\ell = argmin_i\{\frac{b_k'}{a_{ik}'}|a_{ik}' > 0\}$;

- 'Θετική στήλη' δηλώνει δυνατότητα συνεισφοράς στην σταθερά αντικειμενικής
- $\ell = argmin_i\{\frac{b_k'}{a_{ik}'}|a_{ik}' > 0\}$ γιατί θέλουμε οι σταθερές των (πειραγμένων) περιορισμών να είναι μη αρνητικοί και να έχουμε πάντα βασική εφικτή λύση

Παράδειγμα 2

$$
\begin{array}{rcl}
\max & -2x_2 - x_4 - 5x_7 & \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\
x_1 + x_5 & = & 2 \\
x_3 + x_6 & = & 3 \\
3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ct
0	-2	0	-1	0	0	-5	0
1	1	1	1	0	0	0	4
1	0	0	0	1	0	0	2
0	0	1	0	0	1	0	3
0	3	1	0	0	0	1	6

Παράδειγμα 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ct
0	-2	0	-1	0	0	-5	0
1	1	1	1	0	0	0	4
1	0	0	0	1	0	0	2
0	0	1	0	0	1	0	3
0	3	1	0	0	0	1	6

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ct
1	14	6	0	0	0	0	34
1	1	1	1	0	0	0	4
1	0	0	0	1	0	0	2
0	0	1	0	0	1	0	3
0	3	1	0	0	0	1	6

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ct
1	14	0	0	0	-6	0	16
1	1	0	1	0	-1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	2
0	0	1	0	0	1	0	3
0	3	0	0	0	-1	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ct
0	13	0	-1	0	-5	0	15
1	1	0	1	0	-1	0	1
0	-1	0	-1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	3
0	3	0	0	0	-1	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ct
0	0	0	-1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{13}{3}$	2
1	0	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
0	0	0	-1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
0	0	1	0	0	1	0	3
0	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 1, 3, 0, 2, 0, 0)$$

βέλτιστη λύση με τιμή -2

Αρχική κορυφή

Πως ελέγχουμε αν ΓΠ έχει εφικτή περιοχή και βρίσκουμε αρχική κορυφή; $(\forall i, b_i \geq 0)$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i & = & b_1 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i & = & b_m \\ x_1,\ldots,x_n & \geq & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rcl} & \min \sum_{i=1}^m k_i & \\ \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i + k_1 & = & b_1 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i + k_m & = & b_m \\ x_1,\ldots,x_n,k_1,\ldots,k_m & \geq & 0 \end{array}$$

Λόγω $b_i \geq 0$ το νέο γραμμικό πρόγραμμα έχει πάντα λύση

- Αν $(k_1,\ldots,k_m) = (0,\ldots,0)$ δεν περιέχεται στη βέλτιστη λύση τότε κενή η εφικτή περιοχή του αρχικού
- Αν $(k_1,\ldots,k_m) = (0,\ldots,0)$ περιέχεται στη βέλτιστη λύση τότε το $(x_1,\ldots,x_n)$ της βέλτιστης λύσης ικανοποιεί τους περιορισμούς και μάλιστα είναι βασική εφικτή λύση!

Μη Φραγμένο Πολύτοπο

Πως ελέγχουμε ΓΠ μη φραγμένο;

Στήλη μεταβλητής με μόνο το πιο πάνω στοιχείο θετικό: $z \to \infty$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ct
0	0	7	2	0	0	−1	−4
0	1	1	−1	0	0	0	3
1	0	0	−3	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	3
0	0	0	−1	1	0	0	1

Γιατί κρατάμε βασικές και δεν μηδενίζουμε την μεταβλητή της στήλης.

$$7x_3 + 2x_4 - x_7 - z = -4 \to z = 4 + 2x_4$$

$$x_2 = 3 + x_4,\ x_1 = 0 + 3x_4,\ x_6 = 3 + 0x_4,\ x_5 = 1 + x_4$$

Ποιές μεταβλητές αλλάζουμε στη βάση;

- Μπορεί να έχουμε κύκλους (επαναλαμβανόμενες βάσεις)
- Υπάρχουν κανόνες που εγγυώνται τερματισμό (Bland 's rule)
- Ανοιχτό αν υπάρχει τρόπος που να εγγυάται πολυωνυμικό χρόνο.

Παράδειγμα κύκλου:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
3/4	-20	1/2	-6	0	0	0	-3
$\boxed{1/4}$	-8	-1	9	1	0	0	0
1/2	-12	- 1/2	3	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
0	0	2	-18	-1	-1	0	-3
1	0	$\boxed{8}$	-84	-12	8	0	0
0	1	3/8	-3 3/4	- 1/2	1/4	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
0	4	3 1/2	-33	-3	0	0	-3
1	-32	-4	36	4	0	0	0
0	$\boxed{4}$	1 1/2	-15	-2	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
- 1/4	0	0	3	2	-3	0	-3
1/8	0	1	-10 1/2	-1 1/2	1	0	0
- 3/64	1	0	$\boxed{3/16}$	1/16	- 1/8	0	0
- 1/8	0	0	10 1/2	1 1/2	-1	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
1 3/4	-44	- 1/2	0	0	2	0	-3
-1 1/4	28	1/2	0	1	-3	0	0
1/6	-4	- 1/6	1	0	$\boxed{1/3}$	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
1/2	-16	0	0	1	-1	0	-3
-2 1/2	56	1	0	$\boxed{2}$	-6	0	0
- 1/4	5 1/3	0	1	1/3	- 2/3	0	0
2 1/2	-56	0	0	-2	6	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
3/4	-20	1/2	-6	0	0	0	-3
1/4	-8	-1	9	1	0	0	0
1/2	-12	- 1/2	3	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Εκφυλισμός

Αν βασική μεταβλητή έχει τιμή 0 τότε έχουμε εκφυλισμένη λύση

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ct
0	0	0	1	0	-3	-2	2
1	0	0	1	0	1	-4	0
0	0	0	-1	1	2	2	2
0	0	1	0	0	1	0	3
0	1	0	0	0	-4	$\frac{1}{3}$	1

- Αιτία ‘δημιουργίας’ κύκλων στον *Simplex*
- Γενικά έχουμε σύνολο συμπληρωματικών λύσεων

Εκφυλισμός και Δυϊκό

Εκφυλισμός στο πρωτεύον και σύνολο λύσεων στο δυϊκό:

$$\begin{array}{rcl} \max\ x_1 + x_2 + x_3 & & \\ x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \min\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & & \\ \lambda_1 + \lambda_3 & \geq & 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & \geq & 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & \geq & 1 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Εκφυλισμένη βέλτιστη λύση στο πρωτεύον: $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$

$$(\text{Αντιστοιχεί στην } (x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 1, 1, 0, 0))$$

Συμπληρωματική χαλαρότητα:

$$\begin{array}{rcl} x_3 > 0 & \rightarrow & \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ x_1 + x_2 < 1 & \rightarrow & \lambda_1 = 0 \end{array}$$

Συμπληρωματικές λύσεις: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, a, 1 - a),\ \forall a \in [0, 1]$

Εκφυλισμός στο πρωτεύον και σημείο στο δυϊκό:

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\max\ x_1 + x_2} \\ x_1 & \leq & 1 \\ x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\min\ \lambda_1 + \lambda_2} \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \geq & 1 \\ \lambda_2 & \geq & 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Λύσεις:

- Πρωτεύον, εκφυλισμένη λύση $(x_1, x_2) = (1, 0)$ $\left(z_1 = z_2 = 0\right)$
- Δυϊκό, μοναδική λύση $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 1)$

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i + z_1 &= b_1 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i + z_m &= b_m \\ x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \lambda_i - \nu_1 &= c_1 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{in} \lambda_i - \nu_n &= c_n \\ \lambda_1, \dots, \lambda_m, \nu_1, \dots, \nu_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Αν σε ενδιάμεσο βήμα του *Simplex*

x_1	$\dots$	x_n	z_1	$\dots$	z_m	ct
$-v'_1$	$\dots$	$-v'_n$	$-\lambda'_1$	$\dots$	$-\lambda'_m$	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Τότε $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m, v'_1, \dots, v'_n)$ βασική λύση, συμπληρωματική της $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

Για παράδειγμα στο

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1 - x_2 + 2x_3 & & \\ & 2x_1 + x_3 + z_1 & = & 3 \\ & x_2 + x_3 + z_2 & = & 2 \\ & x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \min & 3\lambda_1 + 2\lambda_2 & & \\ & 2\lambda_1 - \nu_1 & = & 1 \\ & \lambda_2 - \nu_2 & = & -1 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 - \nu_3 & = & 2 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3 & \geq & 0 \end{array}$$

είχαμε τελικό ταμπλώ

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
0	$-5/2$	0	$-1/2$	$-3/2$	$-9/2$
1	$-1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
0	1	1	0	1	2

και βέλτιστη λύση $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (1/2, 0, 2, 0, 0)$ με τιμή $9/2$

Από ταμπλώ: $(\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = (1/2, 3/2, 0, 5/2, 0)$ συμπληρωματική

Για παράδειγμα στο

$$\max \quad x_1 - x_2 + 2x_3$$
$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_3 & \leq & 3 \\ x_2 + x_3 & \leq & 2 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\min \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2$$
$$\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 & \geq & 1 \\ \lambda_2 & \geq & -1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \geq & 2 \\ \lambda_1, \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

είχαμε τελικό ταμπλώ

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
0	$-5/2$	0	$-1/2$	$-3/2$	$-9/2$
1	$-1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
0	1	1	0	1	2

και βέλτιστη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (1/2, 0, 2)$ με τιμή $9/2$

Από ταμπλώ: $(\lambda_1, \lambda_2) = (1/2, 3/2)$ συμπληρωματική

Αν σε ενδιάμεσο βήμα του *Simplex*

x_1	$\ldots$	x_n	z_1	$\ldots$	z_m	ct
$-v'_1$	$\ldots$	$-v'_n$	$-\lambda'_1$	$\ldots$	$-\lambda'_m$	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Τότε $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_m, v'_1, \ldots, v'_n)$ βασική λύση, συμπληρωματική της $(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$

Απόδειξη:

- Μεγιστοποιώ την $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$
- Στο ενδιάμεσο βήμα η 1η γραμμή: $-\sum_{i=1}^{n} v'_i x_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j z_j - z = A$
- $z_j = b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \to \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j z_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j b_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$
- $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j b_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j z_j$
- Από 2, 4 και ισότητα πολυωνύμων: $v'_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j a_{ij} - c_i$.
  Άρα λ_j's, v_i's ικανοποιούν ισότητες δυϊκού
- Βασική γιατί το πολύ n μη μηδενικά στην γραμμή αντικειμενικής

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

Αν σε ενδιάμεσο βήμα του *Simplex*

x_1	$\dots$	x_n	z_1	$\dots$	z_m	ct
$-v_1'$	$\dots$	$-v_n'$	$-\lambda_1'$	$\dots$	$-\lambda_m'$	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Τότε $(\lambda_1', \dots, \lambda_m', v_1', \dots, v_n')$ βασική λύση, συμπληρωματική της $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$

Απόδειξη:

- Μεγιστοποιώ την $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$
- Στο ενδιάμεσο βήμα η 1η γραμμή: $-\sum_{i=1}^{n} v_i' x_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' z_j - z = A$
- $z_j = b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \to \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' z_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' b_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$
- $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' b_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' z_j$
- Από 2, 4 και ισότητα πολυωνύμων: $v_i' = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' a_{ij} - c_i$.
  Άρα λ_j's, v_i's ικανοποιούν ισότητες δυϊκού
- Βασική γιατί το πολύ n μη μηδενικά στην γραμμή αντικειμενικής

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

Αν σε ενδιάμεσο βήμα του *Simplex*

x_1	$\dots$	x_n	z_1	$\dots$	z_m	ct
$-v'_1$	$\dots$	$-v'_n$	$-\lambda'_1$	$\dots$	$-\lambda'_m$	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Τότε $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m, v'_1, \dots, v'_n)$ βασική λύση, συμπληρωματική της $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$

Απόδειξη:

- Μεγιστοποιώ την $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$
- Στο ενδιάμεσο βήμα η 1η γραμμή: $-\sum_{i=1}^{n} v'_i x_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j z_j - z = A$
- $z_j = b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \to \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j z_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j b_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$
- $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j b_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j z_j$
- Από 2, 4 και ισότητα πολυωνύμων: $v'_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j a_{ij} - c_i$.
  Άρα λ_j's, v_i's ικανοποιούν ισότητες δυϊκού
- Βασική γιατί το πολύ n μη μηδενικά στην γραμμή αντικειμενικής

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

Αν σε ενδιάμεσο βήμα του *Simplex*

x_1	$\dots$	x_n	z_1	$\dots$	z_m	ct
$-v_1'$	$\dots$	$-v_n'$	$-\lambda_1'$	$\dots$	$-\lambda_m'$	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Τότε $(\lambda_1', \dots, \lambda_m', v_1', \dots, v_n')$ βασική λύση, συμπληρωματική της $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$

Απόδειξη:

- Μεγιστοποιώ την $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$
- Στο ενδιάμεσο βήμα η 1η γραμμή: $-\sum_{i=1}^{n} v_i' x_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' z_j - z = A$
- $z_j = b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \to \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' z_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' b_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$
- $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' b_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' z_j$
- Από 2, 4 και ισότητα πολυωνύμων: $v_i' = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' a_{ij} - c_i$.
  Άρα λ_j's, v_i's ικανοποιούν ισότητες δυϊκού
- Βασική γιατί το πολύ n μη μηδενικά στην γραμμή αντικειμενικής

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

Αν σε ενδιάμεσο βήμα του *Simplex*

x_1	$\dots$	x_n	z_1	$\dots$	z_m	ct
$-v'_1$	$\dots$	$-v'_n$	$-\lambda'_1$	$\dots$	$-\lambda'_m$	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Τότε $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m, v'_1, \dots, v'_n)$ βασική λύση, συμπληρωματική της $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$

Απόδειξη:

- Μεγιστοποιώ την $z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$
- Στο ενδιάμεσο βήμα η 1η γραμμή: $-\sum_{i=1}^n v'_i x_i - \sum_{j=1}^m \lambda'_j z_j - z = A$
- $z_j = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \to \sum_{j=1}^m \lambda'_j z_j = \sum_{j=1}^m \lambda'_j b_j - \sum_{j=1}^m \lambda'_j \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$
- $z = \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{j=1}^m \lambda'_j b_j - \sum_{j=1}^m \lambda'_j \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i - \sum_{j=1}^m \lambda'_j z_j$
- Από 2, 4 και ισότητα πολυωνύμων: $v'_i = \sum_{j=1}^m \lambda'_j a_{ij} - c_i$.
  Άρα λ_j's, v_i's ικανοποιούν ισότητες δυϊκού
- Βασική γιατί το πολύ n μη μηδενικά στην γραμμή αντικειμενικής

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

Αν σε ενδιάμεσο βήμα του *Simplex*

x_1	$\dots$	x_n	z_1	$\dots$	z_m	ct
$-v_1'$	$\dots$	$-v_n'$	$-\lambda_1'$	$\dots$	$-\lambda_m'$	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Τότε $(\lambda_1', \dots, \lambda_m', v_1', \dots, v_n')$ βασική λύση, συμπληρωματική της $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$

Απόδειξη:

- Μεγιστοποιώ την $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$
- Στο ενδιάμεσο βήμα η 1η γραμμή: $-\sum_{i=1}^{n} v_i' x_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' z_j - z = A$
- $z_j = b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \to \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' z_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' b_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$
- $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' b_j - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' z_j$
- Από 2, 4 και ισότητα πολυωνύμων: $v_i' = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' a_{ij} - c_i$.
  Άρα λ_j's, v_i's ικανοποιούν ισότητες δυϊκού
- Βασική γιατί το πολύ n μη μηδενικά στην γραμμή αντικειμενικής

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

Αν σε ενδιάμεσο βήμα του *Simplex*

x_1	$\dots$	x_n	z_1	$\dots$	z_m	ct
$-v_1'$	$\dots$	$-v_n'$	$-\lambda_1'$	$\dots$	$-\lambda_m'$	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

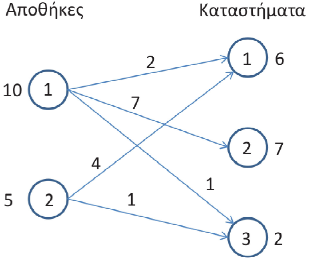
Τότε $(\lambda_1', \dots, \lambda_m', v_1', \dots, v_n')$ βασική λύση, συμπληρωματική της $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$

Συνέπειες:

- Θετικός συντελεστής στην αντικειμενικής $\rightarrow$ όχι εφικτή δυϊκή λύση
- Μόνο μη θετικοί συντελεστές στην αντικειμενικής $\rightarrow$ εφικτή δυϊκή λύση και βέλτιστη (εμμέσως ισχυρή δυϊκότητα)

Παράδειγμα-Κίνητρο:

- Έχουμε ίδια προϊόντα μοιρασμένα (άνισα) σε n αποθήκες
- Έχουμε m καταστήματα που ζητούν ποσότητες από τα προϊόντα
- Η μεταφορά προϊόντων από κάποια αποθήκη σε κάποιο κατάστημα έχει κάποιο κόστος ανά μονάδα μετακίνησης
- Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μεταφοράς



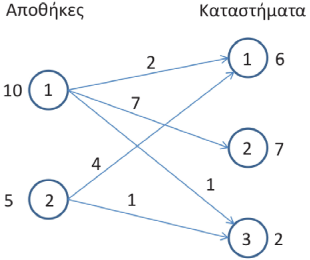
$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} &\leq s_i, && \forall i \in [n] \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &\geq d_j, && \forall j \in [m] \\ x_{ij} &\geq 0, && \forall i \in [n], j \in [m] \end{aligned}$$

Το Πρόβλημα της Μεταφοράς

Παράδειγμα-Κίνητρο:

- Έχουμε ίδια προϊόντα μοιρασμένα (άνισα) σε n αποθήκες
- Έχουμε m καταστήματα που ζητούν ποσότητες από τα προϊόντα
- Η μεταφορά προϊόντων από κάποια αποθήκη σε κάποιο κατάστημα έχει κάποιο κόστος ανά μονάδα μετακίνησης
- Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μεταφοράς



$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} -\sum_{j=1}^m x_{ij} & \geq & -s_i, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} & \geq & d_j, & \forall j \in [m] \\ x_{ij} & \geq & 0, & \forall i \in [n], j \in [m] \end{array}$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας $\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{j=1}^m d_i$, δηλ. προσφορά=ζήτηση.

