ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

ΚΕΦ. 2

ΑΛΥΣΙΔΕΣ MARKOV

Πίνακας Περιεχομένων

2.1 Γενικά

Με τον όρο **διακριτή στοχαστική ανέλιξη** εννοούμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_0, X_1, X_2, ….X_n … που παίρνουν διακριτές τιμές. Η κάθε μεταβλητή X_i παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών S που ονομάζεται σύνολο καταστάσεων (state space). Αν δηλαδή το σύνολο καταστάσεων είναι $S=\{S_1, S_2, ..., S_M\}$, τότε η X_n μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή S_1, S_2, ...ή S_M.Επίσης, η παράμετρος i παίρνει τιμές από ένα σύνολο T ($i \geq 0$, i E R) που ονομάζεται παραμετρικός χώρος. Εδώ θα θεωρήσουμε ότι ο παραμετρικός χώρος είναι επίσης διακριτός (συνήθως εκφράζει χρόνο). Έτσι η X_i εκφράζει την τιμή της μεταβλητής την περίοδο i, οπότε μια στοχαστική ανέλιξη περιγράφει πως εξελίσσεται ένας δείκτης (π.χ. η τιμή μιας μετοχής, η ζήτηση ενός αγαθού κλπ.) στον χρόνο (ανά μήνα, ανά εβδομάδα κλπ.).

Μια πλήρης πιθανολογική περιγραφή των X_n απαιτεί την γνώση των πιθανοτήτων $P(X_{i1} = S_{\zeta 1}, X_{i2} = S_{\zeta 2}, ..., X_{ik} = S_{\zeta k})$ για όλα τα $X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{ik}, S_{\zeta 1}, S_{\zeta 2}, ..., S_{\zeta k}$. Μια τέτοια περιγραφή είναι οπωσδήποτε περίπλοκη, γι' αυτό εξετάζουμε ειδικές περιπτώσεις ανελίξεων όπου οι πιθανότητες εκφράζονται απλούστερα. Η πιο απλή ειδική περίπτωση είναι να έχουμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_i με γνωστές κατανομές. Τότε μία από κοινού κατανομή π.χ. $P(X_1 = S_1, X_{10} = S_2, X_{25} = S_3)$ υπολογίζεται σαν το γινόμενο $P(X_1 = S_1) \cdot P(X_{10} = S_2) \cdot P(X_{25} = S_3)$, και η περιγραφή είναι πλήρης. Αν όμως θέλουμε να περιγράψουμε φαινόμενα όπου υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών X_i, τότε τέτοιοι υπολογισμοί δεν είναι εφικτοί.

Εφεξής θα συμβολίζουμε τις καταστάσεις S_ι, S_j, S_k κλπ. με i, j, k κλπ. αντίστοιχα.

Μια απλή μορφή εξάρτησης είναι η περίπτωση όπου η X_n να εξαρτάται <u>μόνο</u> από την τιμή που πήρε η ανέλιξη την προηγούμενη χρονική στιγμή (X_{n-1}) και όχι από παλαιότερες τιμές, δηλαδή δεν εξαρτάται από τις τιμές των X_{n-2}, X_{n-3}, κλπ. Η εξάρτηση αυτή περιγράφεται ως εξής:

$$P\left(X_n = i_n \ / \ X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0\right) = P(X_n = i_n \ / \ X_{n-1} = i_{n-1})$$

Αυτή είναι η λεγόμενη Ιδιότητα Markov και μια στοχαστική ανέλιξη που έχει αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται Αλυσίδα Markov. Επομένως, σε μια Αλυσίδα Markov η πιθανότητα να πάρει η μεταβλητή X_n την τιμή i_n εξαρτάται μόνο από την τιμή της X_{n-1} (πού βρισκόταν η ανέλιξη στο αμέσως προηγούμενο βήμα) και όχι από τις τιμές των X_{n-2}, X_{n-3}, κλπ.

Δηλαδή η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X_n = j / X_{n-1} = i) = P_{ij}(n)$ εξαρτάται από το i (ποια κατάσταση θα βρεθεί τώρα η αλυσίδα) , το j αλλά και το n (δηλαδή από τις καταστάσεις **και** από τον χρόνο). Αν επιπρόσθετα ο χρόνος n δεν επηρεάζει τις πιθανότητες, είναι δηλαδή, $P(X_n = j / X_{n-1} = i) = P_{ij}(n) = P_{ij}$ ανεξάρτητο του n, τότε λέμε ότι οι μεταβάσεις είναι ανεξάρτητες του χρόνου και έχουμε την λεγόμενη ομοιογένεια χρόνου. Θα περιορισθούμε εδώ σε μεταβάσεις που είναι ανεξάρτητες του χρόνου.

Εφόσον οι καταστάσεις i, k, j, … είναι πεπερασμένες, οι πιθανότητες μετάβασης P_{ij} ή P_{jk} μπορούν να θεωρηθούν στοιχεία μιας τετραγωνικής μήτρας (πίνακα) $P=\{P_{ij}\}$ που θα ονομάζουμε μήτρα μετάβασης και στην οποία το στοιχείο με δείκτη γραμμής i και δείκτη στήλης j δείνει την πιθανότητα να μεταβεί η ανέλιξη στην κατάσταση j (την επόμενη χρονική περίοδο) όταν βρίσκεται στην κατάσταση i (την τρέχουσα χρονική περίοδο).

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε έναν καταναλωτή κάποιου προϊόντος για το οποίο υπάρχουν δύο "μάρκες", η Α και η Β. Ο καταναλωτής μπορεί να αγοράζει κάποιο μήνα το προϊόν Α ή το Β. Έστω ότι έχουμε παρατηρήσει ότι αν ο καταναλωτής αγοράζει κάποιο μήνα το Α, τον επόμενο μήνα αγοράζει πάλι το Α με πιθανότητα 80%, ενώ αν αγοράζει το Β τον επόμενο μήνα αγοράζει πάλι το Β με πιθανότητα όμως 70%.

Οι προτιμήσεις του καταναλωτή κάθε μήνα μπορούν να περιγραφούν σαν τυχαίες μεταβλητές $\{X_0, X_1, X_2 \ldots\}$ με X_i = Α ή Β, δηλαδή το σύνολο S είναι το {Α,Β}. Οι πληροφορίες που μας δίνονται για τις πιθανότητες μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$P(X_{n+1} = A / X_n = A) = 0.80$

και άρα

$P(X_{n+1} = B / X_n = A) = 1 - P(X_{n+1} = A / X_n = A) = 1\text{-}0.80 = 0.20$.

Επίσης, $P(X_{n+1} = B / X_n = B) = 0.70$ και άρα $P(X_{n+1} = A / X_n = B)=0.30$

(θυμηθείτε ότι οι υπό συνθήκη πιθανότητες αθροίζουν σε μονάδα).

Άρα η μήτρα μετάβασης είναι:

$$P = \begin{array}{c} A \rightarrow \\ B \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0.80 & 0.20 \\ 0.30 & 0.70 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ A & B \end{array}$$

$\square$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\sum_{j=1}^{M} P_{ij} = 1$ για κάθε κατάσταση i, θεωρώντας πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων S = {1,2,…,M}. Αυτό προκύπτει διότι $\sum_{j=1}^{M} P(X_{n+1} = j / X_n = i) = 1$, και φυσικά ισχύει για κάθε (γραμμή του πίνακα μετάβασης) i. Θα λέμε ότι μια τετραγωνική μήτρα P είναι <u>στοχαστική,</u> αν έχει μόνο μη αρνητικά στοιχεία και τα στοιχεία κάθε γραμμής της αθροίζουν στη μονάδα. Επομένως, παρατηρούμε ότι ο πίνακας μετάβασης μίας αλυσίδας Markov είναι στοχαστική μήτρα ή αντίστροφα κάθε στοχαστική μήτρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ορίζει μία αλυσίδα Markov.

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι αν η P είναι στοχαστική μήτρα τότε η P^2 είναι επίσης στοχαστική. $\square$

Είδαμε ότι αν οι X_1, X_2, …, X_n είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε $P(x_1,\ldots,x_n) = P(x_1)\cdot P(x_2)\cdot\ldots\cdot P(x_n)$. Όμως, απλοποίηση των υπολογισμών μπορεί να προκύψει και στις αλυσίδες Markov. Συγκεκριμένα, το γεγονός $X_1 = i_1$, $X_2 = i_2$, …, $X_n = i_n$ έχει πιθανότητα:

$$P(X_1 = i_1,\ldots,X_n = i_n) = \frac{P(X_n = i_n,\ldots,X_1 = i_1)}{P(X_{n-1} = i_{n-1},\ldots,X_1 = i_1)}\cdot P(X_{n-1} = i_{n-1},\ldots,X_1 = i_1) =$$

$$= P(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1})\cdot P(X_{n-1} = i_{n-1},\ldots,X_1 = i_1) \text{ (από Ιδιότητα Markov)}$$

$$= P(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_{n-1} = i_{n-1} / X_{n-2} = i_{n-2}) \cdot ... \cdot P(X_2 = i_2 / X_1 = i_1) \cdot P(X_1 = i_1) =$$
$$= P(X_1 = i_1) P_{i1,i2} P_{i2,i3} \dots P_{in-1,\, in}$$

ή ισοδύναμα

$$P(X_n = i_n, ..., X_2 = i_2 / X_1 = i_1) = P_{i1,i2} P_{i2,i3} \dots P_{in-1,\, in}$$

Παράδειγμα 2

Έστω $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$

με 3 καταστάσεις 1,2,3 που αντιστοιχούν στις γραμμές και στήλες του πίνακα P.

(i)Υπολογίστε την πιθανότητα $X_2 =2$ και $X_3 =3$ δεδομένου ότι $X_1 =1$.

Η πιθανότητα $P(X_3 =3, X_2 =2 / X_1 =1)$ ισοούται με $P_{12} \cdot P_{23} =1/4 \cdot 3/4 = 3/16$.

(ακριβώς ίδια τιμή θα είχε και η πιθανότητα $P(X_{2005} =3, X_{2004} =2 / X_{2003} =1)$. Γιατί;)

(ii)Υπολογίστε την πιθανότητα παραμονής στις καταστάσεις 1 ή 2 επί τρεις περιόδους συνολικά, δεδομένου ότι η ανέλιξη ξεκινά στην κατάσταση 1 (ή ισοδύναμα την πιθανότητα η ανέλιξη να μην περάσει από την κατάσταση 3 επί τρεις περιόδους)

Η πιθανότητα είναι $P_{11} P_{11} + P_{12} P_{21} + P_{11}P_{12} + P_{12} P_{22} = (1/2)^2 + 0 + 1/2\ 1/4 + 1/4\ 1/4 = 7/16$.

□

Τα παραπάνω εφαρμόζονται στον υπολογισμό του $P (X_n=j / X_o =i)$ για δεδομένο n.

Στο παράδειγμα 1 της αγοράς, ας υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X_{n+2} = A / X_n = A)$. Προφανώς είναι :

$$P(X_{n+2} = A / X_n = A) = \frac{P(X_{n+2} = A, X_n = A)}{P(X_n = A)} =$$

$$= \frac{P(X_{n+2} = A,\ X_{n+1} = A,\ X_n = A) + P(X_{n+2} = A,\ X_{n+1} = B,\ X_n = A)}{P(X_n = A)} =$$

$$= \frac{P(X_{n+2}=A / X_{n+1}=A,\ X_n=A)\cdot P(X_{n+1}=A,\ X_n=A)}{P(X_n=A)} + \frac{P(X_{n+2}=A / X_{n+1}=B,\ X_n=A)\cdot P(X_{n+1}=B,\ X_n=A)}{P(X_n=A)} =$$

$$= P(X_{n+2}=A /\ X_{n+1}=A)\cdot P(X_{n+1}=A /\ X_n=A) + P(X_{n+2}=A /\ X_{n+1}=B)\cdot P(X_{n+1}=B /\ X_n=A) =$$

$$= P_{AA}\cdot P_{AA} + P_{BA}\cdot P_{AB} = 0.8\cdot 0.8 + 0.3\cdot 0.2 = 0.70$$

Παρατηρήστε ότι για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκαν οι ιδιότητες των πιθανοτήτων υπό συνθήκη καθώς και οι ιδιότητες Markov και ομοιογένειας χρόνου.

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται ως εξής:
(υπενθυμίζουμε ότι θεωρούμε πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων S={1,2,…,M}, ενώ συμβολίζουμε με P_{ij} την πιθανότητα $P(X_{n+1} = j / X_n=i)$)

$$P(X_{n+2}=j/X_n=i) = \frac{P(X_{n+2}=j, X_n=i)}{P(X_n=i)} = \sum_{k\in S}\frac{P(X_{n+2}=j, X_{n+1}=k, X_n=i)}{P(X_n=i)} =$$

$$= \sum_{k}\frac{P(X_{n+2}=j, X_{n+1}=k, X_n=i)\cdot P(X_{n+1}=k, X_n=i)}{P(X_n=i)\cdot P(X_{n+1}=k, X_n=i)} =$$

$$= \sum_{k} P(X_{n+2}=j / X_{n+1}=k, X_n=i)\cdot P(X_{n+1}=k / X_n=i) =$$

$$= \sum_{k} P(X_{n+2}=j / X_{n+1}=k)\cdot P(X_{n+1}=k / X_n=i) = \sum_{k\in S} P_{ik}\cdot P_{kj}$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα Markov και η ομοιογένεια χρόνου.

Αν συμβολίσουμε με $P^{(k)}{}_{ij}$ την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην j σε k βήματα (περιόδους), δηλαδή $P^{(k)}{}_{ij} = P(X_{n+k}=j/X_n=i)$, οι παραπάνω υπολογισμοί έδειξαν ότι $P^{(2)}{}_{ij} = \sum_{k} P_{ik}\cdot P_{kj}$. Όμως, ο όρος $\sum_{k} P_{ik}\cdot P_{kj}$ είναι ακριβώς το (i,j) στοιχείο της μήτρας P^2. Αν συμβολίσουμε το (i, j) στοιχείο της μήτρας P^2 ως $P^2{}_{ij}$, οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι $P^{(2)}{}_{ij} = P^2{}_{ij}$. Επαγωγικά μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ισχύει ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u>

Ισχύει (α) $P^{(k)}{}_{ij} = P^k{}_{ij}$ $(k \geq 1)$

(β) Εξίσωση Chapman-Kolmogorov

$$P^{(n)}{}_{ij} = \sum_{k \in S} P^{(m)}{}_{ik} \cdot P^{(n-m)}{}_{kj} \quad (1 \le m < n)$$

Όσον αφορά στο (α), το αποδείξαμε για k=2. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει για κάποιο β, τότε $P^{(\beta+1)}{}_{ij} = \sum_{l=1}^{M} P_{il} P^{(\beta)}{}_{lj} = \sum_{l=1}^{M} P_{il} P^{\beta}{}_{lj}$

Όμως το τελευταίο άθροισμα είναι το (i,j) στοιχείο του γινομένου της μήτρας P επί την μήτρα P^{β}, άρα είναι το (i,j) στοιχείο της $P^{\beta+1}$.

Όσον αφορά στην απόδειξη του (β), αφήνεται σαν άσκηση.

□

<u>Παράδειγμα 3</u>

Υπολογίστε τα $P^{(k)}{}_{ij}$.

Εάν $P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

Τότε $P^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix}$

Δηλαδή η πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση 1 στην 2 σε δύο βήματα είναι 0,3.

Επίσης, $P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.45 & 0.55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.525 & 0.475 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε, αν συνεχίσουμε τους υπολογισμούς ότι:

$P^6 = P^3 \cdot P^3 = \begin{pmatrix} 0.606 & 0.394 \\ 0.591 & 0.409 \end{pmatrix} \qquad P^7 = P \cdot P^6 = \begin{pmatrix} 0.603 & 0.397 \\ 0.595 & 0.405 \end{pmatrix}$

και γενικά ότι $P^n \xrightarrow[n \to \infty]{} P^{\infty} = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.60 & 0.40 \end{pmatrix}$

□

Η ιδιάζουσα μορφή της P^{∞} στο προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να οδηγήσει στο εξής:

Αν η αρχική κατανομή της X_0 είναι $P(X_0 = A) = \pi,\ P(X_0 = B) = 1-\pi$ ή αλλιώς $\pi^0 = (\pi, 1-\pi)$, τότε η κατανομή της X_n (έστω π^n) είναι $\pi^n = (\pi, 1-\pi)\cdot P^n$ και για $n \to \infty$ είναι $\pi^{\infty} = \pi^0 \cdot \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$ που είναι ανεξάρτητο της αρχικής κατανομής!

Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να φτάσει η στοχαστική ανέλιξη σε μια συγκεκριμένη κατάσταση ύστερα από άπειρα βήματα, είναι ανεξάρτητη της αρχικής κατανομής, δηλαδή των πιθανοτήτων να ξεκινήσει από συγκεκριμένες καταστάσεις! Αυτό είναι ένα ιδιαίτερα ευνοϊκό αποτέλεσμα για τις εφαρμογές και όπως θα δούμε συμβαίνει αρκετά συχνά, όχι όμως πάντοτε.

Είναι προφανές ότι το διάνυσμα π^{∞} ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$\pi^{\infty} \cdot P = \pi^{\infty}$ **(1)** και

$\sum_i \pi_i^{\infty} = 1$ **(2)**.

Η πρώτη εξίσωση προκύπτει από την εξής παρατήρηση :

$$\pi^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \pi^0 \cdot P^n = \left(\lim_{n\to\infty} \pi^0 \cdot P^{n-1}\right) \cdot P = \pi^{\infty} \cdot P.$$

Αν οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν μια μοναδική λύση και το όριο $\lim_{n\to\infty} P^n$ υπάρχει, τότε η «τελική» κατανομή π^{∞} είναι ανεξάρτητη της αρχικής π^0, εφόσον $\lim_{n\to\infty} \pi^0 P^n = \pi^{\infty}$, που είναι ανεξάρτητο από την π^0 από την οποία ξεκινήσαμε.