(Αλλιώς εικονικό κατάστημα με $c_{i,m+1} = 0, \forall i$ και $d_{m+1} = \sum_{i=1}^n s_i - \sum_{j=1}^m d_i$)

Ιδέα Επίλυσης

Είναι γραμμικό πρόβλημα και θα χρησιμοποιήσουμε *Simplex*

- Βρες βασική εφικτή λύση (πάντα υπάρχει!)
- Δες αν κάποια γειτονική της έχει μικρότερο κόστος και πήγαινε αλλιώς σταμάτα.

Το πρόβλημα είναι κάπως 'μεγάλο και αραιό'

- Η υλοποίηση δεν θα γίνει με ταμπλώ
- Ανάκτηση των συντελεστών αντικειμενικής μέσω δυϊκού

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned} -\textstyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} &\geq -s_i, & \forall i \in [n] \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &\geq d_j, & \forall j \in [m] \\ x_{ij} &\geq 0, & \forall i,j \end{aligned}$$

$$\max \sum_{j=1}^{m} \mu_j d_j - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i$$

$$\begin{aligned} \mu_j - \lambda_i &\leq c_{ij}, & \forall i,j \\ \lambda_i, \mu_j &\geq 0, & \forall i,j \end{aligned}$$

Είναι γραμμικό πρόβλημα και θα χρησιμοποιήσουμε *Simplex*

- Βρες βασική εφικτή λύση (πάντα υπάρχει!)
- Δες αν κάποια γειτονική της έχει μικρότερο κόστος και πήγαινε αλλιώς σταμάτα.

Το πρόβλημα είναι κάπως 'μεγάλο και αραιό'

- Η υλοποίηση δεν θα γίνει με ταμπλώ
- Ανάκτηση των συντελεστών αντικειμενικής μέσω δυϊκού

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} -\sum_{j=1}^{m} x_{ij} & \geq & -s_i, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & \geq & d_j, & \forall j \in [m] \\ x_{ij} & \geq & 0, & \forall i,j \end{array}$$

$$\max \sum_{j=1}^{m} \mu_j d_j - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i$$

$$\begin{array}{rcll} \mu_j - \lambda_i & \leq & c_{ij}, & \forall i,j \\ \lambda_i, \mu_j & \geq & 0, & \forall i,j \end{array}$$

Ιδέα Επίλυσης

Είναι γραμμικό πρόβλημα και θα χρησιμοποιήσουμε *Simplex*

- Βρες βασική εφικτή λύση (πάντα υπάρχει!)
- Δες αν κάποια γειτονική της έχει μικρότερο κόστος και πήγαινε αλλιώς σταμάτα.

Το πρόβλημα είναι κάπως 'μεγάλο και αραιό'

- Η υλοποίηση δεν θα γίνει με ταμπλώ
- Ανάκτηση των συντελεστών αντικειμενικής μέσω δυϊκού

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

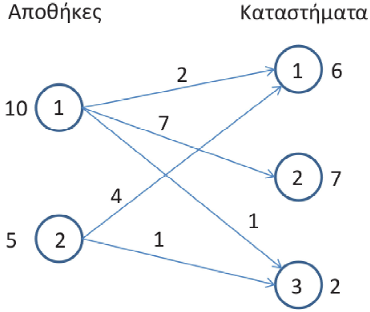
$$\begin{array}{rcll} -\sum_{j=1}^{m} x_{ij} & \geq & -s_i, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & \geq & d_j, & \forall j \in [m] \\ x_{ij} & \geq & 0, & \forall i,j \end{array}$$

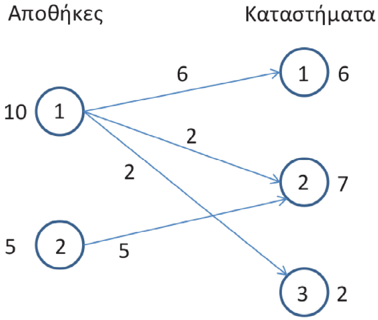
$$\max \sum_{j=1}^{m} \mu_j d_j - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i$$

$$\begin{array}{rcll} \mu_j - \lambda_i & \leq & c_{ij}, & \forall i,j \\ \lambda_i, \mu_j & \geq & 0, & \forall i,j \end{array}$$

Δέντρα Μεταφοράς

Παράδειγμα δέντρου μεταφοράς:

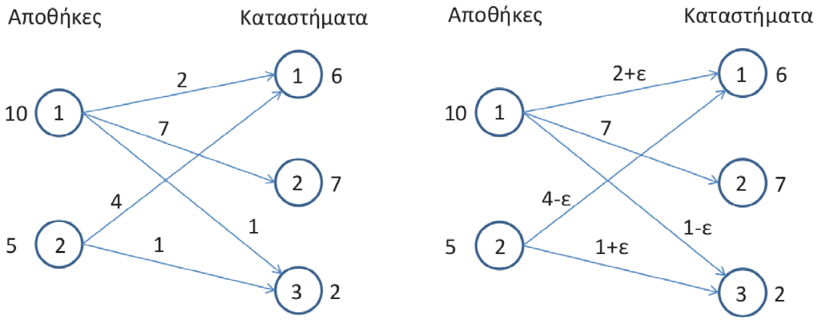




- Κάθε βασική λύση αντιστοιχεί σε δέντρο
- Κάθε δέντρο αντιστοιχεί σε βασική λύση

(Δεχόμαστε μόνο δέντρα που σέβονται τους περιορισμούς)

Μπορούμε να 'σπάμε' τους κύκλους!



- Κατά μήκος του κύκλου προσθαφαιρούμε εναλλάξ ϵ
- Προσεκτικά, διατηρείται η εφικτότητα
- Επιλέγουμε ϵ που μηδενίζει κάποια ακμή
- 'Σπάζοντας' όλους τους κύκλους καταλήγουμε σε δέντρο.

Βασικές Λύσεις

Κάθε βασική λύση αντιστοιχεί σε δέντρο

- Έχουμε $n+m$ περιορισμούς

$$\begin{array}{rcll} -\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - z_i & = & -s_i, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \zeta_j & = & d_j, & \forall j \in [m] \end{array}$$

- Αθροίζοντας, $\sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{j=1}^{m} \zeta_j = 0$, άρα $z_i{}'s$ και $\zeta_j{}'s$ μηδενικά:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} & = & s_i, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & d_j, & \forall j \in [m] \end{array}$$

- Προσφορά=ζήτηση $\rightarrow$ γραμμική εξαρτησία: βαθμός (γενικά) $n+m-1$
- Οι βασικές μεταβλητές είναι $n+m-1$ σε πλήθος και το αντίστοιχο γράφημα είναι συνεκτικό και σέβεται περιορισμούς: Δέντρο!

Κάθε δέντρο αντιστοιχεί σε βασική λύση

- Στο δέντρο $n+m-1$ (το πολύ) μη μηδενικές μεταβλητές

Simplex Μέσω Δέντρων και Δυϊκού

Περνάμε από δέντρο σε δέντρο με τη βοήθεια συντελεστών του δυϊκού.

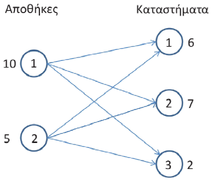
Αρνητικός συντελεστής για ακμή

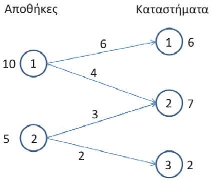
$\downarrow$

ακμή εισέρχεται με $+\epsilon$ ώστε να καταστραφεί ο κύκλος που δημιούργησε

Αρχική κορυφή-δέντρο: κανόνας βορειοδυτικής γωνίας

- Με πρώτη αποθήκη, όσο μπορείς γέμιζε με σειρά τα καταστήματα.
- Συνέχισε ομοιοτρόπως με την επόμενη στη σειρά αποθήκη.





	1	2	3	
1	6	4		10
2		3	2	5
	6	7	2	

Νέο Δέντρο-Βάση (Μη Εκφυλισμός)

Υπενθύμιση: οι περιορισμοί του δυϊκού είναι

$$\mu_j - \lambda_i \leq c_{ij}, \forall i, j \quad \rightarrow \quad \mu_j - \lambda_i + v_{ij} = c_{ij}, \forall i, j$$

Επιλογή ακμής που εισέρχεται αν γράφημα συνεκτικό:

- Μέσω συμπληρωματικών συνθηκών:
  - Όπου έχω θετική τιμή στον πίνακα η αντίστοιχη ανισότητα *tight*. (ισοδύναμα $v_{ij} = 0$)
  - Δίνω αυθαίρετη τιμή για κάποια μεταβλητή και παίρνω τιμές για τα μ_j's και λ_i's
  - Παίρνω λύση και υπολογίζω τα υπόλοιπα v_{ij}'s
- Αν v_{ij}'s όλα θετικά, τότε εφικτή δυϊκή και άρα βέλτιστο δέντρο, αλλιώς επίλεξε ζεύγος k, l με $v_{kl} < 0$
- Βάλε την ακμή (k, l) στο δέντρο.

Νέο Δέντρο-Βάση (Μη Εκφυλισμός)

‘Τιμή’ ακμής που εισέρχεται:

- Θα κλείνει κύκλο. Δώσε της τιμή $+\epsilon$ ώστε, σεβόμενος τους περιορισμούς ($\pm\epsilon$ κατά μήκος κύκλου)
  - να μηδενιστεί κάποια ακμή και
  - οι υπόλοιπες ακμές να να παραμείνουν μη αρνητικές.
- Εύρεση κύκλου, γενικά, με Αναζήτηση Κατά Πλάτος (ΑΚΠ)
  - Ξεκίνα από μια κορυφή της ακμής
  - Επισκέψου όλους τους γείτονες της
  - Συνέχισε με τους γείτονες των γειτόνων μέχρι να βρεθεί κορυφή από δύο ‘γείτονες-πρόγονους’

Νέο Δέντρο-Βάση (Εκφυλισμός)

Επιλογή ακμής που εισέρχεται αν γράφημα μη συνεκτικό:

- Μέσω συμπληρωματικών συνθηκών:
  - Όπου έχω θετική τιμή στον πίνακα η αντίστοιχη ανισότητα *tight*. (ισοδύναμα $v_{ij} = 0$)
  - Προσθέτω στη βάση ακμές που διατηρούν γράφημα ακυκλικό και το κάνουν συνεκτικό
  - Για αυτές τις ακμές ορίζω $v_{ij} = 0$ κι έτσι παίρνω σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας
    (γιατί με νοιάζουν τα υπόλοιπα v_{ij}'s όταν για τη βάση τα v_{ij}'s είναι 0)
  - Συνεχίζω όπως στη μη εκφυλισμένη περίπτωση.

'Τιμή' ακμής που εισέρχεται: όπως μη εκφυλισμένη περίπτωση αλλά:

- Αν με τη νέα ακμή και τα $\pm\epsilon$ πρέπει να μειώσω μηδενική ακμή της βάσης,
  - αφαιρώ αυτήν από τη βάση και
  - και προσθέτω τη νέα με τιμή 0 χωρίς μεταβολές στις υπόλοιπες τιμές

Παράδειγμα

Οι περιορισμοί του δυϊκού $\mu_j - \lambda_i + v_{ij} = c_{ij}$

Πίνακας κόστους (σταθερός):

	1	2	3
1	3	2	1
2	2	1	3

$(p_1, p_2) = (10, 5)$, $(q_1, q_2, q_3) = (6, 7, 2)$

Αρχική βάση:

	1	2	3	
1	6	4		10
2		3	2	5
	6	7	2	

- Συμπλ. συνθήκες: $\mu_1 - \lambda_1 = 3,\ \mu_2 - \lambda_1 = 2,\ \mu_2 - \lambda_2 = 1,\ \mu_3 - \lambda_2 = 3$
- Θέτουμε (αυθαίρετα) $\lambda_1 = 0$ κι έχουμε $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 1, 3, 2, 4)$
- Με αυτά, $v_{13} = 1 - 4 + 0 = -3 < 0$ και άρα ακμή $(1, 3)$ εισέρχεται

	1	2	3	
1	6	$4 - \epsilon$	$+\epsilon$	10
2		$3 + \epsilon$	$2 - \epsilon$	5
	6	7	2	

	1	2	3	
1	6	2	2	10
2		5		5
	6	7	2	

Παράδειγμα

Οι περιορισμοί του δυϊκού $\mu_j - \lambda_i + v_{ij} = c_{ij}$

Πίνακας κόστους (σταθερός):

	1	2	3
1	3	2	1
2	2	1	3

$(p_1, p_2) = (10, 5)$, $(q_1, q_2, q_3) = (6, 7, 2)$

1η αλλαγμένη βάση:

	1	2	3	
1	6	2	2	10
2		5		5
	6	7	2	

- Συμπλ. συνθήκες:
  $\mu_1 - \lambda_1 = 3,\ \mu_2 - \lambda_1 = 2,\ \mu_3 - \lambda_1 = 1,\ \mu_2 - \lambda_2 = 1$
- Θέτουμε (αυθαίρετα) $\lambda_1 = 0$ κι έχουμε
  $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 1, 3, 2, 1)$
- Με αυτά, $v_{21} = 2 - 3 + 1 = 0$ και $v_{23} = 3 - 1 + 1 = 3 > 0$ άρα εφικτή δυϊκή και βέλτιστη (συμπληρωματική χαλαροτητα)

Το Πρόβλημα της Ανάθεσης

- Υπάρχουν n άτομα και n εργασίες που πρέπει να εκτελεστούν
- Καθε άτομο πρέπει να αναλάβει ακριβώς μια εργασία που μπορεί να είναι οποιαδήποτε.
- Το κόστος (ή κέρδος) κάθε εργασίας διαφέρει από άτομο σε άτομο
- Στόχος η ελαχιστοποίηση (ή μεγιστοποίηση) του συνολικού κόστους (ή κέρδους)

$$\min \quad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1, & \forall i \in [n] \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\in \{0,1\}, & \forall i,j \end{aligned}$$

$$\min \quad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &\leq 1, & \forall i \in [n] \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &\geq 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\geq 0, & \forall i,j \end{aligned}$$

Το Πρόβλημα της Ανάθεσης

- Υπάρχουν n άτομα και n εργασίες που πρέπει να εκτελεστούν
- Καθε άτομο πρέπει να αναλάβει ακριβώς μια εργασία που μπορεί να είναι οποιαδήποτε.
- Το κόστος (ή κέρδος) κάθε εργασίας διαφέρει από άτομο σε άτομο
- Στόχος η ελαχιστοποίηση (ή μεγιστοποίηση) του συνολικού κόστους (ή κέρδους)

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad\qquad \min \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} & \in & \{0,1\}, & \forall i,j \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} & \geq & 0, & \forall i,j \end{array}$$

Η 'γενίκευση' είναι πρόβλημα μεταφοράς με ακέραιες βέλτιστες λύσεις.
(ακέραιες: Μπορούμε να σπάμε κύκλους χωρίς να αυξάνεται το κόστος)

Ιδιότητα

Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό. Π.χ.:

	a	b	c
α	30	25	17
β	24	12	36
γ	6	38	19

	a	b	c
α	13	8	0
β	12	0	24
γ	6	38	19

	a	b	c
α	7	8	0
β	6	0	24
γ	0	38	19

Διαισθητικά:

- Κάθε εργασία έχει κάποιο δικό της ελάχιστο κόστος
- Από άτομο σε άτομο αλλάζει το πόσο παραπάνω από αυτό το κόστος χρεωνόμαστε
- Προσθαφαιρώντας, απλά αλλάζουμε το ελάχιστο κόστος
- Αντίστοιχη λογική δουλεύει και για τα άτομα

Ιδιότητα

Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό. Π.χ.:

	a	b	c
α	30	25	17
β	24	12	36
γ	6	38	19

	a	b	c
α	13	8	0
β	12	0	24
γ	6	38	19

	a	b	c
α	7	8	0
β	6	0	24
γ	0	38	19

Τυπικά:

- Για i, j: $u_i, v_j \in \mathbb{R}$ ποσά που προστέθηκαν σε γραμμή i και στήλη j.
- Για οποιοδήποτε σημείο στο χώρο (οποιαδήποτε x_{ij}'s):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}(c_{ij} + u_i + v_j)x_{ij} &= \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_i (u_i \sum_j x_{ij}) + \sum_j (v_j \sum_i x_{ij}) \\ &= \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_i u_i + \sum_j v_j \end{aligned}$$