<u>Προσοχή</u>

Το ότι το σύστημα $xP = x, \sum_i X_i = 1$ έχει μοναδική λύση <u>δεν</u> σημαίνει απαραίτητα ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} \pi^n$ υπάρχει. Αν υπάρχει το όριο απλώς, τότε για δεδομένη αρχική κατανομή π^0 βρίσκω την κατανομή π^{∞} (ως $\pi^{\infty} = \pi^0 \cdot \lim_{n\to\infty} P^n$). Αν όμως επιπλέον το σύστημα εξισώσεων (1) και (2) έχουν μοναδική λύση, τότε το π^{∞} δεν εξαρτάται από την αρχική κατανομή π^{0}.

<u>Παράδειγμα</u>

Θεωρήστε $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $\pi^{0} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Είναι $P^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ενώ $P^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Δηλαδή το όριο $\lim_{n\to\infty} P^{n}$ δεν υπάρχει.

Άρα $\pi^{2k} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ενώ $\pi^{2k+1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ οπότε ούτε το $\lim_{n\to\infty} \pi^{n}$ δεν υπάρχει.

□

Αν όμως το $\lim_{n\to\infty} P^{n}$ υπάρχει και αν το σύστημα $x\,P = x, \sum_{i} X_{i} = 1$ έχει μοναδική λύση, θα πρέπει $\pi^{\infty} = x$. Σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα Markov οδηγείται σε **ισορροπία** (steady-state).

2.2 Εργοδικότητα

Το τι θα συμβεί στην κατανομή π^n για μεγάλο n και κατά πόσο θα υπάρχει κάποια σύγκλιση εξαρτάται όπως είδαμε και από την μήτρα P^n. Μας ενδιαφέρουν δηλαδή όλες εκείνες οι μήτρες P για τις οποίες το όριο $\lim_{n\to\infty} P^n$ υπάρχει (συγκλίνει). Τέτοιες μήτρες λέγονται <u>εργοδικές.</u>

<u>Ορισμός</u>

Μία στοχαστική μήτρα P λέγεται εργοδική, αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} P^n$.

Γράφουμε δε $\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty$.

Οι δυνάμεις μιας τετραγωνικής μήτρας υπολογίζονται εύκολα αφού πρώτα διαγωνοποιηθεί. Αν $P = M\Lambda M^{-1}$ όπου Λ είναι μία διαγώνιος μήτρα με στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$, τότε $P^2 = M\Lambda M^{-1} M\Lambda M^{-1} = M\Lambda^2 M^{-1}$ και γενικά $P^n = M\Lambda^n M^{-1}$.

Προφανώς, όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα η Λ^n είναι διαγώνιος μήτρα με στοιχεία $\lambda_1{}^n, \lambda_2{}^n, .., \lambda_n{}^n$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές (χαρακτηριστικές τιμές) της P. Αν η P είναι στοχαστική μήτρα (όπως οι μήτρες μετάβασης στις αλυσίδες Markov) τότε όλες οι ιδιοτιμές της λ_i είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερες ή ίσες της μονάδας.

<u>Θεώρημα 1</u>

Για όλες τις ιδιοτιμές λ_i μιας στοχαστικής μήτρας ισχύει ότι $|\lambda_i| \le 1$.

*** <u>Απόδειξη</u>

Αν π ιδιοδιάνυσμα, είναι $\pi P = \lambda \pi$, συνεπώς για το j στοιχείο του π είναι $\lambda \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}$ ·. Παίρνοντας απόλυτες τιμές είναι:

$|\lambda| |\pi_j| \le \sum_i |\pi_i| P_{ij} = \sum_i |\pi_i| P_{ij} \quad (P \ge 0)$.

Αν $\left|\pi_j\right| = \max\left|\pi_i\right|$ (και $\pi \neq 0$) είναι

$$|\lambda| \leq \sum_i \frac{|\pi_i|}{|\pi_j|} P_{ij} \leq \sum_i P_{ji} = 1 \quad \left(\frac{|\pi_i|}{|\pi_j|} \leq 1\right).$$

□

Άρα για να διερευνήσουμε αν υπάρχει ή όχι το $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$ για στοχαστική μήτρα P αρκεί να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές της. Συγκεκριμένα, αν $|\lambda_i| < 1$ θα είναι $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_i^{\,n} = 0$, ενώ αν $|\lambda| = 1$ και $\lambda = 1$ είναι $\lambda_i^{\,n} = 1$. Όμως αν $|\lambda| = 1$ και $\lambda = -1$ τότε το $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_i^{\,n}$ <u>δεν</u> υπάρχει.

(Το ίδιο ισχύει αν $\lambda = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{\kappa} + i\ \eta\mu\dfrac{2\pi}{k}$ όπου i η φανταστική μονάδα με $i^2 = -1$).

*** <u>Παράδειγμα</u>

Έστω $P = \begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\det(\lambda I - P) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1.$$ Οι ιδιοτιμές είναι εκείνα τα λ που ικανοποιούν την $\lambda^3 = 1$. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda = 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\text{Άρα } \Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επιβεβαίωσε ότι $\Lambda^3 = I$.

□

Ένας χρήσιμος τρόπος χαρακτηρισμού εργοδικών μητρών είναι ο εξής:

Θεώρημα 2

Μια στοχαστική μήτρα P είναι εργοδική αν και μόνο αν:

(α) Η μόνη ιδιοτιμή με $|\lambda| = 1$ είναι η 1 και

(β) Αν η $\lambda = 1$ έχει πολλαπλότητα k, υπάρχουν k ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda = 1$.

Μετρική απόδειξη

Οι παραπάνω συνθήκες επιτρέπουν την διαγωνοποίηση της μήτρας με μορφή $P = M\Lambda M^{-1}$.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& \lambda_i &&& \\ &&&&& . && \\ &&&&&& . & \\ &&&&&&& \lambda_j \end{pmatrix} \qquad \text{με τα } |\lambda_i| < 1$$

$$\text{Τότε } \lim_{n\to\infty} \Lambda^n = \begin{pmatrix} 1 && 0 \\ & 1 & \\ && 1 \\ 0 && 0 \end{pmatrix}, \text{ άρα } P^{\infty} = M\Lambda^{\infty}M^{-1}$$

□

Παράδειγμα

$$\text{Έστω } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Είναι $\det(\lambda I - P) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & \lambda & -0.6 & 0 \\ -0.2 & 0 & \lambda-0.1 & -0.7 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 0.1)$

Και άρα οι ιδοτιμές είναι 0 και 0.1 (με πολλαπλότητα 1) και 1 με πολλαπλότητα 2.

Διαπιστώνεται με υπολογισμούς ότι στην $\lambda = 1$ αντιστοιχούν τα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα (1 0 0 0) και (0 0 0 1), στην $\lambda = 0.1$ το (-2, 0, 9, -7) και στην $\lambda = 0$ το (4, 5, -30, 21). Άρα σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η P είναι εργοδική.

Είναι λοιπόν για:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 9 & 7 \\ 4 & 5 & -30 & 21 \end{pmatrix}, \; MP = \Lambda M \text{ με } \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0.1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$P = M^{-1}\Lambda M \quad , \quad P^{\infty} = M^{-1} \cdot \Lambda^{\infty} \cdot M = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 0 & 0 & 7/15 \\ 2/9 & 0 & 0 & 7/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

εφόσον $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 7/15 & 10/15 & 3/15 \\ 2/9 & 7/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Αν λοιπόν $\pi^0 = (0, 1, 0, 0)$, τότε $\pi^{\infty} = \left(8/15, 0, 0, 7/15 \right)$

ενώ αν $\pi^0 = (0, 0, 1, 0)$, είναι $\pi^\infty = \left(\frac{2}{9}, 0, 0, \frac{7}{9} \right)$.

□

Βλέπουμε στο τελευταίο παράδειγμα ότι το διάνυσμα π^∞ έχει τιμές που εξαρτώνται από τις τιμές του π^0.

Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει όταν η μήτρα P είναι <u>κανονική</u>.

<u>Ορισμός</u>

Μια στοχαστική μήτρα P είναι κανονική αν και μόνο αν για κάποιο ακέραιο $\kappa > 0$, η P^κ έχει <u>όλα</u> τα στοιχεία της θετικά (<u>όχι</u> μηδέν).

<u>Παράδειγμα</u>

Η $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ είναι κανονική, ενώ η $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι.

Η $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι κανονική εφόσον $P^2 = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Η $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ δεν είναι κανονική.

□

Η χρησιμότητα των κανονικών μητρών αφείλεται στο επόμενο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 3</u>

Αν μία μήτρα P είναι κανονική, η μόνη ιδιοτιμή της με $|\lambda| = 1$ είναι η $\lambda = 1$, και έχει πολλαπλότητα 1 (η απόδειξη παραλείπεται).

Από το θεώρημα αυτό σε συνδυασμό με όσα έχουμε δει μέχρι τώρα έπεται ότι:

<u>Θεώρημα 4</u>

Αν μία στοχαστική μήτρα P είναι κανονική τότε:

(α) Είναι εργοδική.

(β) Η P^∞ έχει όλες τις γραμμές της ίδιες.

Απόδειξη

Το (α) προκύπτει εύκολα από τα θεωρήματα 3 και 2.

Το (β) είναι πολύ σημαντικό. Ισχύει διότι $P^{\infty} = \lim_{n\to\infty} P^{n} = \left(\lim_{n\to\infty} P^{n-1}\right) \cdot P = P^{\infty} \cdot P$. Άρα κάθε γραμμή π_i της P^{∞} ικανοποιεί τη σχέση $\pi_i = \pi_i P$, που όμως σύμφωνα με το θεώρημα έχει μόνο μία λύση (το μοναδικό ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda = 1$, για το οποίο αν $\pi_i = x$, $\sum_j x_j = 1$).