- $\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$ και $\sum_{i,j}(c_{ij} + u_i + v_j)x_{ij}$ ελαχιστοποιούνται στα ίδια x_{ij}'s

Αν όχι τετραγωνικός, προσθέτουμε γραμμές ή στήλες με 0 παντού

Ιδιότητα

Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό. Π.χ.:

	a	b	c
α	30	25	17
β	24	12	36
γ	6	38	19

	a	b	c
α	13	8	0
β	12	0	24
γ	6	38	19

	a	b	c
α	7	8	0
β	6	0	24
γ	0	38	19

Τυπικά:

- Για i, j: $u_i, v_j \in \mathbb{R}$ ποσά που προστέθηκαν σε γραμμή i και στήλη j.
- Για οποιοδήποτε σημείο στο χώρο (οποιαδήποτε $x_{ij}'s$):

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(c_{ij} + u_i + v_j)x_{ij} &= \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_i(u_i \sum_j x_{ij}) + \sum_j(v_j \sum_i x_{ij}) \\ &= \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_i u_i + \sum_j v_j\end{aligned}$$

- $\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$ και $\sum_{i,j}(c_{ij} + u_i + v_j)x_{ij}$ ελαχιστοποιούνται στα ίδια $x_{ij}'s$

Αν όχι τετραγωνικός, προσθέτουμε γραμμές ή στήλες με 0 παντού

Μεγιστοποίηση κέρδους

Αν μεγιστοποιούμε κέρδος αντί ελαχιστοποιούμε κόστος

- Αντίστοιχη (με την πιο κάτω) ιδέα δουλεύει ή απλά ανάγουμε σε ελαχιστοποίηση:

$$\max \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = \min - \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

- Το $-\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$ ελαχιστοποιείται στα ίδια σημεία με το

$$nM - \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = M \sum_{i,j} x_{ij} - \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i,j} (M - c_{ij}) x_{ij},$$

όπου $M = \max_{i,j}\{c_{ij}\}$

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Το δυϊκό αντιστοιχεί σε ανάθεση τιμών στις κορυφές του γράφου

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1, \quad \forall i \in [n] \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1, \quad \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i,j \end{aligned}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i)$$

$$\lambda_i + \mu_j \leq c_{ij}, \quad \forall i,j \in [n]$$

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

Μέγιστο Ταίριασμα: Μέγιστο σύνολο ακμών χωρίς κοινά άκρα
Σφιχτή ακμή: Ακμή για την οποία $\lambda_i + \mu_j = c_{ij}$
Ελάχιστο κάλυμμα: Ελάχιστο σύνολο κορυφών που ‘ακουμπά’ όλες τις ακμές

Μέγιστο ταίριασμα M μεγέθους n ($|M| = n$) από σφιχτές ακμές δίνει

$$\sum_i (\lambda_i + \mu_i) = \sum_{(i,j)\in M} (\lambda_i + \mu_j) = \sum_{(i,j)\in M} c_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x^*_{ij}$$

όπου $x^*_{ij} = 1$ αν $(i,j) \in M$ και $x^*_{ij} = 0$ αλλιώς

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Το δυϊκό αντιστοιχεί σε ανάθεση τιμών στις κορυφές του γράφου

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1, \quad \forall i \in [n] \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1, \quad \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i,j \end{aligned}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i)$$

$$\lambda_i + \mu_j \leq c_{ij}, \quad \forall i,j \in [n]$$

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

Μέγιστο Ταίριασμα: Μέγιστο σύνολο ακμών χωρίς κοινά άκρα
Σφιχτή ακμή: Ακμή για την οποία $\lambda_i + \mu_j = c_{ij}$
Ελάχιστο κάλυμμα: Ελάχιστο σύνολο κορυφών που 'ακουμπά' όλες τις ακμές

Μέγιστο ταίριασμα M μεγέθους n ($|M| = n$) από σφιχτές ακμές δίνει

$$\sum_i (\lambda_i + \mu_i) = \sum_{(i,j)\in M} (\lambda_i + \mu_j) = \sum_{(i,j)\in M} c_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x^*_{ij}$$

όπου $x^*_{ij} = 1$ αν $(i,j) \in M$ και $x^*_{ij} = 0$ αλλιώς

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Το δυϊκό αντιστοιχεί σε ανάθεση τιμών στις κορυφές του γράφου

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1, \quad \forall i \in [n] \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1, \quad \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i, j \end{aligned}$$

$$\max \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i)$$

$$\lambda_i + \mu_j \leq c_{ij}, \quad \forall i, j \in [n]$$

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

Μέγιστο Ταίριασμα: Μέγιστο σύνολο ακμών χωρίς κοινά άκρα
Σφιχτή ακμή: Ακμή για την οποία $\lambda_i + \mu_j = c_{ij}$
Ελάχιστο κάλυμμα: Ελάχιστο σύνολο κορυφών που 'ακουμπά' όλες τις ακμές

Μέγιστο ταίριασμα M μεγέθους n ($|M| = n$) από σφιχτές ακμές δίνει

$$\sum_{i} (\lambda_i + \mu_i) = \sum_{(i,j) \in M} (\lambda_i + \mu_j) = \sum_{(i,j) \in M} c_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}^*$$

όπου $x_{ij}^* = 1$ αν $(i, j) \in M$ και $x_{ij}^* = 0$ αλλιώς

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
  - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
  - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i$: $\lambda_i = \min_{k,l}\{c_{kl}\}$, $\mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας απο αταίριαστες στο A, χρησιμοποιώντας
    - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
    - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Μέγιστο ταίριασμα $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min\{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j | i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
    - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
    - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'

  και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ο Ουγγρικός Αλγόριθμος

Υλοποίηση της προηγούμενης ιδέας επάνω στον πίνακα κόστους (αν και προηγήθηκε αυτής)

Υπενθύμιση: Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό

1. Από κάθε γραμμή/στήλη αφαίρεσε το ελάχιστο στοιχείο της
2. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.
3. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα 0 με ελάχιστο πλήθος ευθειεών
4. Από τα μη καλλυμένα στοιχεία αφαίρεσε το μικρότερο από αυτά, πρόσθεσέ το στις τομές ευθειών και πήγαινε στο βήμα 2

Αντιστοιχία:

- Τα ακάλυπτα στοιχεία αντιστοιχούν σε ακμές μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Τα κρυμμένα μόνο από οριζόντια ευθεία: από $A \setminus A'$ σε $\Delta \setminus \Delta'$
- Τα κρυμμένα μόνο από κάθετη ευθεία: από A' σε Δ' (σφιχτές)
- Τα καλυμμένα από δυο ευθείες σε ακμές από $A \setminus A'$ σε Δ'
- Οι τιμές στον πίνακα κρατούν 'απόσταση' από 'σφιχτότητα'

Παράδειγμα

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	16
γ	6	38	19	11
δ	16	12	19	45

Αφαίρεση σε γραμμές

	a	b	c	d
α	13	8	0	6
β	12	0	24	4
γ	0	32	13	8
δ	4	0	7	33

Αφαίρεση σε στήλες

	a	b	c	d
α	13	8	0	2
β	12	0	24	0
γ	0	32	13	4
δ	4	0	7	29

Μέγιστο ταίριασμα: $\{(\alpha, c), (\beta, d), (\gamma, a), (\delta, b)\}$ με κόστος: $17+16+6+12=51$

Παράδειγμα

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	16
γ	6	38	19	11
δ	16	12	19	45

Αφαίρεση σε γραμμές

	a	b	c	d
α	13	8	0	6
β	12	0	24	4
γ	0	32	13	8
δ	4	0	7	33

Αφαίρεση σε στήλες

	a	b	c	d
α	13	8	0	2
β	12	0	24	0
γ	0	32	13	4
δ	4	0	7	29

Μέγιστο ταίριασμα:
$\{(\alpha, c), (\beta, d), (\gamma, a), (\delta, b)\}$
με κόστος:
$17 + 16 + 6 + 12 = 51$

Παράδειγμα 2

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	15
γ	6	38	4	11
δ	20	31	19	45

Αφαίρεση σε γραμμές

	a	b	c	d
α	13	8	0	6
β	12	0	24	3
γ	2	34	0	7
δ	1	12	0	26

Αφαίρεση σε στήλες

	a	b	c	d
α	12	8	0	3
β	11	0	24	0
γ	1	34	0	4
δ	0	12	0	23

Αρκούν 3 γραμμές

	a	b	c	d
α	12	8	0	3
β	11	0	24	0
γ	1	34	0	4
δ	0	12	0	23

Παράδειγμα 2

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	15
γ	6	38	4	11
δ	20	31	19	45

Αρκούν 3 γραμμές

	a	b	c	d
α	12	8	0	3
β	11	0	24	0
γ	1	34	0	4
δ	0	12	0	23

Προσθαφαίρεση *min*

	a	b	c	d
α	11	7	0	2
β	11	0	25	0
γ	0	33	0	3
δ	0	12	1	23

Αρκούν 3 γραμμές

	a	b	c	d
α	11	7	0	2
β	11	0	25	0
γ	0	33	0	3
δ	0	12	1	23

Παράδειγμα 2

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	15
γ	6	38	4	11
δ	20	31	19	45

Αρκούν 3 γραμμές

	a	b	c	d
α	11	7	0	2
β	11	0	25	0
γ	0	33	0	3
δ	0	12	1	23

Προσθαφαίρεση *min*

	a	b	c	d
α	11	5	0	0
β	13	0	27	0
γ	0	31	0	1
δ	0	10	1	21

Μέγιστο ταίριασμα

	a	b	c	d
α	11	5	0	0
β	13	0	27	0
γ	0	31	0	1
δ	0	10	1	21

Μέγ. Ταίρ.: $\{(\alpha, d), (\beta, b), (\gamma, c), (\delta, a)\}$. Κόστος: $23 + 12 + 4 + 20 = 59$

Εύρεση Μέγιστου Ταιριάσματος

Στο βήμα 2 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

2. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.

Εύρεση μέγιστου ταιριάσματος (με augmenting paths):

- Φτιάξε το γράφημα που ορίζουν οι ακμές κόστους 0
- Ξεκίνα από τυχαίο (υποβέλτιστο) ταίριασμα
- Ξεκινώντας από ακάλυπτες αριστερές κορυφές κάνε ΑΚΠ χρησιμοποιώντας
  - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
  - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Αν βρεις μονοπάτι στην ΑΚΠ που καταλήγει σε ακάλυπτη δεξιά κορυφή
  - βγάλε τις ζυγές ακμές του μονοπατιού από το ταίριασμα και
  - βάλε τις μονές ακμές του μονοπατιού στο ταίριασμα
- Πήγαινε στο βήμα 2 μέχρι να μην βρίσκεις τέτοιο μονοπάτι

Εύρεση Ελάχιστων Ευθειών

Στο βήμα 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

3. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Δεδομένου μέγιστου ταιριάσματος από 0 οι ελάχιστες ευθείες εύκολα:

- Σημείωσε κάθε γραμμή που δεν έχει 0 στο ταίριασμα
- Σημείωσε κάθε στήλη που έχει 0 σε (νεο)σημειωμένη γραμμή
- Σημείωσε κάθε γραμμή που έχει 0 στο ταίριασμα σε (νεο)σημειωμένη στήλη
- Επανάλαβε από το βήμα 2 μέχρι να μην υπάρχει 'πρόοδος'
- Αν όχι άλλη 'πρόοδος' τράβα ευθείες σε ασημείωτες γραμμές και σημειωμένες στήλες

Στην ουσία κάναμε την ΑΚΠ που δίνει A' και Δ'

Μέγιστο Ταίριασμα - Ελάχιστο Κάλυμμα

Στο βήμα 2 και 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

2. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.
3. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Θεώρημα König ('μεταφρασμένο')

Το μέγιστο ταίριασμα από 0 ισούται με
το ελάχιστο 'κάλυμμα' των 0 από ευθείες

Γραφοθεωρητική απόδειξη αλλά είναι και συνέπεια ισχυρής δυϊκότητας

$$\max \sum_{(i,j)\in E} x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} &= 1, \quad \forall i \in [n] \\
\textstyle\sum_{i:(i,j)\in E} &= 1, \quad \forall j \in [m] \\
x_{ij} &\geq 0, \quad \forall (i,j) \in E
\end{aligned}$$

$$\min \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$

$$\lambda_i + \mu_j \geq 1, \quad \forall (i,j) \in E$$

A Totally Unimodular.

Μέγιστο Ταίριασμα - Ελάχιστο Κάλυμμα

Στο βήμα 2 και 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

3. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.
4. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Θεώρημα König (‘αμετάφραστο’)

Σε ένα διμερή γράφο το μέγιστο ταίριασμα ισούται με το ελάχιστο κάλυμμα

Γραφοθεωρητική απόδειξη αλλά είναι και συνέπεια ισχυρής δυϊκότητας

$$\max \sum_{(i,j)\in E} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} & = & 1, \quad \forall i \in [n] \\ \sum_{i:(i,j)\in E} & = & 1, \quad \forall j \in [m] \\ x_{ij} & \geq & 0, \quad \forall (i,j) \in E \end{array}$$

$$\min \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$

$$\lambda_i + \mu_j \geq 1, \quad \forall (i,j) \in E$$

A Totally Unimodular.

Μέγιστο Ταίριασμα - Ελάχιστο Κάλυμμα

Στο βήμα 2 και 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

3. Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους $= n$ τέλος.
4. Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Θεώρημα König ('αμετάφραστο')

Σε ένα διμερή γράφο το μέγιστο ταίριασμα ισούται με το ελάχιστο κάλυμμα

Γραφοθεωρητική απόδειξη αλλά είναι και συνέπεια ισχυρής δυϊκότητας

$$\max \sum_{(i,j)\in E} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} & = & 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i:(i,j)\in E} & = & 1, & \forall j \in [m] \\ x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall (i,j) \in E \end{array}$$

$$\min \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j$$

$$\begin{array}{rcll} \lambda_i + \mu_j & \geq & 1, & \forall (i,j) \in E \\ \lambda_i, \mu_j & \in & \{0,1\}, & \forall i,j \end{array}$$

Περιεχόμενα

2 Μαρκοβιανές Αλυσίδες
- Ορισμοί και Βασικές Πιθανότητες
- 1η Επίσκεψη, Κατηγοριοποίηση Καταστάσεων
- Ασυμπτωτική Συμπεριφορά, Εργοδικότητα

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Μοντέλο για μελέτη φαινομένων που εξελίσσονται με τυχαίο τρόπο μέσα στο χρόνο. Π.χ. τιμή μιας μετοχής κάθε λεπτό.

- Για κάθε χρονική στιγμή i μια τυχαία μεταβλητή X_i.
- Για εμάς, κάθε X_i έχει πεπερασμένο εύρος πιθανών τιμών
- Δημιουργείται ακολουθία μεταβλητών στο χρόνο: $X_0, X_1, X_2, \dots$
- Τα X_i δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους:
  Η τιμή που θα πάρει η X_i εξαρτάται από τιμές των $X_0, X_1, \dots, X_{i-1}$
- Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε πιθανότητες ενδεχομένων, π.χ.
  $\Pr[X_0 = 3, X_1 = 7, X_2 = 2]$ ή $\Pr[X_0 = 5, X_1 > 7, X_2 \leq 2]$

Μαρκοβιανή Ιδιότητα: Τιμή της X_{i+1} επρεάζεται μόνο από τιμή της X_i.

$$\Pr[X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = \Pr[X_{n+1} = j | X_n = i_n]$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Μαρκοβιανή Αλυσίδα: Ακολουθία μεταβλητών $X_0, X_1, X_2, \ldots$ που ικανοποιεί την μαρκοβιανή ιδιότητα. Πιθανότητες μετάβασης:

$$\Pr[X_{n+1} = j | X_n = i] = p_{ij},$$

$\forall i, j \in S$, ανεξάρτητες του n

Π.χ.: Δυό φίλοι, A και B, έχουν, από 2 ευρώ στην τσέπη ο καθένας

- Ρίχνουν (μεροληπτικό) κέρμα που με πιθανότητα p δίνει κορώνα.
- Με κορώνα ο A δίνει 1 ευρώ στον B, με γράμματα δίνει ο B στον A
- Παίζουν μέχρι κάποιος να χάσει και τα 2 ευρώ
- Έστω X_k τα ευρώ του παίκτη B τη στιγμή k
- Τα X_k's ορίζουν μαρκοβιανή αλυσίδα.
- $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$, για $i = 1, 2, 3$, και $p_{44} = 1$ και $p_{00} = 1$

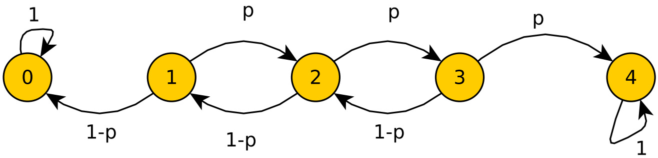
Παράδειγμα

Π.χ.: Δυό φίλοι, A και B, έχουν, από 2 ευρώ στην τσέπη ο καθένας

- Ρίχνουν (μεροληπτικό) κέρμα που με πιθανότητα p δίνει κορώνα.
- Με κορώνα ο A δίνει 1 ευρώ στον B, με γράμματα δίνει ο B στον A
- Παίζουν μέχρι κάποιος να χάσει και τα 2 ευρώ
- Έστω X_k τα ευρώ του παίκτη B τη στιγμή k
- Τα X_k's ορίζουν μαρκοβιανή αλυσίδα.
- $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$, για $i = 1, 2, 3$, και $p_{44} = 1$ και $p_{00} = 1$

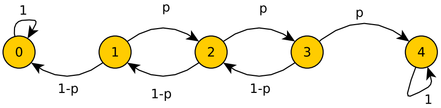
Μπορούμε να το δούμε μέσω γράφου μεταβάσεων:

Η ετικέτα του κόμβου αντιστοιχεί στα χρήματα του B



- Καταστάσεις σαν την 0 και την 4: Απορροφητικές
- Σε κάθε κόμβο άθροισμα τιμών εξερχόμενων ακμών $= 1$

Ακολουθίες με Βήμα 1



Πιθανότητα τα χρήματα του B να έχουν ‘εξέλιξη’; $2, 3, 2, 1, 2, 3, 4$

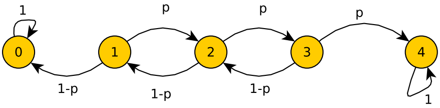
$$\Pr[X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 4 | X_0 = 2] =$$
$$\Pr[X_1 = 3 | X_0 = 2] \Pr[X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 4 | X_1 = 3, X_0 = 2] =$$
$$\Pr[X_1 = 3 | X_0 = 2] \Pr[X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 4 | X_1 = 3] =$$
$$\Pr[X_1 = 3 | X_0 = 2] \Pr[X_2 = 2 | X_1 = 3] \dots \Pr[X_6 = 4 | X_5 = 3] = p(1-p)(1-p)ppp$$

Από μαρκοβιανή ιδιότητα, η τρίτη γραμμή μπορεί να γραφτεί

$$\Pr[X_1 = 3 | X_0 = 2] \Pr[X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 3, X_5 = 4 | X_0 = 3]$$

Κάθε μαρκοβιανή ακολουθία ‘σπάει’ σε δύο μέρη: τι έγινε στο 1ο βήμα και μια μαρκοβιανή που ξεκινάει από την κατάσταση μετά το 1ο βήμα

Ακολουθίες με Βήμα 1



Πιθανότητα τα χρήματα του B να έχουν 'εξέλιξη'; $2, 3, 2, 1, 2, 3, 4$

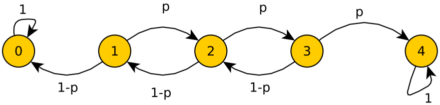
$$\Pr[X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 4 | X_0 = 2] =$$
$$\Pr[X_1 = 3 | X_0 = 2] \Pr[X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 4 | X_1 = 3, X_0 = 2] =$$
$$\Pr[X_1 = 3 | X_0 = 2] \Pr[X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 4 | X_1 = 3] =$$
$$\Pr[X_1 = 3 | X_0 = 2] \Pr[X_2 = 2 | X_1 = 3] \ldots \Pr[X_6 = 4 | X_5 = 3] = p(1-p)(1-p)ppp$$

Από μαρκοβιανή ιδιότητα, η τρίτη γραμμή μπορεί να γραφτεί

$$\Pr[X_1 = 3 | X_0 = 2] \Pr[X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 3, X_5 = 4 | X_0 = 3]$$

Κάθε μαρκοβιανή ακολουθία 'σπάει' σε δύο μέρη: τι έγινε στο 1ο βήμα και μια μαρκοβιανή που ξεκινάει από την κατάσταση μετά το 1ο βήμα

Μετάβαση σε n Βήματα



Πιθανότητα μετά από 4 βήματα τα χρήματα του B να είναι 4 ευρώ;

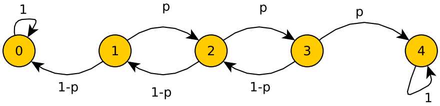
- Θα βρούμε όλα τα μονοπάτια και θα αθροίσουμε πιθανότητες
- Μονοπάτια: $2, 3, 2, 3, 4$, $2, 1, 2, 3, 4$ και $2, 3, 4, 4, 4$
- $\Pr[X_4 = 4 | X_0 = 2] = 2p^3(1-p) + p^2$

Πιθανότητα μετά από 6 βήματα τα χρήματα του B να είναι 4 ευρώ;

- Τα μονοπάτια πληθαίνουν. Χρησιμοποιώ προηγούμενη παρατήρηση
- Ορίζω $p_{ij} = \Pr[X_1 = j | X_0 = i]$ κι έχω

$$\Pr[X_n = j | X_0 = i] = \sum_{k \in S} \Pr[X_{n-1} = j | X_0 = k] p_{ik}$$

Μετάβαση σε n Βήματα



Πιθανότητα μετά από 4 βήματα τα χρήματα του B να είναι 4 ευρώ;

- Θα βρούμε όλα τα μονοπάτια και θα αθροίσουμε πιθανότητες
- Μονοπάτια: $2, 3, 2, 3, 4$, $2, 1, 2, 3, 4$ και $2, 3, 4, 4, 4$
- $\Pr[X_4 = 4 | X_0 = 2] = 2p^3(1-p) + p^2$

Πιθανότητα μετά από 6 βήματα τα χρήματα του B να είναι 4 ευρώ;

- Τα μονοπάτια πληθαίνουν. Χρησιμοποιώ προηγούμενη παρατήρηση
- Ορίζω $p_{ij} = \Pr[X_1 = j | X_0 = i]$ κι έχω

$$\Pr[X_n = j | X_0 = i] = \sum_{k \in S} \Pr[X_{n-1} = j | X_0 = k] p_{ik}$$

Πίνακες Μεταβάσεων

Ο τύπος $\Pr[X_n = j | X_0 = i] = \sum_{k \in S} \Pr[X_{n-1} = j | X_0 = k] p_{ik}$ δίνει δυνατότητα υπολογισμού μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων:

Ο P^n δίνει τον πίνακα μεταβάσεων σε n βήματα:

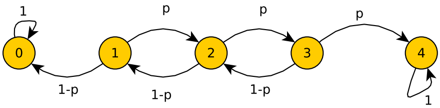
$$P^n(i,j) = Pr[X_n = j | X_0 = i]$$

Επαγωγική υπόθεση: $P^{n-1}(i,j) = Pr[X_{n-1} = j | X_0 = i]$. Επαγ. βήμα:

$$P^n = P \cdot P^{n-1} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i1} & \dots & p_{i|S|} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & Pr[X_{n-1} = j | X_0 = 1] & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & Pr[X_{n-1} = j | X_0 = |S|] & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & Pr[X_n = j | X_0 = i] & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα



Ο πίνακας μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πιθανότητα μετά από 4 βήματα τα χρήματα του B να είναι 4 ευρώ;
Πιθανότητα μετά από 6 βήματα τα χρήματα του B να είναι 4 ευρώ;

$$\Pr[X_4 = 4 | X_0 = 2] = P^4(2,4), \; \Pr[X_6 = 4 | X_0 = 2] = P^6(2,4)$$

Αναδρομικός υπολογισμός

Ο τύπος $\Pr[X_n = j | X_0 = i] = \sum_{k \in S} \Pr[X_{n-1} = j | X_0 = k] p_{ik}$ δίνει δυνατότητα αναδρομικού υπολογισμού

- Έστω μας ενδιαφέρει το $\Pr[X_n = j | X_0 = i]$
- Από τον αναδρομικό τύπο αρκεί να έχουμε υπολογίσει τα $\Pr[X_{n-1} = j | X_0 = k]$ για $k \in S$
- Αναδρομικά από X_{n-1} πέφτουμε σε X_{n-2} και ούτω καθεξής.
- 'Χτίζουμε' πίνακα από μικρά προς μεγάλα:

Παράδειγμα: Υπολογισμός του $\Pr[X_4 = 2 | X_0 = 2]$

τελ. κατ.	$X_0 = 0$	$X_0 = 1$	$X_0 = 2$	$X_0 = 3$	$X_0 = 4$
$X_0 = 2$	0	0	1	0	0
$X_1 = 2$	0	p	0	$1 - p$	0
$X_2 = 2$	0	0	$2p(1-p)$	0	0
$X_3 = 2$	0	$2p^2(1-p)$	0	$2p(1-p)^2$	0
$X_4 = 2$	0	0	$4p^2(1-p)^2$	0	0

Πιθανότητα Επίσκεψης στα n Πρώτα Βήματα

Δοθείσας κατάστασης $j \neq i$, εδιαφερόμαστε για την πιθανότητα

$$\Pr[X_1 = j \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_n = j | X_0 = i]$$

Υπολογισμός αναδρομικά όπως πριν:

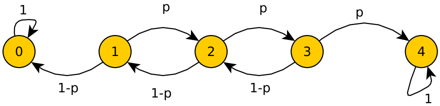
- Από την i πάω στην k με κάποια πιθανότητα και μετά πρέπει να επισκεφτώ την j εκκινώντας από την k

$$\begin{aligned}
\Pr[X_1 = j \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_n = j | X_0 = i] &= \\
p_{ij} + \sum_{k \in S \setminus \{j\}} p_{ik} \Pr[X_2 = j \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_n = j | X_1 = k] &= \\
\sum_{k \in S} \Pr[X_1 = j \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_n = j | X_1 = k] p_{ik} &= \\
\sum_{k \in S} \Pr[X_0 = j \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_{n-1} = j | X_0 = k] p_{ik} &
\end{aligned}$$

- Ανάγω τον υπολογισμό από αυτόν για n σε αυτόν για $n-1$
- Πάλι 'χτίζουμε' πίνακα από μικρά προς μεγάλα.

Παράδειγμα

Υπολογισμός της $\Pr[X_0 = 3 \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_3 = 3 | X_0 = 2]$ στο παράδειγμα του παιχνιδιού



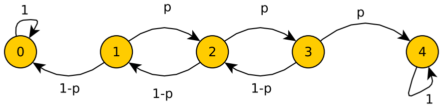
χρησιμοποιώντας (για $i \neq j$)

$$\Pr[X_1 = j \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_n = j | X_0 = i] =$$
$$\sum_{k \in S} \Pr[X_0 = j \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_{n-1} = j | X_0 = k] p_{ik}$$

Ενδεχόμενο	$X_0 = 0$	$X_0 = 1$	$X_0 = 2$	$X_0 = 3$	$X_0 = 4$
$\exists t \in [0] : X_t = 3$	0	0	0	1	0
$\exists t \in [1] : X_t = 3$	0	0	p	1	0
$\exists t \in [2] : X_t = 3$	0	p^2	p	1	0
$\exists t \in [3] : X_t = 3$	0	p^2	$p^2(1-p) + p$	1	0

Παράδειγμα

Υπολογισμός της $\Pr[X_0 = 3 \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_3 = 3 | X_0 = 2]$ στο παράδειγμα του παιχνιδιού



χρησιμοποιώντας (για $i \neq j$)

$$\Pr[X_1 = 3 \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_n = 3 | X_0 = i] =$$
$$\sum_{k \in S} \Pr[X_0 = 3 \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_{n-1} = 3 | X_0 = k] p_{ik}$$

Ενδεχόμενο	$X_0 = 0$	$X_0 = 1$	$X_0 = 2$	$X_0 = 3$	$X_0 = 4$
$\exists t \in [0] : X_t = 3$	0	0	0	1	0
$\exists t \in [1] : X_t = 3$	0	0	p	1	0
$\exists t \in [2] : X_t = 3$	0	p^2	p	1	0
$\exists t \in [3] : X_t = 3$	0	p^2	$p^2(1-p) + p$	1	0

Εναλλακτικά

Ποια η πιθανότητα ο B να κερδίσει πριν την 5η ρίψη;

Η κατάσταση 4 είναι απορροφητική, άρα:

$$\Pr[X_0 = 4 \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_4 = 4 | X_0 = 2] = \Pr[X_4 = 4 | X_0 = 2]$$

Ιδέα: Μετατρέπουμε τον πίνακα ώστε η j να γίνει απορροφητική

Παράδειγμα: $\Pr[X_0 = 1 \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_4 = 1 | X_0 = 2] = Q^4(2,1)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q$$

Πιθανότητα Επίσκεψης Ανεξαρτήτως Βημάτων

Δοθείσας κατάστασης $j \neq i$, εδιαφερόμαστε για την πιθανότητα

$$\Pr[\text{επίσκεψη στην } j | X_0 = i] = f_{ij}$$

Πάλι αναδρομική σχέση:

- Από την i πάω στην k με κάποια πιθανότητα και μετά πρέπει να επισκεφτώ την j εκκινώντας από την k

$$\Pr[\text{επίσκεψη στην } j | X_0 = i] = \sum_{k \in S} \Pr[\text{επίσκεψη στην } j | X_0 = k] p_{ik}$$

- Για το j που με ενδιαφέρει, για τα διαφορετικά i παίρνω $|S|$ εξισώσεις με $|S|$ αγνώστους:

$$\forall i \in S: \; f_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik} f_{kj}$$

- Λύνω το σύστημα και βρίσκω το f_{ij} που με ενδιαφέρει.

Παράδειγμα

Ψάχνω την Pr[επίσκεψη στην $0|X_0 = 2$].

- Χρησιμοποιώ $\forall i \in S: \ f_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik} f_{kj}$ και απορροφητικότητα
- Είναι $f_{00} = 1$, $f_{40} = 0$ και
  - $f_{10} = p_{12} f_{20} + p_{10} f_{00} = pf_{20} + (1-p)$
  - $f_{20} = p_{21} f_{10} + p_{23} f_{30} = (1-p) f_{10} + pf_{30}$
  - $f_{30} = p_{32} f_{20} + p_{34} f_{40} = (1-p) f_{20}$
  - Λύνοντας παίρνουμε:

$$f_{10} = \frac{-p^3 + 2p^2 - 2p + 1}{2p^2 - 2p + 1}$$

$$f_{20} = \frac{(1-p)^2}{2p^2 - 2p + 1}$$

$$f_{30} = \frac{-p^3 + 3p^2 - 3p + 1}{2p^2 - 2p + 1}$$

- για $p = 1/2$ 'επιβεβαιώνουμε': $f_{10} = \frac{3}{4}$, $f_{20} = \frac{1}{2}$, $f_{30} = \frac{1}{4}$

Επισκεψιμότητα σε Συνδεδεμένες Αλυσίδες

Λύνοντας το $\forall i \in S: \; f_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik} f_{kj}$, αλλά υπάρχει χρήσιμη ιδιότητα

Αν από κάθε i υπάρχει μονοπάτι που οδηγεί στην j, τότε $\forall i \in S : f_{ij} = 1$

Απόδειξη:

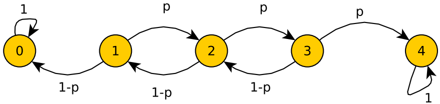
- Έστω κατάσταση q τέτοια ώστε
  - $f_{qj} = \min_i f_{ij}$ και
  - από την q φτάνεις με τα λιγότερα βήματα στην j σε συγκριση με τις υπόλοιπες i': $f_{i'j} = \min_i f_{ij}$
- Αν $f_{qj} = 1$ ισχύει το ζητούμενο. Έστω $f_{qj} < 1$
- Από την αναδρομική σχέση έχω $f_{qj} = \sum_{k \in S} p_{qk} f_{kj}$
- Χρησιμοποιώντας $\sum_{k \in S} p_{qk} = 1$ παίρνω

$$0 = \sum_{k \in S} p_{qk} f_{kj} - \sum_{k \in S} p_{qk} f_{qj} = \sum_{k \in S} p_{qk} (f_{kj} - f_{qj})$$

- Άθροισμα μη αρνητικών όρων=0 $\to$ Για κάθε 'απόγονο' k της j: $f_{kj} = f_{qj}$
- Άρα υπάρχει κατάσταση r πιο κοντά στην j με $f_{qj} = f_{rj}$, άτοπο

Ξεκινώντας από την i, πόσα βήματα θα χρειαστούν μέχρι να επισκεφτώ την j για πρώτη φορά;

- Τα βήματα που θα χρειαστούν είναι μια τυχαία μεταβλητή.
- Ενδιαφερόμαστε για την μέση τιμή αυτής της μεταβλητής
- Δεν ορίζεται πάντα: Στο παιχνίδι, με πιθανότητα $1 - p$ ξεκινώντας από την 1 δεν θα πάμε στην 2 ποτέ



- Παρόμοια, ερώτηση για επίσκεψη σε υποσύνολο κόμβων, π.χ.

  Σε πόσα βήματα τελειώνει το παιχνίδι;

  ισοδύναμα

  Σε πόσα βήματα θα επισκεφτώ την 0 ή την 4;
- Αναγωγή σε ερώτηση για ένα κόμβο ταυτοποιώντας όλους σε έναν κόμβο. Στο παράδειγμα ταυτοποιώ 0 και 4.