Έτσι $P^{\infty} = \begin{pmatrix} \pi \\ \ldots \\ \pi \\ \ldots \\ \pi \\ \ldots \\ \pi \end{pmatrix}$, όπου π το ιδιοδιάνυσμα της P για λ=1 με άθροισμα στοιχείων τη μονάδα.

Όμως σε αυτήν την περίπτωση για οποιαδήποτε αρχική κατανομή π^0 είναι $\pi^{\infty} = \pi^0 \cdot (P^{\infty}) = \pi^0 \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ \ldots \\ \pi \\ \ldots \end{pmatrix} = \pi$. Δηλαδή η τελική κατανομή π^{∞} <u>δεν</u> εξαρτάται από το πως άρχισε η διαδικασία.

□

Παράδειγμα

Έστω η μήτρα μετάβασης $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Καταρχάς, η μήτρα αυτή είναι κανονική (γιατί;).

Για $\lambda = 1$ το ιδιοδιάνυσμα $(\pi, 1-\pi)$ ικανοποιεί

$$(\pi, 1-\pi) = (\pi, 1-\pi)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(1/2\,\pi + 1 - \pi,\ 1/2\,\pi\right)$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$\frac{3}{2}\pi = 1 \Rightarrow \pi = \frac{2}{3}.$$

Άρα $P^{\infty} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Έτσι, αν π.χ. $\pi^{0} = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ τότε $\pi^{\infty} = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ που

είναι ανεξάρτητο από το π^{0}.

□

Συμπεραίνουμε γενικά ότι αν μια μήτρα P είναι κανονική, τότε η αλυσίδα Markov οδηγείται πάντα σε ισορροπία (steady state), όπου το διάνυσμα π^{∞} είναι η μοναδική λύση του συστήματος:

$$x\,P = x$$

$$\sum_{i \in S} X_i = 1$$

όπου $\pi^{\infty} = x$.

Το σύστημα έχει m+1 εξισώσεις και m αγνώστους. Οι $x\,P = x$ ονομάζονται εξισώσεις ισορροπίας (balance equations), ενώ η $\sum_{i} X_i = 1$ ονομάζεται εξίσωση κανονικοποίησης (normalization equation). Για να βρούμε τη λύση π^{∞} του συστήματος χρησιμοποιούμε m-1 εξισώσεις ισορροπίας και την εξίσωση κανονικοποίησης.

2.3 Πιθανότητες πρώτης μετάβασης – Αναμενόμενος χρόνος

Έστω $X_0 = i$, δηλαδή η αλυσίδα ξεκινάει από μία κατάσταση i, και ενδιαφερόμαστε για το πότε θα φτάσει η X για πρώτη φορά σε μια κατάσταση j. (Αν $j = i$ ενδιαφερόμαστε για το πότε θα επιστρέψει στην αρχική κατάσταση). Για την εξέταση αυτού του θέματος, είναι χρήσιμο να ορίσουμε το μέγεθος

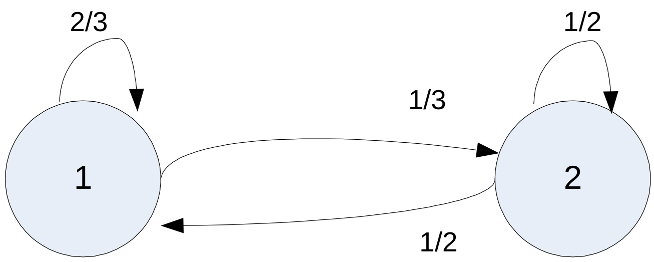
$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_\kappa \neq j \text{ για } 1 \leq \kappa < n \mid X_0 = i)$$

που είναι η πιθανότητα να γίνει η <u>πρώτη</u> μετάβαση στην κατάσταση j την περίοδο n (σε n βήματα) δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση ήταν η i.

Προφανώς για n=0, $f_{ii}^{(0)} = P_{ii}^{(0)} = 1$ και $f_{ij}^{(0)} = 0,\ i \neq j$.

<u>Παραδείγματα</u>

(α) Στον πίνακα μετάβασης $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ αντιστοιχεί το διάγραμμα καταστάσεων (όπου κάθε κατάσταση αντιστοιχεί σε έναν κόμβο και πάνω στις κατευθυνόμενες ακμές σημειώνονται οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης)



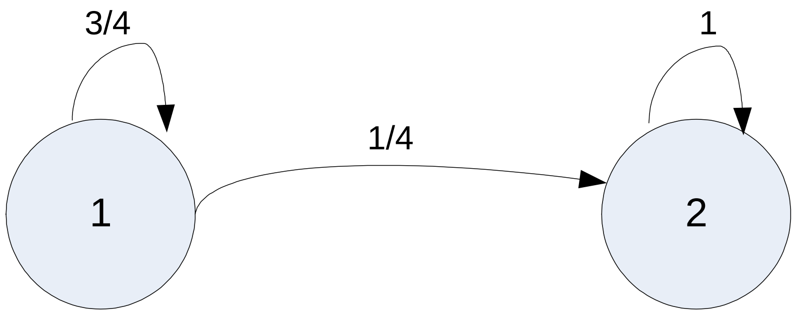
Από αυτό συμπεραίνουμε ότι:

$f_{11}^{(1)} = P_{11} = 2/3$, ενώ $f_{11}^{(n)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2}, \quad n \geq 2$

(για να υπάρξει πρώτη μετάβαση στην 1 ύστερα από ακριβώς n βήματα πρέπει να πάμε αμέσως στην κατάσταση 2, να παραμείνουμε εκεί για n-2 βήματα και ύστερα να επιστρέψουμε στην 1).

$f_{12}^{(n)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}, \quad n \geq 1$ κ.λ.π.

(β) Έστω το διάγραμμα:



$f_{11}^{(0)} = P_{11}^{(0)} = 1$ (εξ' ορισμού)

$f_{11}^{(1)} = 3/4$ και $f_{11}^{(2)} = 0$ (γιατί;)

$$f_{12}^{(n)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times \frac{1}{4}, \quad n \geq 1$$

$f_{21}^{(n)} = 0$, $f_{22}^{(0)} = f_{22}^{(1)} = 1$ και $f_{22}^{(2)} = 0$

$\square$

Μεταξύ των $f_{ij}^{(n)}$ και $P_{ij}^{(n)}$ υπάρχει η σχέση:

$$P_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(n-1)} + f_{ij}^{(2)} P_{jj}^{(n-2)} + \ldots + f_{ij}^{(n-1)} P_{jj} + f_{ij}^{(n)}$$

που ισχύει για τον εξής λόγο:

Είδαμε ότι $P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$, δηλαδή η πιθανότητα να βρεθεί το Χ στην j στον χρόνο n με δεδομένο ότι ξεκινάει στην i. Όμως το γεγονός $\{X_n = j\}$ μπορεί να αναλυθεί στα γεγονότα $\{X_n = j, X_\kappa = j, X_\lambda \neq j \quad \text{για } \lambda \neq \kappa\}$ για $\kappa = 1, 2, .., n$ που είναι αμοιβαία αποκλειόμενα. Επομένως η $P_{ij}^{(n)}$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των γεγονότων αυτών, που μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει ότι αντιστοιχούν στους όρους του αθροίσματος του δεξιού σκέλους της εξίσωσης.

Από την παραπάνω σχέση και την γνώση των $P_{jj}^{(\kappa)}$ και των $P_{ij}^{(\kappa)}, k = 1,2,...n$ μπορεί κανείς να υπολογίσει αναδρομικά τα $f_{ij}^{(n)}$ ως εξής :

$f_{ij}^{(1)} = P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$

$$f_{ij}^{(2)} = P_{ij}^{(2)} - f_{ij}^{(1)} P_{jj}$$

$$f_{ij}^{(3)} = P_{ij}^{(3)} - f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(2)} - f_{ij}^{(2)} P_{jj}$$

. . . .

$$f_{ij}^{(n)} = P_{ij}^{(n)} - f_{ij}^{(1)} P_{jj}^{(n-1)} - \ldots - f_{ij}^{(n-2)} P_{jj}^{(2)} - f_{ij}^{(n-1)} P_{jj}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να επιλυθεί και αναλυτικά με τη μέθοδο των Ροπογεννητριών, κάτι όμως που δεν θα εξετάσουμε.

<u>Παράδειγμα</u>

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Βρείτε τα $f_{11}^{(n)} \quad n = 1, 2, 3$

Είναι $f_{ij}^{(1)} = P_{ij}^{(1)}$. Άρα, $f_{11}^{(1)} = P_{11} = 0.8$.

Το $f_{11}^{(2)} = P_{11}^{(2)} - f_{11} P_{11} = P_{11}^{(2)} - (P_{11})^2 = 0.70 - 0.8^2 = 0.06$.

$$f_{11}^{(3)} = P_{11}^{(3)} - f_{11}^{(1)} P_{11}^{(2)} - f_{11}^{(2)} P_{11} = (0.7 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.45) - 0.7 \cdot 0.8 - 0.8 \cdot 0.06 = 0.042$$

□

Προφανώς, ο υπολογισμός των $f_{ij}^{(n)}$ είναι αρκετά επίπονος ιδιαίτερα εάν το n είναι αρκετά μεγάλο.