Ιδιότητα

T_{ij} =αναμενόμενος αριθμός βημάτων για επίσκεψη j ξεκινώντας από i

Αν για κάθε $i \in S$ είναι $f_{ij} = 1$, τότε (για $i \neq j$): $T_{ij} = 1 + \sum_{k \in S} p_{ik} T_{kj}$

Διαισθητικά:

- Έστω W_{ij} η τυχαία μεταβλητή του αριθμού βημάτων από i για j.
- Αν στο πρώτο βήμα πάω στον $k = j$: $W_{ij} = 1$ (με πιθανότητα p_{ij})
- Αν στο πρώτο βήμα πάω στον $k \neq j$ τότε $W_{ij} = 1 + W_{kj}$
- Για κάθε $k \neq j$ με πιθανότητα p_{ik} θα χρειαστώ κατά μέσο όρο $\mathbb{E}[1 + W_{kj}] = 1 + \mathbb{E}[W_{kj}]$ βήματα

Ιδιότητα

T_{ij} =αναμενόμενος αριθμός βημάτων για επίσκεψη j ξεκινώντας από i

Αν για κάθε $i \in S$ είναι $f_{ij} = 1$, τότε (για $i \neq j$): $T_{ij} = 1 + \sum_{k \in S} p_{ik} T_{kj}$

Απόδειξη:

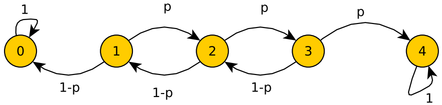
- Έστω W_{ij} η τυχαία μεταβλητή του αριθμού βημάτων από i για j.
- $T_{ij} = \mathbb{E}[W_{ij}] = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell * \Pr[W_{ij} = \ell] = 1 * p_{ij} + \sum_{\ell=2}^{\infty} \ell * \Pr[W_{ij} = \ell]$

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=2}^{\infty} \ell * \Pr[W_{ij} = \ell] &= \sum_{\ell=2}^{\infty} \ell * \sum_{k \in S \setminus \{j\}} \Pr[W_{ij} = \ell \text{ και } X_1 = k] \\
&= \sum_{\ell=2}^{\infty} \ell * \sum_{k \in S \setminus \{j\}} p_{ik} \Pr[W_{ij} = \ell | X_1 = k] \\
&= \sum_{k \in S \setminus \{j\}} p_{ik} \sum_{\ell=1}^{\infty} (1 + \ell) * \Pr[W_{kj} = \ell] \\
&= \sum_{k \in S \setminus \{j\}} p_{ik} \sum_{\ell=1}^{\infty} \Pr[W_{kj} = \ell] + \sum_{k \in S \setminus \{j\}} p_{ik} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell * \Pr[W_{kj} = \ell]
\end{aligned}$$

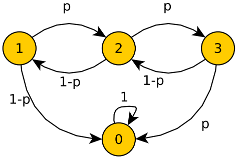
- Άρα $T_{ij} = p_{ij} + (1 - p_{ij}) + \sum_{k \in S \setminus \{j\}} p_{ik} T_{kj} = 1 + \sum_{k \in S} p_{ik} T_{kj}$

Παράδειγμα

Σε πόσα βήματα αναμένεται να τελειώσει το παιχνίδι;



Ταυτοποιώ τις καταστάσεις 0 και 4:



Στην 0 πάω από παντού άρα:

- $T_{10} = 1 + p_{10} T_{00} + p_{12} T_{20} = 1 + pT_{20}$
- $T_{20} = 1 + p_{21} T_{10} + p_{23} T_{30} = 1 + (1-p)T_{10} + pT_{30}$
- $T_{30} = 1 + p_{30} T_{00} + p_{32} T_{20} = 1 + (1-p)T_{20}$

Το σύστημα δίνει $T_{20} = \frac{2}{1-2p(1-p)}$

Επανερχόμενες και Μεταβατικές Καταστάσεις

Μια κατάσταση είναι:

- Επανερχόμενη αν Pr[επιστροφή στην $i | X_0 = i] = 1$
- Μεταβατική αν Pr[επιστροφή στην $i | X_0 = i] < 1$

Ορίζω $V_\infty(i)$ το συνολικό αριθμό επισκέψεων στην i αν αφήσω την αλυσίδα να τρέχει επ' άπειρον

- Μπορεί πεπερασμένες αλλά και άπειρες επισκέψεις!

Για το $V_\infty(i)$ ισχύει:

- Αν i επανερχόμενη, τότε $\Pr[V_\infty(i) < \infty | X_0 = i] = 0$
- Αν i μεταβατική, τότε $\Pr[V_\infty(i) < \infty | X_0 = i] = 1$

Απόδειξη:

- Ορίζω $\rho =$ Pr[επιστροφή στην $i | X_0 = i]$.
- $V_\infty(i) = k$ με πιθανότητα $\rho^{k-1}(1-\rho)$
- $\Pr[V_\infty(i) < \infty | X_0 = i] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[V_\infty(i) = k | X_0 = i] = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k-1}(1-\rho)$
- Άρα $\Pr[V_\infty(i) < \infty | X_0 = i] = \begin{cases} 0, & \text{αν } \rho = 1 \\ 1, & \text{αν } \rho < 1 \end{cases}$

Πλήρης Κατηγοριοποίηση

Μια μαρκοβιανή αλυσίδα είναι συνδεδεμένη αν για κάθε $i, j \in S$ υπάρχουν μονοπάτια από την i στην j και από την j στην i.

Σε συνδεδεμένη αλυσίδα όλες οι καταστάσεις επανερχόμενες

Αυτό γιατί είναι:

$$\Pr[\text{επιστροφή σε } i | X_0 = i] = \sum_{k \in S} p_{ik} \Pr[\text{επίσκεψη σε } i | X_0 = k] = \sum_{k \in S} p_{ik} = 1$$

(από θεώρημα: $\Pr[\text{επίσκεψη στην } i | X_0 = k] = 1$ για συνδ. αλυσίδες)

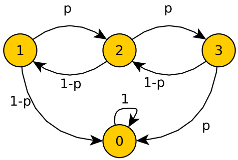
Ιδιότητα για κορυφή i.

- K_i σύνολο καταστάσεων που μπορώ να φτάσω από την i
- Αν $\forall j \in K_i$ υπάρχει μονοπάτι από j σε i τότε i επανερχόμενη
- Αν $\exists j \in K_i$ ώστε από το j να μην οδηγούμαι στο i τότε i μεταβατική

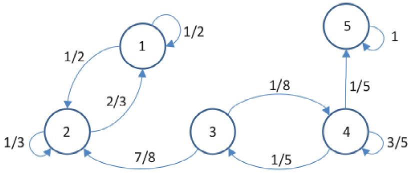
Παραδείγματα

Ιδιότητα για κορυφή i.

- K_i σύνολο καταστάσεων που μπορώ να φτάσω από την i
- Αν $\forall j \in K_i$ υπάρχει μονοπάτι από j σε i τότε i επανερχόμενη
- Αν $\exists j \in K_i$ ώστε από το j να μην οδηγούμαι στο i τότε i μεταβατική



Η 0 επανερχόμενη και οι $1, 2, 3$ μεταβατικές



Οι $1, 2, 5$ επανερχόμενες και οι $3, 4$ μεταβατικές.

Στάσιμη Κατανομή

$V_n(i)$ = πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση i μετά από n βήματα

Μας ενδιαφέρει το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n(i)}{n}$$

(η συχνότητα εμφάνισης αν η αλυσίδα τρέχει επ΄ άπειρον)

Ας υποθέσουμε οτι το όριο υπάρχει για κάθε i και είναι

$$\pi_i = \lim_{n\to\infty} \frac{V_n(i)}{n}$$

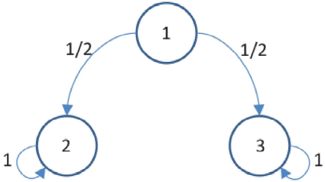
Έχουμε:

- $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$ γιατί για κάθε n: $\sum_{i\in S} V_n(i) = n$
- Χοντρικά, για μεγάλα n: $V_n(i) \approx \sum_{j\in S} V_{n-1}(j) p_{ji}$
  (για κάθε επίσκεψη μου στην j έχω p_{ji} πιθανότητα να πάω στην i)
- Διαιρώντας με n και στέλνωντας $n \to \infty$: $\pi_i = \sum_{j\in S} \pi_j p_{ji}$

Εξισώσεις ισορροπίας και $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$ ορίζουν στάσιμη κατανομή

Ύπαρξη Ορίου και Στάσιμης Κατανομής

Για κάποιες αλυσίδες το $\lim_{n\to\infty} \frac{V_n(i)}{n}$ μπορεί να μην συγκλίνει πάντα στον ίδιο αριθμό:



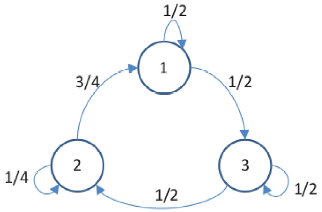
$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n(2)}{n} = \begin{cases} 0, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \\ 1, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \end{cases}$$

Αν Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι συνδεδεμένη

- $\pi_i = \lim_{n\to\infty} \frac{V_n(i)}{n}$, για κάθε κατάσταση i
- Η στάσιμη κατανομή είναι μοναδική

Παράδειγμα 1

Ποσοστό των βημάτων που η (κάτωθι) αλυσίδα βρίσκεται σε κάθε κατάσταση (σε άπειρο ορίζοντα);



Συνδεδεμένη, άρα στασιμή κατανομή, $\pi_i = \sum_{j \in S} \pi_j p_{ji}$ και $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$:

- $\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{4}\pi_2$
- $\pi_2 = \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3$
- $\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3$
- $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

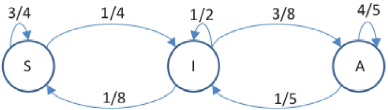
με λύση το $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8})$

Παράδειγμα 2

- Υπολογιστής με λειτουργία *Sleep* (S), *Idle* (I) και *Active* (A).
- Καθε κατάσταση διαφορετική κατανάλωση ισχύος

Sleep	*Idle*	*Active*
$0\ mW$	$1\ mW$	$4\ mW$

- Κάθε λεπτό αλλάζει τυχαία η κατάστασή του με βάση το σχήμα
- Ποια η μέση κατανάλωση ισχύος; (Αν λειτουργεί για μέρες...)



Αλυσίδα συνδεδεμένη!

- $\pi_S = \frac{3}{4}\pi_S + \frac{1}{8}\pi_I$
- $\pi_I = \frac{1}{4}\pi_S + \frac{1}{2}\pi_I + \frac{1}{5}\pi_A$
- $\pi_A = \frac{3}{8}\pi_I + \frac{4}{5}\pi_A$
- $\pi_S + \pi_I + \pi_A = 1$

με λύση το $(\pi_S, \pi_I, \pi_A) = (\frac{4}{27}, \frac{8}{27}, \frac{15}{27})$

Άρα μέση κατανάλωση $0\frac{4}{27} + 1\frac{8}{27} + 4\frac{15}{27} = \frac{68}{27} mW$.

Γιατί Στάσιμη Κατανομή;

Έστω μια αλυσίδα με στάσιμη κατανομή $\pi = \{\pi_i\}_{i \in S}$.

- Επιλέγω με βάση την π την αρχική κατάσταση : $\Pr[X_0 = i] = \pi_i$
- Είναι :

$$\begin{aligned} Pr[X_1 = i] &= \sum_{j \in S} \Pr[X_1 = i, X_0 = j] \\ &= \sum_{j \in S} \Pr[X_0 = j] \Pr[X_1 = i | X_0 = j] \\ &= \sum_{j \in S} \pi_j p_{ji} = \pi_i \end{aligned}$$

- Άρα η πιθανότητα με την οποία θα βρίσκομαι στην κάθε κατάσταση δίνεται πάλι από την π

Σύγκλιση στην Στάσιμη Κατανομή

Έχουμε ασχοληθεί με την πιθανότητα $\Pr[X_n = i | X_0 = k]$ για κάποιο k.

Ποιά η πιθανότητα $\Pr[X_n = i | X_0 = k]$ αν το $n \to \infty$;

- Ας υποθέσουμε ότι $\forall\, i$ συγκλίνει: $a_i = \lim_{n\to\infty} \Pr[X_n = i | X_0 = k]$
- Για κάθε n είναι $\Pr[X_{n+1} = i | X_0 = k] = \sum_{j \in S} \Pr[X_n = j | X_0 = k] p_{ji}$
- Παίρνοντας όρια έχω:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[X_{n+1} = i | X_0 = k] = \sum_{j \in S} \lim_{n\to\infty} \Pr[X_n = j | X_0 = k] p_{ji}$$

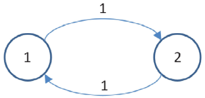
$$\Leftrightarrow a_i = \sum_{j \in S} a_j p_{ji}$$

- Επιπλέον $\sum_{i \in S} a_i = 1$ γιατί για κάθε n βρικόμαστε σε μια κατάσταση

Αν ισχύουν οι συγκλίσεις τότε τα a_i ορίζουν στάσιμη κατανομή!

Περιοδικότητα

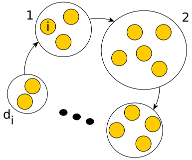
Το $\lim_{n\to\infty} \Pr[X_n = k | X_0 = k]$ δεν υπάρχει πάντα, π.χ.:



Για κάθε n (και στο άπειρο): $\Pr[X_n = 1 | X_0 = 1] = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$

Περίοδος $d_i = MK\Delta\{n > 0 | \Pr[X_n = i | X_0 = i] > 0\}$
Αλυσίδα απεριοδική αλυσίδα αν για κάθε i, $d_i = 1$

Περίοδος $d_i > 1$ για κάποιο i, ισοδύναμα



Κριτήρια Σύγκλισης

Αν αλυσίδα συνδεδεμένη και απεριοδική τότε για κάθε ζεύγος καταστάσεων i, k:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[X_n = i | X_0 = k] = \pi_i$$

Σημασία στάσιμης κατανομής:

- Συχνότητα εμφάνισης της κάθε κατάστασης σε άπειρο χρονικό ορίζοντα
- Πιθανότητα να βρίσκομαι στην κάθε κατάσταση σε άπειρο χρονικό ορίζοντα

Πόρισμα για συνδεδεμένες απεριοδικές αλυσίδες:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n(i)}{n} = \lim_{n\to\infty} \Pr[X_n = i | X_0 = k]$$

Περιεχόμενα

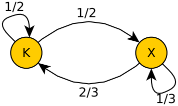
3. Βελτιστοποίηση στο Χρόνο
   - Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων
   - Αναμενόμενο Κόστος σε Φραγμένο Ορίζοντα
   - Μη Φραγμένος Ορίζοντας

Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων

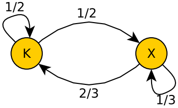
- Στις Μαρκοβιανές αλυσίδες είχαμε σταθερό γράφο μεταβάσεων.
- Πλέον ο γράφος μπορεί από βήμα σε βήμα να αλλάζει
- Αλλαγή εξαρτάται από μια δική μας κοστοβόρα επιλογή/απόφαση
- Επιπλέον σε κάθε κατάσταση έχουμε κάποιο κέρδος ή κόστος.

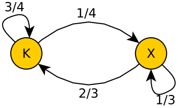
Παράδειγμα:

- Αμάξι μπορεί να είναι είτε σε Καλή κατάσταση είτε Χαλασμένο
- Κάθε μέρα η κατάσταση του μπορεί να αλλάζει, π.χ.:



- Με γρήγορο έλεγχο οι πιθανότητες μετάβασης αλλάζουν, π.χ.:
Χωρίς έλεγχο, Με έλεγχο,





Μαρκοβιανές Αλυσίδες Αποφάσεων

Τυπικά μια Μαρκοβιανή αλυσίδα αποφάσεων ορίζεται από

- Σύνολο καταστάσεων S (πεπερασμένο)
- Σύνολο αποφάσεων A (πεπερασμένο)
- Πιθανότητες μετάβασης p_{ij}^a, για κάθε $a \in A$ και $i, j \in S$
- Συνάρτηση κόστους $c : S \times A \to \mathbb{R}$ (κόστος $c(i,a)$ για $a \in A, i \in S$)

Στο παράδειγμα:
Καταστάσεις $S = \{K, X\}$, Αποφάσεις $A = \{E, T\}$,

$$p_{ij}^a = \begin{cases} 1/2, & a = T,\ i = K,\ j \in S \\ 3/4, & a = E,\ i = j = K \\ 1/4, & a = E,\ i = K,\ j = X \\ 1/3, & a \in A,\ i = X,\ j = X \\ 2/3, & a \in A,\ i = X,\ j = K \end{cases} \quad c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K,\ a = E \\ -1, & i = K,\ a = T \\ 2, & i = X,\ a \in A \end{cases}$$

Πολιτικές αποφάσεων

- Ο προσδιορισμός του κόστους μετά από n βήματα χρειάζεται την ακολουθία αποφάσεων
- Θεωρούμε οτι η απόφαση σε κάθε βήμα εξαρτάται μόνο από το τι έγινε στα προηγούμενα βήματα

Πολιτική είναι μια ακολουθία συναρτήσεων

$$\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots)$$

με την n-στή συνάρτηση να είναι $\sigma_n : S^{n+1} \times A^n \to A$, δίνοντας τιμή

$$\sigma_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0, a_{n-1}, \ldots, a_0) \in A$$

Αναμενόμενο κόστος της πολιτικής είναι το αναμενόμενο κόστος της αλυσίδας δεδομένης της πολιτικής.

Παραδείγματα Πολιτικών

Πολιτική 'Δεν κάνω τίποτα':

- $\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots)$ με κάθε τ_n να δίνει

$$\tau_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0, a_{n-1}, \ldots, a_0) = T$$

Πολιτική 'Κάνε έλεγχο όσο σε καλή κατάσταση αλλιώς παράτα το':

- $\epsilon = (\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ με κάθε ϵ_n να δίνει

$$\epsilon_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0, a_{n-1}, \ldots, a_0) = \begin{cases} E, & x_n = K \\ T, & x_n = X \end{cases}$$

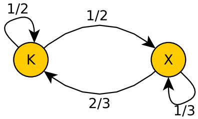
Πολιτική ''Ελεγχο μόνο αν χαλάσει και από τότε και μετά συνέχεια όποτε είναι σε καλή κατάσταση':

- $\upsilon = (\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots)$ με κάθε υ_n να δίνει

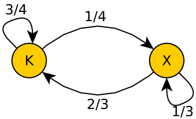
$$\upsilon_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0, a_{n-1}, \ldots, a_0) = \begin{cases} T, & x_n = x_{n-1} = \ldots = x_0 = K \\ T, & x_n = X \\ E, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Υπολογισμοί κόστους

Τίποτα:



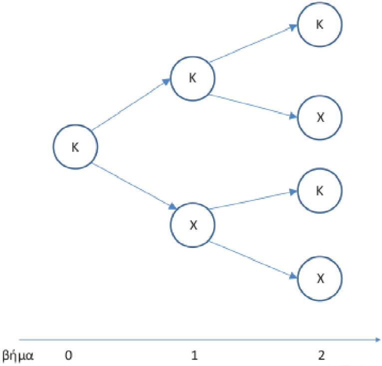
Έλεγχο:



Κόστη:

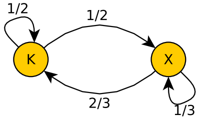
$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K,\ a = E \\ -1, & i = K,\ a = T \\ 2, & i = X,\ a \in A \end{cases}$$

Πιθανή εξέλιξη:

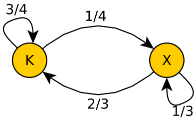


Υπολογισμοί κόστους

Τίποτα:



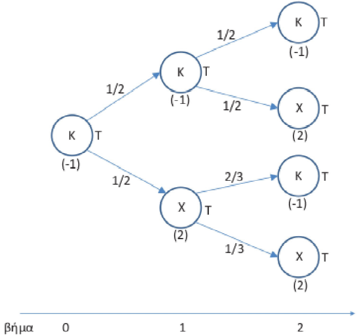
Έλεγχο:



Κόστη:

$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K, \ a = E \\ -1, & i = K, \ a = T \\ 2, & i = X, \ a \in A \end{cases}$$

Πιθανή εξέλιξη με 'Δεν κάνω τίποτα':



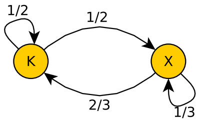
- KKK: πιθανότητα $\frac{1}{4}$, κόστος -3
- KKX: πιθανότητα $\frac{1}{4}$, κόστος 0
- KXK: πιθανότητα $\frac{2}{6}$, κόστος 0
- KXX: πιθανότητα $\frac{1}{6}$, κόστος 3

Αναμενόμενο κόστος:

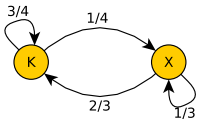
$$\frac{1}{4}(-3) + \frac{1}{4}0 + \frac{2}{6}0 + \frac{1}{6}3 = -\frac{1}{4}$$

Υπολογισμοί κόστους

Τίποτα:



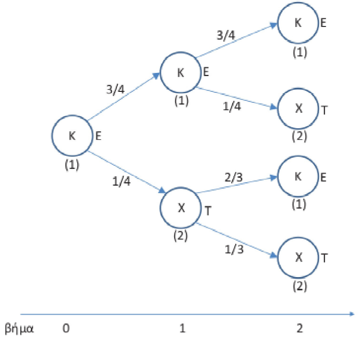
Έλεγχο:



Κόστη:

$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K,\ a = E \\ -1, & i = K,\ a = T \\ 2, & i = X,\ a \in A \end{cases}$$

Πιθανή εξέλιξη με 'Κάνε έλεγχο όσο σε καλή κατάσταση αλλιώς παράτα το':



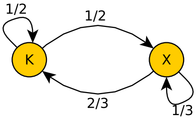
- KKK: πιθανότητα $\frac{9}{16}$, κόστος 3
- KKX: πιθανότητα $\frac{3}{16}$, κόστος 4
- KXK: πιθανότητα $\frac{2}{12}$, κόστος 4
- KXX: πιθανότητα $\frac{1}{12}$, κόστος 5

Αναμενόμενο κόστος:

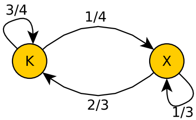
$$\frac{9}{16}3 + \frac{3}{16}4 + \frac{2}{12}4 + \frac{1}{12}5 = \frac{169}{48}$$

Υπολογισμοί κόστους

Τίποτα:



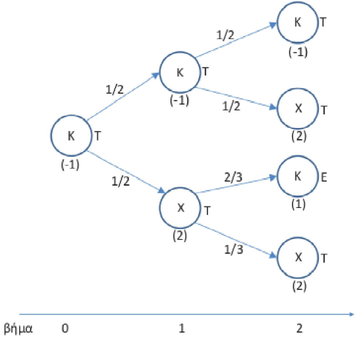
Έλεγχο:



Κόστη:

$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K,\ a = E \\ -1, & i = K,\ a = T \\ 2, & i = X,\ a \in A \end{cases}$$

Πιθανή εξέλιξη με "Έλεγχο μόνο αν χαλάσει και από τότε και μετά συνέχεια όποτε είναι σε καλή κατάσταση":



- KKK: πιθανότητα $\frac{1}{4}$, κόστος -3
- KKX: πιθανότητα $\frac{1}{4}$, κόστος 0
- KXK: πιθανότητα $\frac{2}{6}$, κόστος 2
- KXX: πιθανότητα $\frac{1}{6}$, κόστος 3

Αναμενόμενο κόστος:

$$\frac{1}{4}(-3) + \frac{1}{4}0 + \frac{2}{6}2 + \frac{1}{6}3 = \frac{5}{12}$$

Βέλτιστη Πολιτική;

- Για ορίζοντα 2 βημάτων, από τις 3 πολιτικές, το αναμενόμενο κόστος το ελαχιστοποιεί η 'Δεν κάνω τίποτα'
- Μπορεί σε μακρύτερο ορίζοντα κάποια άλλη καλύτερη
- Μπορεί κάποια 4η πολιτική καλύτερη.
- Μπορεί να μη μας νοιάζει το μέσο κόστος αλλά π.χ. ελαχιστοποίηση πιθανότητας να ξεπεράσουμε κάποιο κόστος

Θα ασχοληθούμε με τρία κριτήρια:

- Ελαχιστοποίηση αναμενόμενου συνολικού κόστους σε φραγμένο ορίζοντα
- Ελαχιστοποίηση αναμενόμενου υποτιμόμενου συνολικού κόστους (σε μη φραγμένο ορίζοντα)
- Ελαχιστοποίηση αναμενόμενου χρονικού μέσου κόστους (σε μη φραγμένο ορίζοντα)

Αναμενόμενο Κόστος σε Φραγμένο Ορίζοντα

Αναμενόμενο συνολικό κόστος πολιτικής σ, που δίνει τα A_n, σε ορίζοντα $N+1$ βημάτων (N μεταβάσεων) αρχίζοντας από i:

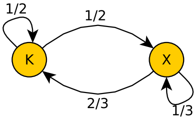
$$V_N^{\sigma}(i) = \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{N} c(X_n, A_n) | X_0 = i\Big]$$

Βέλτιστη πολιτική σ^*, για κατάσταση i, αν

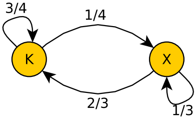
$$V_N^{\sigma^*}(i) = \min_{\sigma \in \Pi} \{ V_N^{\sigma}(i) \}$$

Παράδειγμα

Τίποτα:



Έλεγχο:



Κόστη:

$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K,\ a = E \\ -1, & i = K,\ a = T \\ 2, & i = X,\ a \in A \end{cases}$$

- Για $N = 0$ και είτε $i = K$ ή X είναι $\sigma_0^*(i) = T$ με κόστος -1 ή 2
- Για $N = 1$ και $i = K$
  - αν διαλέξω $\sigma_0^*(K) = T$ τότε πληρώνω -1 και
    - με πιθανότητα $1/2$ το βέλτιστο για $i = K$ και $N = 0$
    - με πιθανότητα $1/2$ το βέλτιστο για $i = X$ και $N = 0$

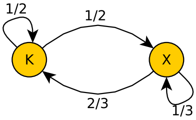
    αναμενόμενο κόστος: $-1 + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(2) = -\frac{1}{2}$
  - αν διαλέξω $\sigma_0^*(K) = E$ τότε πληρώνω 1 και
    - με πιθανότητα $3/4$ το βέλτιστο για $i = K$ και $N = 0$
    - με πιθανότητα $1/4$ το βέλτιστο για $i = X$ και $N = 0$

    αναμενόμενο κόστος: $1 + \frac{3}{4}(-1) + \frac{1}{4}(2) = \frac{3}{4}$
- Άρα για $N = 1$ και $i = K$ βέλτιστο το $\sigma_0^*(K) = T$

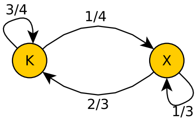
Η ιδέα γενικεύεται!!!

Παράδειγμα

Τίποτα:



Έλεγχο:



Κόστη:

$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K,\ a = E \\ -1, & i = K,\ a = T \\ 2, & i = X,\ a \in A \end{cases}$$

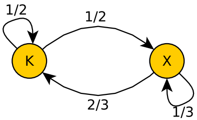
- Για $N = 0$ και είτε $i = K$ ή X είναι $\sigma_0^*(i) = T$ με κόστος -1 ή 2
- Για $N = 1$ και $i = K$
  - αν διαλέξω $\sigma_0^*(K) = T$ τότε πληρώνω -1 και
    - με πιθανότητα $1/2$ το βέλτιστο για $i = K$ και $N = 0$
    - με πιθανότητα $1/2$ το βέλτιστο για $i = X$ και $N = 0$

  αναμενόμενο κόστος: $-1 + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(2) = -\frac{1}{2}$
  - αν διαλέξω $\sigma_0^*(K) = E$ τότε πληρώνω 1 και
    - με πιθανότητα $3/4$ το βέλτιστο για $i = K$ και $N = 0$
    - με πιθανότητα $1/4$ το βέλτιστο για $i = X$ και $N = 0$

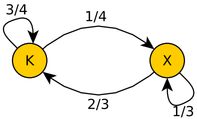
  αναμενόμενο κόστος: $1 + \frac{3}{4}(-1) + \frac{1}{4}(2) = \frac{3}{4}$
- Άρα για $N = 1$ και $i = K$ βέλτιστο το $\sigma_0^*(K) = T$

Η ιδέα γενικεύεται!!!

Τίποτα:



Έλεγχο:



Κόστη:

$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K,\ a = E \\ -1, & i = K,\ a = T \\ 2, & i = X,\ a \in A \end{cases}$$

- Για $N = 0$ και είτε $i = K$ ή X είναι $\sigma_0^*(i) = T$ με κόστος -1 ή 2
- Για $N = 1$ και $i = K$
  - αν διαλέξω $\sigma_0^*(K) = T$ τότε πληρώνω -1 και
    - με πιθανότητα $1/2$ το βέλτιστο για $i = K$ και $N = 0$
    - με πιθανότητα $1/2$ το βέλτιστο για $i = X$ και $N = 0$

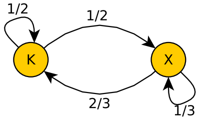
    αναμενόμενο κόστος: $-1 + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(2) = -\frac{1}{2}$
  - αν διαλέξω $\sigma_0^*(K) = E$ τότε πληρώνω 1 και
    - με πιθανότητα $3/4$ το βέλτιστο για $i = K$ και $N = 0$
    - με πιθανότητα $1/4$ το βέλτιστο για $i = X$ και $N = 0$

    αναμενόμενο κόστος: $1 + \frac{3}{4}(-1) + \frac{1}{4}(2) = \frac{3}{4}$
- Άρα για $N = 1$ και $i = K$ βέλτιστο το $\sigma_0^*(K) = T$

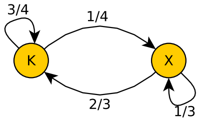
Η ιδέα γενικεύεται!!!

Παράδειγμα

Τίποτα:



Έλεγχο:



Κόστη:

$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K,\ a = E \\ -1, & i = K,\ a = T \\ 2, & i = X,\ a \in A \end{cases}$$

- Για $N = 0$ και είτε $i = K$ ή X είναι $\sigma_0^*(i) = T$ με κόστος -1 ή 2
- Για $N = 1$ και $i = K$
  - αν διαλέξω $\sigma_0^*(K) = T$ τότε πληρώνω -1 και
    - με πιθανότητα $1/2$ το βέλτιστο για $i = K$ και $N = 0$
    - με πιθανότητα $1/2$ το βέλτιστο για $i = X$ και $N = 0$

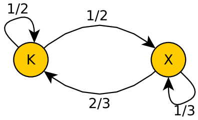
    αναμενόμενο κόστος: $-1 + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(2) = -\frac{1}{2}$
  - αν διαλέξω $\sigma_0^*(K) = E$ τότε πληρώνω 1 και
    - με πιθανότητα $3/4$ το βέλτιστο για $i = K$ και $N = 0$
    - με πιθανότητα $1/4$ το βέλτιστο για $i = X$ και $N = 0$

    αναμενόμενο κόστος: $1 + \frac{3}{4}(-1) + \frac{1}{4}(2) = \frac{3}{4}$
- Άρα για $N = 1$ και $i = K$ βέλτιστο το $\sigma_0^*(K) = T$

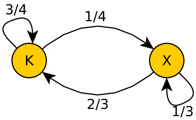
Η ιδέα γενικεύεται!!!

Παράδειγμα

Τίποτα:



Έλεγχο:



Κόστη:

$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K,\ a = E \\ -1, & i = K,\ a = T \\ 2, & i = X,\ a \in A \end{cases}$$

- Για $N = 0$ και είτε $i = K$ ή X είναι $\sigma_0^*(i) = T$ με κόστος -1 ή 2
- Για $N = 1$ και $i = K$
  - αν διαλέξω $\sigma_0^*(K) = T$ τότε πληρώνω -1 και
    - με πιθανότητα $1/2$ το βέλτιστο για $i = K$ και $N = 0$
    - με πιθανότητα $1/2$ το βέλτιστο για $i = X$ και $N = 0$

    αναμενόμενο κόστος: $-1 + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(2) = -\frac{1}{2}$
  - αν διαλέξω $\sigma_0^*(K) = E$ τότε πληρώνω 1 και
    - με πιθανότητα $3/4$ το βέλτιστο για $i = K$ και $N = 0$
    - με πιθανότητα $1/4$ το βέλτιστο για $i = X$ και $N = 0$

    αναμενόμενο κόστος: $1 + \frac{3}{4}(-1) + \frac{1}{4}(2) = \frac{3}{4}$
- Άρα για $N = 1$ και $i = K$ βέλτιστο το $\sigma_0^*(K) = T$

Η ιδέα γενικεύεται!!!