Το άθροισμα $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ μας δείχνει με ποια πιθανότητα θα υπάρξει κάποια μετάβαση μέσα στο χρόνο (είτε πρώτη μετάβαση σε ένα βήμα, είτε πρώτη μετάβαση σε δύο βήματα, είτε πρώτη μετάβαση σε τρία βήματα, κλπ...). Δεν είναι απαραίτητο να ισχύει πάντα ότι $f_{ij} = 1$. Αν $f_{ij} = 1$, θα υπάρξει οπωσδήποτε κάποια μετάβαση, αν όμως $f_{ij} < 1$, υπάρχει περίπτωση να μην υπάρξει ποτέ μετάβαση στην j (αυτό συμβαίνει στις περιπτώσεις όπου υπάρχει κάποια πιθανότητα να οδηγηθούμε σε μια κατάσταση k που δεν μπορεί με τίποτα να μας οδηγήσει τελικά στην j). Αντίστοιχα, αν $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$ υπάρχει περίπτωση να μην επιστρέψουμε ποτέ στην κατάσταση απ' όπου ξεκινήσαμε.

Ορισμός

Μια κατάσταση i ονομάζεται μεταβατική (transient) αν $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$ ενώ διαφορετικά αν $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$ ονομάζεται επαναλαμβανόμενη (recurrent).

Μια κατάσταση i ονομάζεται συγκεντρωτική (absorbing) αν $P_{ii} = 1$. Επομένως, αν μία κατάσταση i είναι συγκεντρωτική ισχύει προφανώς ότι $f_{ii} = 1$ (είναι και επαναλαμβανόμενη), ενώ $f_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$. Από τη στιγμή που εισερχόμαστε σε μία συγκεντρωτική κατάσταση δεν μπορούμε να πάμε πουθενά αλλού.

Τέλος, αν για μια κατάσταση i ισχύει ότι $P_{ii}^{(n)} = 0$ για όλα τα n που δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια κάποιου αριθμού d, τότε η i ονομάζεται περιοδική με περίοδο d, εφόσον το d είναι ο μεγαλύτερος δυνατός ακέραιος. Μία περιοδική κατάσταση είναι και επαναλαμβανόμενη.

Παραδείγματα

(α) Έστω $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Είναι $f_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{12}^{(n)} < 1$ εφόσον με πιθανότητα $1/3$ η επόμενη κατάσταση είναι η 3 που είναι συγκεντρωτική (άρα υπάρχει μη μηδενική πιθανότητα να μη μεταβούμε τελικά ποτέ στην 2). Επίσης είναι $f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} < 1$ για τον ίδιο λόγο.

Τέλος, ισχύει και $f_{22} < 1$ (γιατί;).

Όμως είναι $f_{33}^{(1)} = 1, f_{33}^{(\kappa)} = 0 \quad \kappa > 1,$ και άρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} = 1$.

Άρα οι καταστάσεις $\{1, 2\}$ είναι μεταβατικές ενώ η $\{3\}$ συγκεντρωτική και επαναλαμβανόμενη.

(β) Οι δύο καταστάσεις της $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ έχουν περίοδο 2, ενώ οι καταστάσεις της

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχουν περίοδο 4. Όλες είναι επαναλαμβανόμενες.

(γ) Οι καταστάσεις $\{1,2\}$ της $P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι μεταβατικές, ενώ η $\{3\}$ είναι επαναλαμβανόμενη.

(δ) Και οι δύο καταστάσεις της $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ είναι επαναλαμβανόμενες. Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: Αν $X_0 = 1$, η πιθανότητα να μην υπάρξει επιστροφή στην κατάσταση 1 σε καμμία από τις χρονικές στιγμές 1, 2, …, M είναι $1/2 \cdot \left(2/3\right)^{M-1}$, όπου τείνει στο 0 καθώς $M \to \infty$. Αφού $f_{11} = 1$ και επίσης (με ίδιο επιχείρημα) είναι $f_{22} = 1$.

□

Αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης

Αν και τα $f_{ij}^{(n)}$, οι πιθανότητες πρώτης μετάβασης, υπολογίζονται δύσκολα, οι αναμενόμενες τιμές των χρόνων πρώτης μετάβασης υπολογίζονται εύκολα. Συνήθως συμβολίζουμε με μ_{ij} τον αναμενόμενο χρόνο πρώτης μετάβασης ο οποίος ορίζεται:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} & \text{αν } f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 \\ \infty & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Παρατήρηση

Αν $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1$, το μ_{ij} θα πρέπει να είναι $\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} + \infty \cdot \left(1 - f_{ij}\right) = \infty$, όπου $1 - f_{ij} > 0$ είναι η πιθανότητα να μη συμβεί ποτέ μετάβαση από την i στην j.

Έτσι δικαιολογείται ο παραπάνω ορισμός. Ενδέχεται επίσης να είναι $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$ αλλά $\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} = \infty$. Αντίστοιχα ακόμη και για μία επαναλαμβανόμενη κατάσταση i μπορεί να ισχύει ότι $\mu_{ii} = \infty$, εάν το σύνολο S των καταστάσεων δεν είναι πεπερασμένο. Σε μια τέτοια περίπτωση η κατάσταση λέγεται μηδενικώς επαναλαμβανόμενη (null recurrent) διαφορετικά λέγεται θετικώς επαναλαμβανόμενη (positive recurrent). Μπορεί βέβαια να αποδειχθεί ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει αν οι καταστάσεις είναι πεπερασμένες, όπως οι περιπτώσεις που εξετάζουμε εδώ, όπου όλες οι επαναλαμβανόμενες καταστάσεις είναι θετικώς επαναλαμβανόμενες. Μια κατάσταση που είναι θετικώς επαναλαμβανόμενη και μη περιοδική ονομάζεται εργοδική. Άρα, ένας ισοδύναμος ορισμός για την εργοδική μήτρα (βλ. προηγούμενη ενότητα) είναι ότι όλες οι επαναλαμβανόμενες καταστάσεις της είναι εργοδικές.

Αν όλα τα μ_{ij} είναι πεπερασμένα, τότε ικανοποιούν την σχέση $\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik}\, \mu_{kj}$.

Αυτό ισχύει διότι για να γίνει μετάβαση από το i στο j:

-Είτε θα γίνει άμεσα με πιθανότητα P_{ij} οπότε θα χάσουμε μια μονάδα χρόνου

-Είτε θα γίνει άμεσα μετάβαση σε μία κατάσταση $k \neq j$ με πιθανότητα P_{ik} και από εκεί κάποια στιγμή θα μεταβούμε τελικά στην j. Τότε ο χρόνος θα είναι 1 συν τον αναμενόμενο χρόνο μετάβασης από την k στη j. Επομένως:

$$\mu_{ij} = \underbrace{1 \cdot P_{ij}}_{\text{μετάβαση στη j}} + \underbrace{\sum_{k \neq j} P_{ik}}_{\text{μετάβαση σε } k \neq j} \underbrace{(1 + \mu_{kj})}_{\text{συνολικός χρόνος μετάβασης}}$$

Δηλαδή, $\mu_{ij} = 1 \cdot P_{ij} + \sum_{k \neq j} P_{ik} + \sum_{k \neq j} P_{ik} \mu_{kj} = 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik} \mu_{kj}$

Εάν χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik} \mu_{kj}$ για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς καταστάσεων (N^2) i και j, τότε θα προκύψει ένα σύστημα N^2 εξισώσεων με N^2 αγνώστους μ_{ij}, το οποίο καλούμαστε να λύσουμε. Αυτό μπορούμε να το αποφύγουμε εάν μας ζητείται να υπολογίσουμε συγκεκριμένη τιμή του μ_{ij}. Μπορούμε τότε να παγιώσουμε το j και να εξετάσουμε ως αγνώστους μόνο τα $\mu_{1j}, \mu_{2j}, \ldots, \mu_{Nj}$ καθώς τα υπόλοιπα $\mu_{ij'}$ με $j' \neq j$ δεν υπεισέρχονται στις αντίστοιχες εξισώσεις. Έτσι έχουμε τελικά ένα σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους του οποίου ο χρόνος επίλυσης είναι $O(N^4)$.

<u>Παραδείγματα</u>

(α) Έστω $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τα μ_{11}, μ_{21} προκύπτει το σύστημα:

$\mu_{11} = 1 + P_{12}\, \mu_{21} \Rightarrow \mu_{11} = 1 + 1/3 \mu_{21}$

$\mu_{21} = 1 + P_{22}\, \mu_{21} \Rightarrow \mu_{21} = 1 + 1/2 \mu_{21}$

Άρα $\mu_{21} = 2, \quad \mu_{11} = 5/3$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τα μ_{12}, μ_{22} προκύπτει το σύστημα:

$\mu_{12} = 1 + P_{11}\, \mu_{12} \Rightarrow \mu_{12} = 3$

$\mu_{22} = 1 + P_{21}\, \mu_{12} \Rightarrow \mu_{22} = 1 + 3/2 = 5/2$

Παρατηρήστε ότι:

$$P^{\infty} = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$ (γνωρίζουμε ήδη πώς να την υπολογίσουμε).