Δυναμικός Προγραμματισμός

Έστω σ^* μια βέλτιστη στρατηγική για κάποια αλυσίδα αποφάσεων

- Στο N-στό βήμα, η σ^* ελαχστοποιεί το κόστος ανεξαρτήτως του τι έγινε πριν
- Έστω για τα βήματα από $n+1$ έως N ξέρω τις $\sigma^*_{n+1}, \ldots, \sigma^*_N$
- Στο n-στό βήμα, σε κατάσταση i, θέλω να επιλέξω την απόφαση επηρεάζοντας που θα βρεθώ στο $n+1$-στό βήμα.
- Η απόφαση $a \in A$ θέλω να ελαχιστοποιεί το

$$\sum_{j \in S} [p^a_{ij} * (\text{Βέλτιστο Κοστος από το } n+1\text{-στό βήμα ξεκινώντας από } j)]$$

Έστω $v^*_n(i)$ το κόστος της σ^* όταν, ξεκινώντας από i, απομένουν n μεταβάσεις μέχρι το τέλος και $a_n(i)$ η απόφαση που παίρνει. Είναι:

- $v^*_0(i) = \min_{a \in A}\{c(i,a)\}$
- $v^*_n(i) = \min_{a \in A}\{c(i,a) + \sum_{j \in S} p^a_{ij} v^*_{n-1}(j)\}$ για $n \geq 1$
- $a_n(i) = arg\min_{a \in A}\{c(i,a) + \sum_{j \in S} p^a_{ij} v^*_{n-1}(j)\}$

Δυναμικός Προγραμματισμός

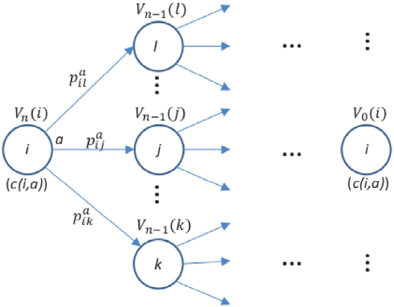
Έστω $v_n^*(i)$ το κόστος της σ^* όταν, ξεκινώντας από i, απομένουν n μεταβάσεις μέχρι το τέλος και $a_n(i)$ η απόφαση που παίρνει. Είναι:

- $v_0^*(i) = \min_{a \in A}\{c(i,a)\}$
- $v_n^*(i) = \min_{a \in A}\{c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{n-1}^*(j)\}$ για $n \geq 1$
- $a_n(i) = arg\min_{a \in A}\{c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{n-1}^*(j)\}$

Αντί απόδειξης:
(Προσοχή, ανάποδοι δείκτες)

- Ελαχιστοποιώ το $\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} c(X_n, A_n) | X_0 = i\right]$
- Σπάω σε βήματα $\mathbb{E}\left[c(X_0, A_0)\right] + \sum_j p_{ij}^a \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} c(X_n, A_n) | X_1 = j\right]$

(Λόγω $\mathbb{E}\left[Y\right] = \sum_j \Pr[B_j]\mathbb{E}\left[Y | B_j\right]$)



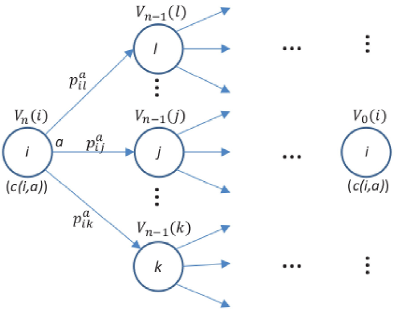
Δυναμικός Προγραμματισμός

Έστω $v_n^*(i)$ το κόστος της σ^* όταν, ξεκινώντας από i, απομένουν n μεταβάσεις μέχρι το τέλος και $a_n(i)$ η απόφαση που παίρνει. Είναι:

- $v_0^*(i) = \min_{a \in A}\{c(i,a)\}$
- $v_n^*(i) = \min_{a \in A}\{c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{n-1}^*(j)\}$ για $n \geq 1$
- $a_n(i) = arg\,\min_{a \in A}\{c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{n-1}^*(j)\}$

Υπολογισμός σ^* με το παραπάνω

- Στο $n = 0$ για κατάσταση i θα παρθεί απόφαση a_0 που ελαχιστοποιεί $c(i,a)$
- Επαγωγικά για n, για τα $a \in A$, συγκρίνονται τα $c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{n-1}^*(j)$ παίρνεται απόφαση a_n που το ελαχιστοποιεί



Μη φραγμένος ορίζοντας

Τό αναμενόμενο συνολικό υποτιμούμενο κόστος μιας πολιτικής σ, για παράγοντα υποτίμησης $0 < \beta < 1$, ξεκινώντας από κατάσταση i είναι

$$v_\sigma(i) = \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n, A_n) | X_0 = i\Big]$$

- Χρειαζόμαστε το β για να έχουμε πάντα σύγκλιση: $\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n, A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \max_{x,a} c(x, a) < \infty$
- Ύπαρξη του β ρεαλιστική σε αρκετές περιπτώσεις

Μια πολιτική είναι Μαρκοβιανή αν η απόφαση στο n-στό βήμα εξαρτάται μόνο από την κατάσταση X_n:

$$\sigma_n(\vec{x_n}, \vec{a}_{n-1}) = f(x_n)$$

Παραδείγματα

Μαρκοβιανή η ‘Δεν κάνω τίποτα’:

- $\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots)$ με κάθε τ_n να δίνει

$$\tau_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0, a_{n-1}, \ldots, a_0) = \tau(x_n) = T$$

Μαρκοβιανή η ‘Κάνε έλεγχο όσο σε καλή κατάσταση αλλιώς παράτα το’:

- $\epsilon = (\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots)$ με κάθε ϵ_n να δίνει

$$\epsilon_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0, a_{n-1}, \ldots, a_0) = \epsilon(x_n) = \begin{cases} E, & x_n = K \\ T, & x_n = X \end{cases}$$

Όχι Μαρκοβιανή η ‘‘Ελεγχο μόνο αν χαλάσει και από τότε και μετά συνέχεια όποτε είναι σε καλή κατάσταση’:

- $\upsilon = (\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots)$ με κάθε υ_n να δίνει

$$\upsilon_n(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0, a_{n-1}, \ldots, a_0) = \begin{cases} T, & x_n = x_{n-1} = \ldots = x_0 = K \\ T, & x_n = X \\ E, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

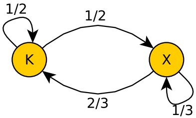
Μαρκοβιανής αλυσίδα αποφάσεων + Μαρκοβιανή πολιτική

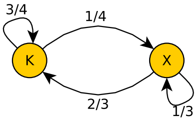
$$\Downarrow$$

Μαρκοβιανή αλυσίδα

Παράδειγμα 1:

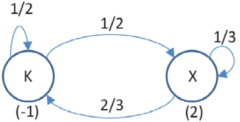
Τίποτα, Έλεγχο, Κόστη,





$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K,\ a = E \\ -1, & i = K,\ a = T \\ 2, & i = X,\ a \in A \end{cases}$$

+'Δεν κάνω τίποτα':



Μαρκοβιανές Αλυσίδες από Μαρκοβιανές Πολιτικές

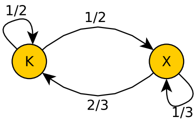
Μαρκοβιανής αλυσίδα αποφάσεων + Μαρκοβιανή πολιτική

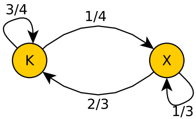
$$\Downarrow$$

Μαρκοβιανή αλυσίδα

Παράδειγμα 1:

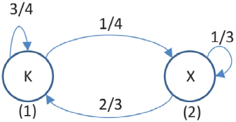
Τίποτα, Έλεγχο, Κόστη,





$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K, \ a = E \\ -1, & i = K, \ a = T \\ 2, & i = X, \ a \in A \end{cases}$$

+‘Κάνε έλεγχο όσο σε καλή κατάσταση αλλιώς παράτα το’:



Συνέπεια Μαρκοβιανής Ιδιότητας

Ξεκινώντας από κατάσταση i, χρησιμοποιώντας μαρκοβιανή πολιτική που αποφασίζει $f(x_n)$, το συνολικό υποτιμούμενο κόστος είναι

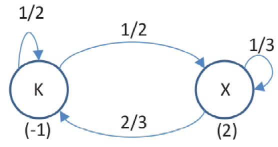
$$v_\sigma(i) = c(i, f(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f(i)} v_\sigma(j)$$

Απόδειξη χρησιμοποιώντας $\mathbb{E}\big[Y\big] = \sum_j \Pr[B_j]\mathbb{E}\big[Y|B_j\big]$. Είναι:

$$\begin{aligned}
v_\sigma(i) &= \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n, A_n)|X_0 = i\Big] \\
&= \sum_{j \in S} \Pr[X_1 = j]\mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n, A_n)|X_1 = j, X_0 = i\Big] \\
&= \sum_{j \in S} p_{ij}^{f(i)} c(i, f(i)) + \sum_{j \in S} p_{ij}^{f(i)} \mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n c(X_n, A_n)|X_1 = j\Big] \\
&= c(i, f(i)) + \sum_{j \in S} p_{ij}^{f(i)} \beta \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n, A_n)|X_0 = j\Big] = c(i, f(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f(i)} v_\sigma(j)
\end{aligned}$$

Παραδείγματα

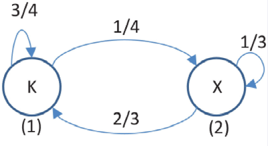
Η μαρκοβιανή πολιτική 'Δεν κάνω τίποτα' για $\beta = 1/2$ δίνει $v_\tau(K) = -\frac{8}{13}$ και $v_\tau(X) = \frac{28}{13}$



$$v_\tau(K) = -1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}v_\tau(K) + \frac{1}{2}v_\tau(X))$$

$$v_\tau(X) = 2 + \frac{1}{2}(\frac{2}{3}v_\tau(K) + \frac{1}{3}v_\tau(X))$$

Η μαρκοβιανή πολιτική 'Κάνε έλεγχο όσο σε καλή αλλιώς παράτα το' για $\beta = 1/2$ δίνει $v_\tau(K) = \frac{52}{23}$ και $v_\tau(X) = \frac{76}{23}$



$$v_\epsilon(K) = 1 + \frac{1}{2}(\frac{3}{4}v_\epsilon(K) + \frac{1}{4}v_\epsilon(X))$$

$$v_\epsilon(X) = 2 + \frac{1}{2}(\frac{2}{3}v_\epsilon(K) + \frac{1}{3}v_\epsilon(X))$$

Βέλτιστη Πολιτική για Συνολικό Υποτιμούμενο Κόστος

Μια πολιτική σ^* είναι βέλτιστη για το μέσο συνολικό υποτιμούμενο κόστος αν για κάθε i

$$v_{\sigma^*}(i) = \min_{\sigma \in \Pi} \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n, A_n) | X_0 = i\Big]$$

Η βέλτιστη πολιτική είναι Μαρκοβιανή, ικανοποιεί την

$$v_{\sigma^*}(i) = \min_{a \in A}[c(i,a)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{\sigma^*}(j)]$$

και αποφαίνεται

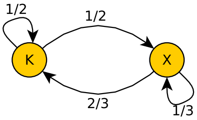
$$f(i) = arg\min_{a \in A}[c(i,a)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{\sigma^*}(j)]$$

Μαρκοβιανή, γιατί ανεξαρτήτως βήματος, όποιες φορές βρεθούμε σε μια κατάσταση, μπροστά υπάρχει ο 'ίδιος' άπειρος ορίζοντας.

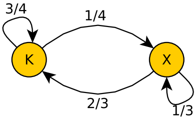
Παράδειγμα

Με χρήση των $v_{\sigma^*}(i) = \min_{a \in A}[c(i,a)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_\sigma(j)]$ μπορούμε να επαληθεύσουμε βελτιστότητα της ‘Δεν κάνω τίποτα’

Τίποτα,



Έλεγχο,



Κόστη,

$$c(i,a) = \begin{cases} 1, & i = K, \ a = E \\ -1, & i = K, \ a = T \\ 2, & i = X, \ a \in A \end{cases}$$

- Τα $v_{\sigma^*}(i) = \min_{a \in A}[c(i,a)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_\sigma(j)]$ δίνουν

$$v^*(K) = \min\left\{-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v^*(K)+\frac{1}{2}v^*(X)\right), 1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}v^*(K)+\frac{1}{4}v^*(X)\right)\right\}$$

$$v^*(X) = \min\left\{2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}v^*(K)+\frac{1}{3}v^*(X)\right), 2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}v^*(K)+\frac{1}{3}v^*(X)\right)\right\}$$

- Αυτές ικανοποιούνται από τα $v_T(K) = -\frac{8}{13}$ και $v_T(X) = \frac{28}{13}$

Βελτίωση Μαρκοβιανής Πολιτικής

Έστω Μαρκοβιανή πολιτική σ_0 και $f_1(i)$ η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί

$$c(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} v_{\sigma_0}(j)$$

Έστω σ_1 Μαρκοβιανή πολιτική που επιλέγει για κάθε i το $f_1(i)$. Είναι:

- Για κάθε i, $v_{\sigma_1}(i) \leq v_{\sigma_0}(i)$
- Αν για κάθε i, $v_{\sigma_1}(i) = v_{\sigma_0}(i)$ τότε σ_1 βέλτιστη.

Για το πρώτο, φτιάχνουμε ακολουθία πολιτικών $\tau_0 = \sigma_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ που

- συγκλίνει στην σ_1 και
- για κάθε k και i είναι $v_{\tau_k}(i) \geq v_{\tau_{k+1}}(i)$

και άρα $v_{\sigma_0}(i) \geq v_{\sigma_1}(i)$ για κάθε i.
Η ακολουθία:

- $\tau_0 = (f_0, f_0, f_0, \ldots)$, $\tau_1 = (f_1, f_0, f_0, \ldots)$, $\tau_2 = (f_1, f_1, f_0, \ldots)$, $\ldots$

Βελτίωση Μαρκοβιανής Πολιτικής

Έστω Μαρκοβιανή πολιτική σ_0 και $f_1(i)$ η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί

$$c(i,a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} v_{\sigma_0}(j)$$

Έστω σ_1 Μαρκοβιανή πολιτική που επιλέγει για κάθε i το $f_1(i)$. Είναι:

- Για κάθε i, $v_{\sigma_1}(i) \le v_{\sigma_0}(i)$
- Αν για κάθε i, $v_{\sigma_1}(i) = v_{\sigma_0}(i)$ τότε σ_1 βέλτιστη.

Ακολουθία: $\tau_0 = (f_0, f_0, f_0, \ldots)$, $\tau_1 = (f_1, f_0, f_0, \ldots)$, $\tau_2 = (f_1, f_1, f_0, \ldots)$, ...

- Ορισμός f_1: $v_{\tau_0}(i) = v_{\sigma_0}(i) \ge c(i, f_1(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f_1(i)} v_{\sigma_0}(j) = v_{\tau_1}(i)$
- Δίνει και: $v_{\tau_1}(i) \ge c(i, f_1(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f_1(i)} v_{\tau_1}(j) = v_{\tau_2(i)}$
- Όμοια: $v_{\tau_2}(i) \ge c(i, f_1(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f_1(i)} v_{\tau_2}(j) = v_{\tau_3(i)}$
- κ.ο.κ. για κάθε k, i: $v_{\tau_k}(i) \ge v_{\tau_{k+1}}(i)$

Βελτίωση Μαρκοβιανής Πολιτικής

Έστω Μαρκοβιανή πολιτική σ_0 και $f_1(i)$ η συνάρτηση που ελαχιστοποιεί

$$c(i,a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} v_{\sigma_0}(j)$$

Έστω σ_1 Μαρκοβιανή πολιτική που επιλέγει για κάθε i το $f_1(i)$. Είναι:

- Για κάθε i, $v_{\sigma_1}(i) \leq v_{\sigma_0}(i)$
- Αν για κάθε i, $v_{\sigma_1}(i) = v_{\sigma_0}(i)$ τότε σ_1 βέλτιστη.

Το δεύτερο γιατί το για κάθε $i, v_{\sigma_1}(i) = v_{\sigma_0}(i)$ δίνει

$$v_{\sigma_1}(i) = c(i, f_1(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f_1(i)} v_{\sigma_1}(j) = c(i, f_1(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f_1(i)} v_{\sigma_0}(j)$$

$$= \min_{a \in A} \left[c(i,a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} v_{\sigma_0}(j) \right] = \min_{a \in A} \left[c(i,a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} v_{\sigma_1}(j) \right]$$

Άρα ίδια κόστη με βέλτιστη πολιτική (ικανοποιεί τις ίδιες εξισώσεις)

Αλγόριθμος Εύρεσης Βέλτιστης Πολιτικής

Εύρεση βέλτιστης πολιτικής με συνεχείς βελτιώσεις:

Ξεκίνα με $k = 0$ και (οποιαδήποτε) αρχική Μαρκοβιανή πολιτική σ_0.

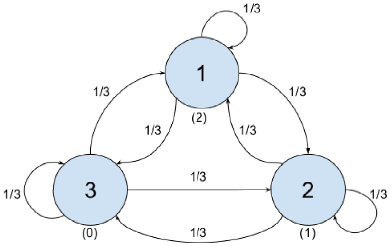
1. Για την σ_k υπολόγισε τα $v_{\sigma_k}(i)$ για κάθε i χρησιμοποιώντας τις
$$v_{\sigma_k}(i) = c(i, f(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f(i)} v_{\sigma_k}(j)$$
2. Κατασκεύασε πολιτική σ_{k+1} ώστε $\sigma_{k+1}(i)$ να ελαχιστοποιεί το
$$c(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} v_{\sigma_k}(j)$$
3. Αν για κάθε i είναι $v_{\sigma_k}(i) = v_{\sigma_{k+1}}(i)$ τότε σ_k βέλτιστη αλλιώς πήγαινε στο 2ο βήμα με την σ_{k+1}.

Δουλεύει πάντα: Πεπερασμένο πλήθος πολιτικών + αυστηρή βελτίωση

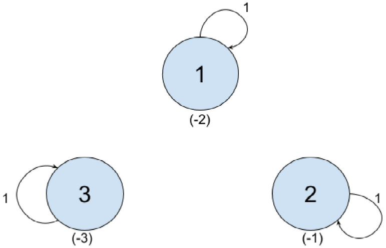
Παράδειγμα

Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης με

- καταστάσεις $S = \{1, 2, 3\}$,
- αποφάσεις $A = \{a_1, a_2\}$
- πιθανότητες μετάβασης και κόστη:



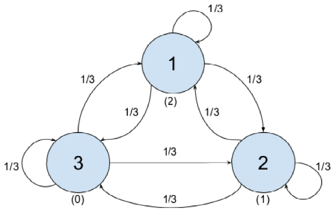
Απόφαση a_1



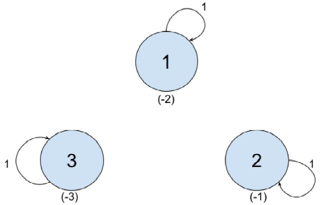
Απόφαση a_2

Παράδειγμα (με $\beta = \frac{1}{2}$)

1. Για την πολιτική σ_0 υπολόγισε τα $v_{\sigma_0}(i)$ για κάθε i μέσω των $v_{\sigma_0}(i) = c(i, f(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f(i)} v_{\sigma_0}(j)$



Απόφαση a_1



Απόφαση a_2

Επιλέγω την πολιτική σ_0 που πάντα διαλέγει a_1. Θα είναι:

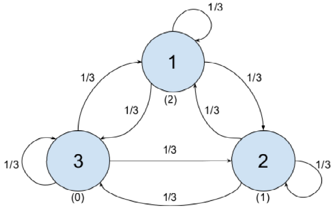
- $v_{\sigma_0}(1) = 2 + \frac{1}{2}[\frac{1}{3}v_{\sigma_0}(1) + \frac{1}{3}v_{\sigma_0}(2) + \frac{1}{3}v_{\sigma_0}(3)]$
- $v_{\sigma_0}(2) = 1 + \frac{1}{2}[\frac{1}{3}v_{\sigma_0}(1) + \frac{1}{3}v_{\sigma_0}(2) + \frac{1}{3}v_{\sigma_0}(3)]$
- $v_{\sigma_0}(3) = 0 + \frac{1}{2}[\frac{1}{3}v_{\sigma_0}(1) + \frac{1}{3}v_{\sigma_0}(2) + \frac{1}{3}v_{\sigma_0}(3)]$

με λύση $(v_{\sigma_0}(1), v_{\sigma_0}(2), v_{\sigma_0}(3)) = (3, 2, 1)$

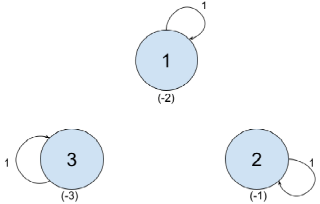
Παράδειγμα (με $\beta = \frac{1}{2}$)

2. Κατασκευάσε πολιτική σ_1 με την $\sigma_1(i)$ να ελαχιστοποιεί το

$$c(i,a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} v_{\sigma_0}(j)$$



Απόφαση a_1



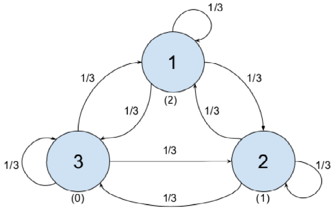
Απόφαση a_2

Συγκρίνω $[c(i,a_1) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a_1} v_{\sigma_0}(j)]$ και $[c(i,a_2) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a_2} v_{\sigma_0}(j)]$

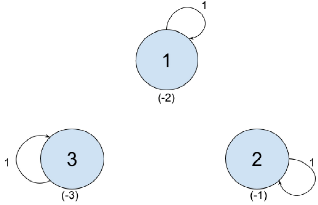
- Για την 1: $2 + \frac{1}{2}[\frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}1]$ και $-2 + \frac{1}{2}[3+0+0]$, άρα $\sigma_1(1) = a_2$
- Για την 2: $1 + \frac{1}{2}[\frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}1]$ και $-1 + \frac{1}{2}[0+2+0]$, άρα $\sigma_1(2) = a_2$
- Για την 3: $0 + \frac{1}{2}[\frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}1]$ και $-3 + \frac{1}{2}[0+0+1]$, άρα $\sigma_1(3) = a_2$

Παράδειγμα (με $\beta = \frac{1}{2}$)

3. Αν για κάθε i είναι $v_{\sigma_0}(i) = v_{\sigma_1}(i)$ τότε σ_0 βέλτιστη αλλιώς πήγαινε στο 2ο βήμα με την σ_1.



Απόφαση a_1



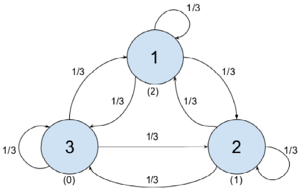
Απόφαση a_2

Για τη νέα πολιτική σ_1 βρίσκω τα $v_{\sigma_1}(i)$:

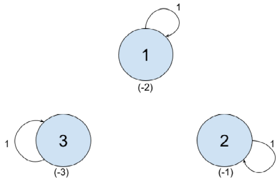
- $v_{\sigma_1}(1) = -2 + \frac{1}{2}[v_{\sigma_1}(1) + 0 + 0]$
- $v_{\sigma_1}(2) = -1 + \frac{1}{2}[0 + v_{\sigma_1}(2) + 0]$
- $v_{\sigma_1}(3) = -3 + \frac{1}{2}[0 + 0 + v_{\sigma_1}(3)]$

με λύση $(v_{\sigma_1}(1), v_{\sigma_1}(2), v_{\sigma_1}(3)) = (-4, -2, -6)$ καλύτερο από $(3, 2, 1)$

2. Κατασκεύασε πολιτική σ_2 με την $\sigma_2(i)$ να ελαχιστοποιεί το
$$c(i,a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} v_{\sigma_1}(j)$$



Απόφαση a_1



Απόφαση a_2

Συγκρίνω $[c(i,a_1) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a_1} v_{\sigma_1}(j)]$ και $[c(i,a_2) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a_2} v_{\sigma_1}(j)]$

- 1: $2 + \frac{1}{2}[\frac{1}{3}(-4) + \frac{1}{3}(-2) + \frac{1}{3}(-6)]$ και $-2 + \frac{1}{2}[-4]$, άρα $\sigma_2(1) = a_2$
- 2: $1 + \frac{1}{2}[\frac{1}{3}(-4) + \frac{1}{3}(-2) + \frac{1}{3}(-6)]$ και $-1 + \frac{1}{2}[-2]$, άρα $\sigma_2(2) = a_2$
- 3: $0 + \frac{1}{2}[\frac{1}{3}(-4) + \frac{1}{3}(-2) + \frac{1}{3}(-6)]$ και $-3 + \frac{1}{2}[-6]$, άρα $\sigma_2(3) = a_2$

σ_2 ίδια με σ_1 και άρα ίδια κόστη και βέλτιστες.

Αναμενόμενο Μέσο (μη Υποτιμούμενο) Κόστος

Κάποια σενάρια δεν μπορούν μοντελοποιηθούν με βάση τα προηγούμενα: Η υποτίμηση είναι μη ρεαλιστική.

Αναμενόμενο μέσο κόστος Μαρκοβιανής αλυσίδας αποφάσεων + πολιτικής:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} c(X_n, A_n)\Big]$$

Μια ιδέα βασίζεται στο (όταν υπάρχουν τα όρια):

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} c_n}{N} = \lim_{N\to\infty} \lim_{\beta\uparrow 1} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \beta^n c_n}{\sum_{n=0}^{N-1} \beta^n}$$

$$= \lim_{\beta\uparrow 1} \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \beta^n c_n}{\sum_{n=0}^{N-1} \beta^n} = \lim_{\beta\uparrow 1}(1-\beta)\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c_n$$

Χρησιμοποιώντας $\beta \approx 1$ και $c_n = \mathbb{E}[c(X_n, A_n)]$ θα παίρναμε προσέγγιση.

Ακριβής Λύση;

Θα χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις μας για $\beta < 1$ λίγο πιο 'έξυπνα':

Έστω σ_β η βέλτιστη πολιτική για δεδομένο $\beta < 1$ και $i_0 \in S$.

Από βελτιστότητα σ_β παίρνω

$$v_{\sigma_\beta}(i) - v_{\sigma_\beta}(i_0) = \min_{a \in A} \left[c(i,a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{\sigma_\beta}(j) \right] - v_{\sigma_\beta}(i_0)$$

$$= \min_{a \in A} \left[c(i,a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{\sigma_\beta}(j) - \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^a v_{\sigma_\beta}(i_0) \right] - (1-\beta) v_{\sigma_\beta}(i_0)$$

$$= \min_{a \in A} \left[c(i,a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^a \left(v_{\sigma_\beta}(j) - v_{\sigma_\beta}(i_0) \right) \right] - (1-\beta) v_{\sigma_\beta}(i_0)$$

Υποθέτοντας οτι υπάρχει ορίζω $h(i) = \lim_{\beta \uparrow 1} [v_{\sigma_\beta}(i) - v_{\sigma_\beta}(i_0)]$ κι έχω

$$h(i) = \min_{a \in A} \left[c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a h(j) \right] - \lim_{\beta \uparrow 1} (1-\beta) v_{\sigma_\beta}(i_0)$$

Ακριβής Λύση;

$$h(i) = \min_{a\in A}\left[c(i,a) + \sum_{j\in S} p_{ij}^{a} h(j)\right] - \lim_{\beta\uparrow 1}(1-\beta)v_{\sigma_\beta}(i_0)$$

Ο τελευταίος όρος αναλύεται:

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\uparrow 1}(1-\beta)v_{\sigma_\beta}(i_0) &= \lim_{\beta\uparrow 1}(1-\beta)\mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n c(X_n,A_n)|X_0=i_0\Big] \\
&= \lim_{\beta\uparrow 1}(1-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n \mathbb{E}\big[c(X_n,A_n)|X_0=i_0\big] \\
&= \lim_{\beta\uparrow 1}\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=0}^{N-1}\beta^n\mathbb{E}\big[c(X_n,A_n)|X_0=i_0\big]}{\sum_{n=0}^{N-1}\beta^n} \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{E}\big[c(X_n,A_n)|X_0=i_0\big]}{N} \\
&= \lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\Big[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}c(X_n,A_n)|X_0=i_0\Big] = \gamma
\end{aligned}$$

Βέλτιστη Πολιτική

Βέλτιστη πολιτική για αναμενόμενο μέσο κόστος ικανοποιεί για κάθε i την

$$h(i) + \gamma = \min_{a \in A} \left[c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} h(j) \right]$$

είναι Μαρκοβιανή και αποφαίνεται

$$f(i) = arg \min_{a \in A} \left[c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} h(j) \right]$$

- Μαρκοβιανή γιατί για κάθε β ανεξαρτήτως βήματος, μπροστά ο 'ίδιος' άπειρος ορίζοντας.
- Πλήθος Μαρκοβιανών πολιτικών πεπερασμένο άρα για $\beta \approx 1$ μέχρι $\beta = 1$ περιμένω σταθεροποιημένη πολιτική.
- Δεν έχει σημασία η επιλογή της $i_0 \in S$: Πληρώνω κάτι στην αρχή αλλά μετά πληρώνω συνέχεια τα της στάσιμης.

Αλγόριθμος Εύρεσης Βέλτιστης Πολιτικής

Θα λύνουμε χρησιμοποιώντας την τεχνική για υποτιμούμενο κόστος

Ξεκίνα με $k = 0$ και (οποιαδήποτε) αρχική Μαρκοβιανή πολιτική σ_0.

1. Για την πολιτική σ_k υπολόγισε τα $h_k(i)$ για κάθε i χρησιμοποιώντας

$$h_k(i) + \gamma = c(i, a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a h_k(j)$$

2. Κατασκεύασε πολιτική σ_{k+1} ώστε $\sigma_{k+1}(i)$ να ελαχιστοποιεί το

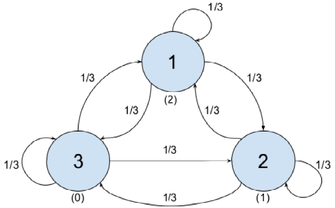
$$c(i, a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a h_k(j)$$

3. Αν $\forall i$: $h_k(i) = h_{k+1}(i)$ τότε σ_k βέλτιστη αλλιώς 1ο βήμα με σ_{k+1}.

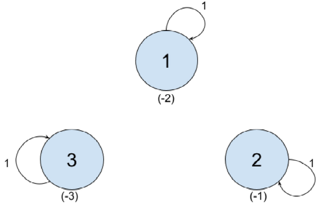
Προσοχή: Δεν δουλεύει πάντα, αλλά σε συνδεδεμένες αλυσίδες δουλεύει

Παράδειγμα ($i_0 = 3$)

1. Για την πολιτική σ_0 υπολόγισε τα $h_0(i)$ για κάθε i.



Απόφαση a_1



Απόφαση a_2

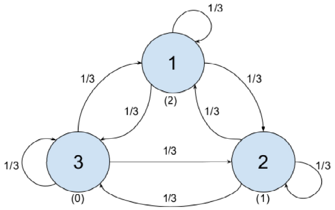
Έπιλέγω την πολιτική σ_0 που πάντα διαλέγει a_1. Θα είναι:

- $h_0(1) + \gamma = 2 + \frac{1}{3}h_0(1) + \frac{1}{3}h_0(2) + \frac{1}{3}h_0(3)$
- $h_0(2) + \gamma = 1 + \frac{1}{3}h_0(1) + \frac{1}{3}h_0(2) + \frac{1}{3}h_0(3)$
- $h_0(3) + \gamma = 0 + \frac{1}{3}h_0(1) + \frac{1}{3}h_0(2) + \frac{1}{3}h_0(3)$

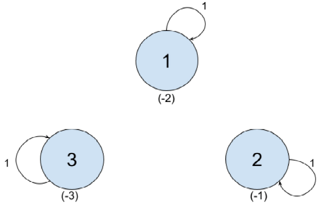
με λύση $(h_0(1), h_0(2), h_0(3), \gamma) = (2, 1, 0, 1)$

Παράδειγμα ($i_0 = 3$)

2. Κατασκεύασε πολιτική σ_1 ώστε $\sigma_1(i)$ να ελαχιστοποιεί το $c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a h_0(j)$



Απόφαση a_1



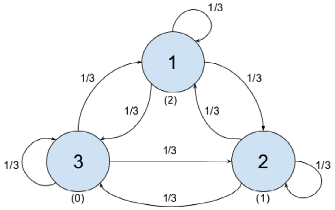
Απόφαση a_2

Συγκρίνω $[c(i,a_1) + \sum_{j \in S} p_{ij}^{a_1} h_0(j)]$ και $[c(i,a_2) + \sum_{j \in S} p_{ij}^{a_2} h_0(j)]$

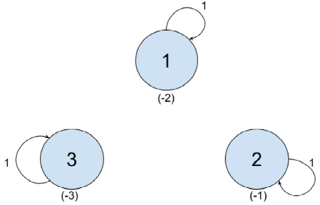
- Για την 1: $2 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}0$ και $-2 + 2 + 0 + 0$, άρα $\sigma_1(1) = a_2$
- Για την 2: $1 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}0$ και $-1 + 0 + 1 + 0$, άρα $\sigma_1(2) = a_2$
- Για την 3: $0 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}0$ και $-3 + 0 + 0 + 0$, άρα $\sigma_1(3) = a_2$

Παράδειγμα ($i_0 = 3$)

3. Αν $\forall i$: $h_0(i) = h_1(i)$ τότε σ_k βέλτιστη αλλιώς 1ο βήμα με σ_{k+1}.



Απόφαση a_1



Απόφαση a_2

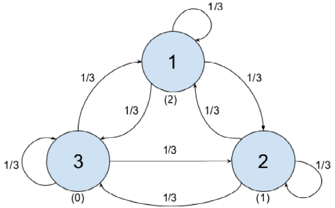
Βρίσκω τα $h_1(i)$:

- $h_1(1) + \gamma = -2 + h_1(1) + 0 + 0$
- $h_1(2) + \gamma = -1 + 0 + h_1(2) + 0$
- $h_1(3) + \gamma = -3 + 0 + 0 + h_1(3)$

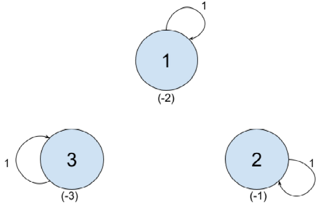
αδύνατο σύστημα και κόλλησα. Υποπτεύομαι όμως βέλτιστη πολιτική.

Παράδειγμα ($i_0 = 3$)

1. Για την πολιτική σ_0 υπολόγισε τα $h_0(i)$ για κάθε i.



Απόφαση a_1



Απόφαση a_2

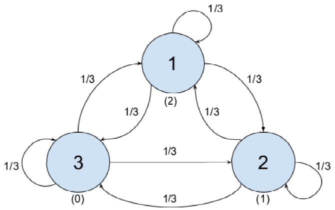
Ξεκινώ από την αρχή με $\sigma_0(1) = \sigma_0(2) = a_1$ και $\sigma_0(3) = a_2$. Θα είναι:

- $h_0(1) + \gamma = 2 + \frac{1}{3}h_0(1) + \frac{1}{3}h_0(2) + \frac{1}{3}h_0(3)$
- $h_0(2) + \gamma = 1 + \frac{1}{3}h_0(1) + \frac{1}{3}h_0(2) + \frac{1}{3}h_0(3)$
- $h_0(3) + \gamma = -3 + 0 + 0 + h_0(3)$

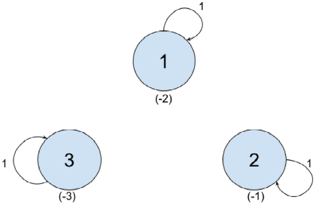
με λύση $(h_0(1), h_0(2), h_0(3), \gamma) = (14, 13, 0, -3)$

Παράδειγμα ($i_0 = 3$)

2. Κατασκεύασε πολιτική σ_1 ώστε $\sigma_1(i)$ να ελαχιστοποιεί το $c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} h_0(j)$



Απόφαση a_1



Απόφαση a_2

Συγκρίνω $[c(i,a_1) + \sum_{j \in S} p_{ij}^{a_1} h_0(j)]$ και $[c(i,a_2) + \sum_{j \in S} p_{ij}^{a_2} h_0(j)]$

- Για την 1: $2 + \frac{1}{3}14 + \frac{1}{3}13 + \frac{1}{3}0$ και $-2 + 14 + 0 + 0$, άρα $\sigma_1(1) = a_1$
- Για την 2: $1 + \frac{1}{3}14 + \frac{1}{3}13 + \frac{1}{3}0$ και $-1 + 0 + 13 + 0$, άρα $\sigma_1(2) = a_1$
- Για την 3: $0 + \frac{1}{3}14 + \frac{1}{3}13 + \frac{1}{3}0$ και $-3 + 0 + 0 + 0$, άρα $\sigma_1(3) = a_2$

Άρα σ_0 βέλτιστη αφού $\sigma_0 = \sigma_1$. Στην ουσία απλά επαλήθευσα συνθήκες θεωρήματος.