Δηλαδή, $\mu_{11} = \dfrac{1}{P^{\infty}{}_{11}}$ και $\mu_{22} = \dfrac{1}{P^{\infty}{}_{22}}$.

Γενικά ισχύει ότι $\mu_{ii} = \dfrac{1}{P^{\infty}{}_{ii}}$, εφόσον η μήτρα P είναι κανονική.

(β) Έστω $P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & & \\ & 0{,}7 & 0{,}3 & \\ & & 0{,}5 & 0{,}5 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ που μπορεί να ερμηνευθεί σαν η πιθανότητα προαγωγής ενός στελέχους από ένα βαθμό ιεραρχίας στον επόμενο σε ένα έτος. Η ερώτηση είναι πόσα έτη (αναμενόμενη τιμή) χρειάζονται για να φτάσει ένα στέλεχος από τον 1^{o} στον 4^{o} βαθμό. Θέλουμε να υπολογίσουμε δηλαδή το μ_{14}.

Εδώ έχουμε:

$$\mu_{34} = 1 + 0{,}5\mu_{34} \Rightarrow \mu_{34} = 2$$

$$\mu_{24} = 1 + P_{22}\,\mu_{24} + P_{23}\,\mu_{34} \Rightarrow 0{,}3\mu_{24} = 0{,}3 \times 2 + 1 \Rightarrow \mu_{24} = 16/3$$

$$\mu_{14} = 1 + P_{11}\,\mu_{14} + P_{12}\,\mu_{24} \Rightarrow 0{,}2\mu_{24} = 1 + 0{,}2 \times 16/3 \Rightarrow \mu_{14} = 31/3$$

□

2.4 Κλάσεις Ισοδυναμίας – Κατάταξη Καταστάσεων

Τα παραπάνω παραδείγματα παρουσιάζουν ορισμένα φαινόμενα που μπορούν να αναλυθούν διαγραμματικά: Λέμε ότι η κατάσταση i <u>επικοινωνεί</u> με την j αν είναι $P_{ij}^{(n)} > 0$ (ή $f_{ij} > 0$) για κάποιο $n \geq 0$ (Προσοχή! Θεωρούμε ότι $P_{ij}^{(0)} = 0,\ i \neq j$ και $P_{ij}^{(0)} = 1,\ i = j$. Άρα κάθε κατάσταση επικοινωνεί με τον εαυτό της!) και γράφουμε $i \to j$. Αν είναι $i \to j$ <u>και</u> $j \to i$ γράφουμε $i \leftrightarrow j$. Τότε λέμε ότι οι δύο καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους.

Μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι η σχέση $\leftrightarrow$ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(α) $i \leftrightarrow i$ για κάθε i.

(β) $i \leftrightarrow j$ συνεπάγεται $j \leftrightarrow i$.

(γ) Αν $i \leftrightarrow j$ και $j \leftrightarrow k$ τότε είναι $i \leftrightarrow k$.

Για το (γ) αν $i \to j$ και $j \to k$ τότε $P_{ij}^{(m_1)} > 0$ και $P_{jk}^{(m_2)} > 0$ για κάποια m_1 και m_2. Τότε, $P_{ik}^{(m1+m2)} > P_{ij}^{(m1)} P_{jk}^{(m2)} > 0$. Επομένως, $i \to k$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $k \to i$.

□

Αυτό σημαίνει ότι η $\leftrightarrow$ είναι <u>σχέση ισοδυναμίας</u> στο σύνολο S των καταστάσεων.

Αν $[i] = \{j \mid i \leftrightarrow j\}$ δηλαδή το $[i]$ είναι ένα υποσύνολο του S που περιλαμβάνει όλες τις καταστάσεις που επικοινωνούν με το i και αντιστρόφως, τότε το $[i]$ ονομάζεται <u>κλάση ισοδυναμίας</u> της κατάστασης i.

Ισχύει προφανώς ότι αν $i \leftrightarrow j$ θα είναι $[i] = [j]$ (γιατί;) ενώ αν $i \not\leftrightarrow j$ οι κλάσεις $[i]$ και $[j]$ δεν έχουν τομή, δηλαδή $[i] \cap [j] = \emptyset$. Διότι αν υπήρχε κατάσταση $k \in [i]$ και $k \in [j]$ θα ήταν $k \leftrightarrow i$ και $k \leftrightarrow j$ και άρα $i \leftrightarrow j$, που όμως δεν μπορεί να ισχύει εφόσον $i \not\leftrightarrow j$. Επίσης προφανώς ισχύει ότι για κάθε i, $i \in [i]$ ενώ $[i] \subseteq S$. Αυτό σημαίνει ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας $[i]$ διαμερίζουν το σύνολο των καταστάσεων S, δηλαδή $\bigcup_{i \in S} [i] = S$.

Οι σχέσεις $\rightarrow, \leftrightarrow$ και οι κλάσεις ισοδυναμίας για μία συγκεκριμένη αλυσίδα Markov μπορούν να προσδιορισθούν γραφικά ως εξής:
Έστω P μια μήτρα μετάβασης.

- Κατασκευάζουμε προσανατολισμένο γράφημα με κορυφές όλες τις καταστάσεις i, j, k, … του συνόλου S.
- Προσθέτουμε πλευρές (i, j) μόνον αν $P_{ij} > 0$.

Στο γράφημα που τελικά προκύπτει:

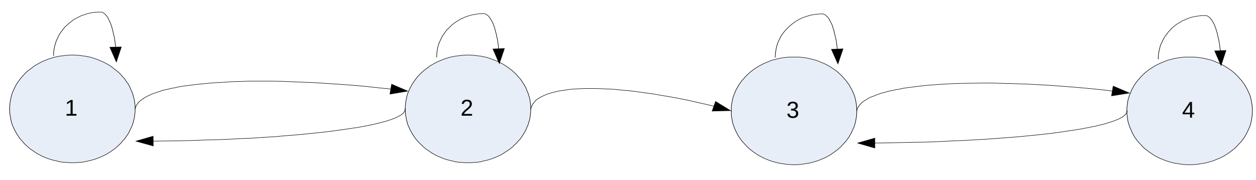
- Θα είναι $i \rightarrow j$ μόνο αν υπάρχει κάποιο μονοπάτι από i προς j.
- Θα είναι $i \leftrightarrow j$ μόνο αν υπάρχει κύκλωμα που περιλαμβάνει τις i και j.

Επομένως, οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος.

Παράδειγμα

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο γράφημα είναι:



Είναι:
$1 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 2 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3$.

Άρα $1 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 3, 3 \leftrightarrow 4$ και άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι $[1] = [2] = \{1, 2\}$ $[3] = [4] = \{3, 4\}$.

□

Η σημασία της $\leftrightarrow$ έγκειται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω $i \leftrightarrow j$

(α) Αν η i είναι επαναλαμβανόμενη, το ίδιο ισχύει και για την j.

(β) Αν η i είναι μεταβατική, το ίδιο ισχύει και για την j.

(γ) Αν η i είναι περιοδική με περίοδο d, το ίδιο ισχύει και για την j.

Η απόδειξη για το (α) και το (β) μπορεί να προκύψει εύκολα με αναγωγή σε άτοπο. Επομένως κάθε κλάση ισοδυναμίας αποτελείται από καταστάσεις που έχουν όλες την ίδια ιδιότητα.

Δένδρο Κλάσεων Ισοδυναμίας

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δεύτερο γράφημα με κορυφές τις διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας $[i], [j], \ldots$ και πλευρές $([i], [j])$ μόνο αν $i \rightarrow j$ (δηλαδή για κάθε κόμβο της πρώτης υπάρχει κάποια μετάβαση σε κάθε κόμβο της δεύτερης, όχι όμως αντιστρόφως).

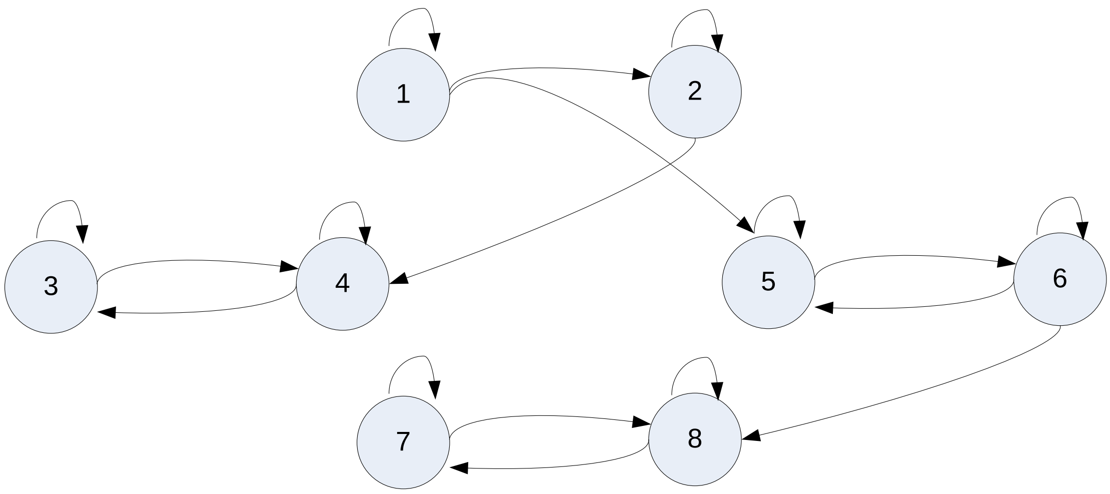
Παρατηρούμε ότι αν $([i], [j])$ είναι μια πλευρά, η $([j], [i])$ δεν μπορεί να είναι πλευρά, γιατί θα ήταν $i \rightarrow j$ και $j \rightarrow i$ οπότε θα ήταν $[i] = [j]$, δηλαδή δεν θα είχαμε δύο διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.

Με το ίδιο σκεπτικό, στο νέο γράφημα δεν υπάρχουν κυκλώματα. Επομένως, το γράφημα που προκύπτει είναι δάσος (σύνολο από δένδρα που δεν συνδέονται μεταξύ τους) ή δένδρο αν δεν υπάρχουν μεμονωμένα υποσυστήματα.

Εξετάζουμε τώρα τις κορυφές από τις οποίες δεν ξεκινά καμία πλευρά (φύλλα του δένδρου). Τέτοιες κορυφές υπάρχουν, γιατί αλλιώς θα υπήρχε κάποιο κύκλωμα. Αυτές οι κορυφές αντιστοιχούν σε επαναλαμβανόμενες καταστάσεις, ενώ οι υπόλοιπες αντιστοιχούν σε κλάσεις ισοδυναμίας με μεταβατικές καταστάσεις.

Παράδειγμα

Έστω ότι από τον πίνακα μετάβασης προκύπτει το ακόλουθο γράφημα:



Είναι:

$[1] = \{1\}$

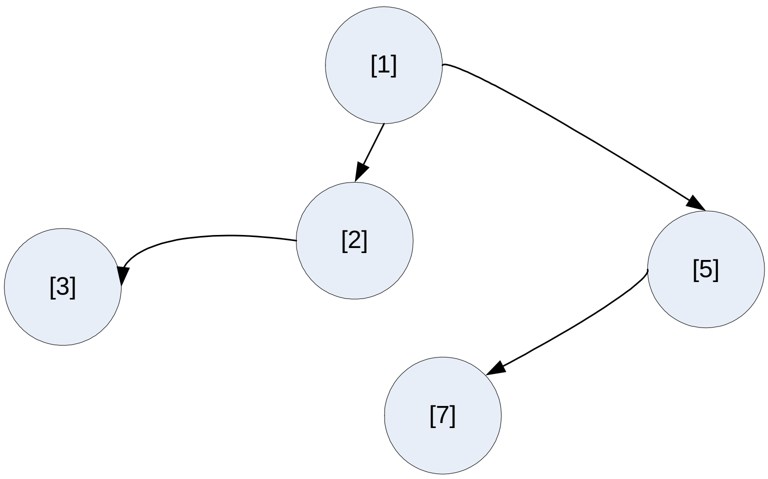
$[2] = \{2\}$

$[3] = [4] = \{3, 4\}$

$[5] = [6] = \{5, 6\}$

$[7] = [8] = \{7, 8\}$

Το γράφημα των κλάσεων ισοδυναμίας είναι:



Τα φύλλα είναι οι κλάσεις $[3]$ και $[7]$.

Επομένως οι καταστάσεις 3,4 και 7,8 είναι επαναλαμβανόμενες, ενώ οι υπόλοιπες είναι μεταβατικές.

□

2.5 Γενική δομή της τελικής μήτρας P^{∞}

Όλη η συζήτηση που θα γίνει σε αυτήν την ενότητα προϋποθέτει την ύπαρξη της μήτρας P^{∞}. Στην περίπτωση που η P τυχαίνει να είναι και κανονική, γνωρίζουμε πλέον ότι όλες οι γραμμές της είναι ίδιες καθώς και επίσης γνωρίζουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία της (πώς;). Εδώ θα εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν αναφερόμαστε σε μη κανονικά συστήματα. Είδαμε προηγουμένως ότι οι καταστάσεις που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας θα είναι είτε όλες επαναλαμβανόμενες, είτε όλες μεταβατικές. Στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι επαναλαμβανόμενες αυτές καταστάσεις (και εφόσον είναι μη περιοδικές, άρα είναι εργοδικές) αντιστοιχούν σε ένα κανονικό υποσύστημα, επομένως η τετραγωνική υπο-μήτρα της P^{∞} η οποία αντιστοιχεί σε αυτές τις καταστάσεις θα έχει όλες τις γραμμές της ίδιες (και μπορεί να υπολογισθεί από τις γνωστές εξισώσεις που αναφέρθηκαν σε προηγούμενη ενότητα)! Η δυσκολία πλέον έγκειται στο να υπολογισθούν τα υπόλοιπα στοιχεία της P^{∞}. Σε αυτό βοηθάει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω i, j καταστάσεις του συνόλου S. Ισχύει γενικά:

$$P_{ij}^{(\infty)} = \frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}, \quad \left(f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \right)$$

Απόδειξη

Το θεώρημα αυτό μπορεί να ερμηνευθεί «διαισθητικά» ως εξής:

Θεωρήστε την τροχιά της ανέλιξης, δηλαδή μια υλοποίηση των

$\tilde{X}_0 = i, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_N, \ldots$

Αν $\tilde{X}_0 = i$ με βεβαιότητα, το $P_{ij}^{(\infty)}$ είναι η πιθανότητα να βρισκόμαστε στην j μετά από «πολύ χρόνο». Μια εκτίμηση αυτού του μεγέθους δίνεται από την συχνότητα στο χρόνο της παραμονής στην j, δηλαδή τι ποσοστό του συνολικού χρόνου παραμένουμε στην j. Αν έχουμε φτάσει στο j, τότε η κατάσταση ξαναγίνεται j μετά από μ_{jj} βήματα κατά μέσο όρο, άρα η χρονική συχνότητα είναι το αντίστροφο, δηλαδή $\frac{1}{\mu_{jj}}$.

Από όλες τις δυνατές τροχιές μόνο f_{ij} από αυτές θα φτάσουν κάποτε στην j. Έτσι το μέσο ποσοστό επίσκεψης στην j είναι όντως $\frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}$. Δηλαδή η ανέλιξη θα βρεθεί ύστερα από άπειρα βήματα στην κατάσταση j με αυτήν την πιθανότητα.

□

Με βάση αυτόν τον τύπο, μπορούμε να καταλήξουμε σε δύο βασικά συμπεράσματα:

I. Αν μία κατάσταση j είναι μεταβατική (οπότε ισχύει ότι $\mu_{jj} = \infty$), τότε για κάθε i, $P_{ij}^{(\infty)} = 0$. Δηλαδή η μήτρα P^{∞} έχει όλες τις στήλες που αντιστοιχούν σε μεταβατικές καταστάσεις με μηδενικά στοιχεία μόνο.
II. Αν μία κατάσταση j είναι θετικώς επαναλαμβανόμενη (οπότε ισχύει ότι το μ_{jj} είναι πεπερασμένο), τότε για κάθε i που μπορεί να οδηγήσει στην j θα είναι $P_{ij}^{(\infty)} > 0$.

Συνοψίζοντας τις ιδιότητες των επαναλαμβανόμενων και μεταβατικών καταστάσεων είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε όλα τα στοιχεία της μήτρας P^{∞} :

I. Αν j_1 και j_2 είναι επαναλαμβανόμενες καταστάσεις που ανήκουν στην ίδια κλάση, τότε $f_{ij_1} = f_{ij_2}\ \forall i$. Επιπλέον ισχύει ότι $f_{j_2 j_1} = f_{j_2 j_2} = 1$. Άρα, για κάθε k που ανήκει και αυτή στην ίδια κλάση με τις j_1 και j_2, ισχύει ότι $P_{j_1 k}^{(\infty)} = P_{j_2 k}^{(\infty)} = \frac{1}{\mu_{kk}}$. Από εδώ προκύπτει ότι όλες οι γραμμές της υπο-μήτρας που αντιστοιχεί στις επαναλαμβανόμενες αυτές καταστάσεις της ίδιας κλάσης είναι μεταξύ τους ίδιες.
II. Αν j_1 και j_2 είναι επαναλαμβανόμενες καταστάσεις που ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις, τότε $f_{j_2 j_1} = f_{j_2 j_2} = 0$. Άρα:

$$P_{j_1 j_2}^{(\infty)} = P_{j_2 j_1}^{(\infty)} = 0.$$

Επομένως, αν θεωρήσουμε μια ανέλιξη όπου οι καταστάσεις 1,2 είναι μεταβατικές, οι 3,4 επαναλαμβανόμενες στην ίδια κλάση, και οι 5,6,7 επαναλαμβανόμενες σε μία άλλη κλάση, τότε η γενική μορφή της μήτρας P^{∞} θα είναι η ακόλουθη:

	1	2	3	4	5	6	7
1			f_{13}/μ_{33}	f_{14}/μ_{44}	f_{15}/μ_{55}	f_{16}/μ_{66}	f_{17}/μ_{77}
2			f_{23}/μ_{33}	f_{24}/μ_{44}	f_{25}/μ_{55}	f_{26}/μ_{66}	f_{37}/μ_{77}
3			$1/\mu_{33}$	$1/\mu_{44}$		0	
4	0	0	$1/\mu_{33}$	$1/\mu_{44}$			
5					$1/\mu_{55}$	$1/\mu_{66}$	$1/\mu_{77}$
6			0		$1/\mu_{55}$	$1/\mu_{66}$	$1/\mu_{77}$
7					$1/\mu_{55}$	$1/\mu_{66}$	$1/\mu_{77}$

Πρακτικά, ο υπολογισμός των f και μ για τις διάφορες καταστάσεις μπορεί να είναι επίπονος και χρονοβόρος. Ωστόσο, τα στοιχεία στις κανονικές υπο-μήτρες που προκύπτουν από τις επαναλαμβανόμενες μη-περιοδικές καταστάσεις (εδώ υπάρχουν δύο τέτοιες υπό-μήτρες, ποιες;) μπορούν να υπολογισθούν από τις εξισώσεις Ισορροπίας και Κανονικοποίησης που έχουμε δει σε προηγούμενη ενότητα (όπου σαν μήτρα P χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη υπο-μήτρα της αρχικής). Συνεπώς, μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε και τα μ_{33}, μ_{44}, μ_{55}, μ_{66} και μ_{77}. Πλέον μας μένει να υπολογίσουμε μόνον τα f που βρίσκονται στις δύο πρώτες γραμμές της μήτρας. Σύμφωνα με τα προηγούμενα συμπεράσματα έχουμε όμως:

$f_{13}= f_{14}$ και $f_{15}= f_{16}= f_{17}$

$f_{23}= f_{24}$ και $f_{25}= f_{26}= f_{27}$

Δηλαδή μας αρκεί ο υπολογισμός 4 πιθανοτήτων f για να έχουμε προσδιορίσει όλα τα στοιχεία της μήτρας P^{∞}. Εκτός των μεθόδων που ήδη έχουμε δει, μια άλλη πρακτική μέθοδος για των υπολογισμό των f βασίζεται στην παρατήρηση ότι η P^{∞}, εκτός από την σχέση γραμμών $P^{\infty}P = P^{\infty}$, ικανοποιεί και την σχέση στηλών $PP^{\infty} = P^{\infty}$. Εκμεταλλευόμενοι αυτήν την σχέση μπορούμε για την συγκεκριμένη περίπτωση να δημιουργήσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους f_{13}, f_{23} και ένα άλλο 2x2 σύστημα με δύο αγνώστους f_{15}, f_{25} .

<u>Ενδεικτικά</u>:

για το πρώτο σύστημα, η πρώτη εξίσωση θα προκύψει αν πολλαπλασιάσουμε την 1^{η} γραμμή της μήτρας P με την 3^{η} στήλη της P^{∞} και αυτό το γινόμενο θα πρέπει να είναι ίσο με το στοιχείο $P_{13}^{(\infty)}$. Δηλαδή:

$$P_{11}\frac{f_{13}}{\mu_{33}}+P_{12}\frac{f_{23}}{\mu_{33}}+P_{13}\frac{1}{\mu_{33}}+P_{14}\frac{1}{\mu_{33}}=\frac{f_{13}}{\mu_{33}}$$

Ενώ η δεύτερη εξίσωση θα είναι:

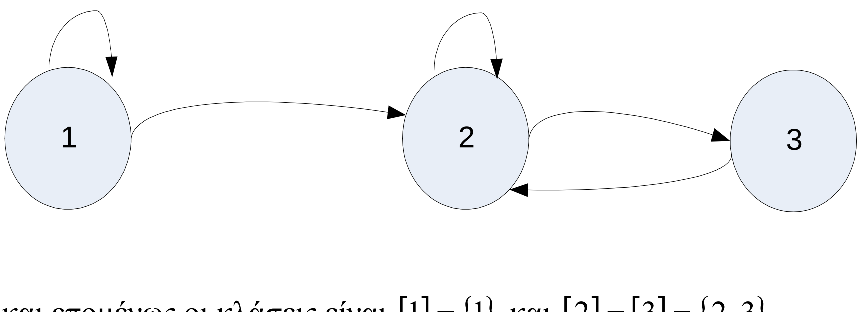
$$P_{21}\frac{f_{13}}{\mu_{33}}+P_{22}\frac{f_{23}}{\mu_{33}}+P_{23}\frac{1}{\mu_{33}}+P_{24}\frac{1}{\mu_{33}}=\frac{f_{23}}{\mu_{33}}$$

<u>Παραδείγματα</u>

(α) Έστω $P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

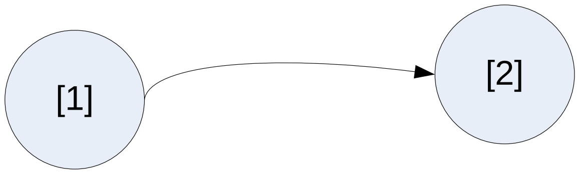
Προσδιορίστε τη μήτρα P^{∞} .

Το αρχικό γράφημα είναι



και επομένως οι κλάσεις είναι $[1]=\{1\}$ και $[2]=[3]=\{2,3\}$.

Το νέο γράφημα είναι



και άρα οι $\{2,3\}$ είναι επαναλαμβανόμενες και μη περιοδικές (εργοδικές) ενώ η 1 μεταβατική.

Η P^{∞} υπάρχει και σύμφωνα με όσα είπαμε είναι της μορφής $\begin{pmatrix} 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

Από την $P^{\infty}\, P' = P^{\infty}$ έπεται ότι $x_2 = 2/3$ ενώ $y_2 = 1/3$, όπου $P' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Επομένως, $\mu_{22} = 3/2$ και $\mu_{33} = 3$.

Για το x_1 λύνουμε την εξίσωση:

$1/2\, x_1 + 1/2\; 2/3 = x_1 \Rightarrow x_1 = 2/3$

Άρα $y_1 = 1/3$.

□

(β) Έστω ότι η P είναι η ακόλουθη 7x7 μήτρα:

1/2	1/4	0	0	1/4	0	0
1/4	1/2	1/4	0	0	0	0
0	0	1/2	1/2	0	0	0
0	0	1/3	2/3	0	0	0
0	0	0	0	1/3	1/3	1/3
0	0	0	0	1/2	1/6	1/3
0	0	0	0	1/3	1/6	1/2

Αφού σχεδιάσουμε τα δύο διαγράμματα και εντοπίσουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας καταλήγουμε τελικά στην ακόλουθη μήτρα P^{∞} :

	1	2	3	4	5	6	7
1			0.133	0.200	0.248	0.152	0.267
2			0.267	0.400	0.124	0.076	0.133
3			0.4	0.6		0	
4	0	0	0.4	0.6			
5					0.371	0.229	0.400
6			0		0.371	0.229	0.400
7					0.371	0.229	0.400

Το πώς προκύπτει αυτή η μήτρα αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

□

2.6 Συναρτήσεις Κόστους

Έστω $j=1,\dots,M$ οι καταστάσεις σε μία αλυσίδα Markov. Συχνά σε κάθε κατάσταση συνδέουμε ένα κόστος (ή κέρδος αναλόγως το πρόβλημα) $C(j)$, και έτσι στον χρόνο n έχουμε κόστος $C(X_n)$.

Αν η ανέλιξη ξεκινήσει από μια κατάσταση i τότε το αναμενόμενο κόστος του χρόνου n θα είναι: $E\{C(X_n) \mid X_0 = i\} = \sum_{j=1}^{M} C(j) \cdot P_{ij}^{(n)}$.

Επίσης συχνά ενδιαφερόμαστε για το <u>διαχρονικό μέσο κόστος</u> $\overline{C}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} C(X_n)$ και την αναμενόμενη τιμή του η οποία είναι:

$$E(\overline{C}_N) = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(C(X_n) \mid X_0 = i)\right\} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} C(j) P_{ij}^{(n)} = \sum_{j=1}^{M} C(j)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_{ij}^{(n)}\right).$$

Έτσι βλέπουμε ότι η παράσταση $(\overline{P}_N)_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P_{ij}^{(n)}$ παρουσιάζει ενδιαφέρον.

Προφανώς το $(\overline{P}_N)_{ij}$ είναι το i-j στοιχείο της μήτρας $\overline{P}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P^n$.

Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι

$$\overline{P}_N \cdot P = \overline{P}_N + \frac{P^{N+1} - P}{N} \quad (1)$$

Όμως για $N \to \infty$, η P^{N+1} είναι φραγμένη από τη μήτρα $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$, άρα $\lim_{N\to\infty} \frac{P - P^{N+1}}{N} = 0$. Δηλαδή, αν εφαρμόσουμε όρια στην σχέση (1) βλέπουμε ότι το $\lim_{N\to\infty} \overline{P}_N = \overline{P}$ υπάρχει και ικανοποιεί την σχέση:

$$\overline{P} P = \overline{P}$$

Άρα το $\overline{P}_{N_i}$ που είναι η i-στή γραμμή της $\overline{P}_N$ έχει σαν όριο την i-στή της $\overline{P}$, που ικανοποιεί την εξίσωση $\overline{P} P = \overline{P}$.

Αν τώρα το σύστημα εξισώσεων $xP = x, \sum_i x_i = 1$ έχει μοναδική λύση, η λύση αυτή ταυτίζεται με τα $\lim_{N\to\infty} \overline{P}_{N\,ij} = \pi_{ij}^{\infty}$ για τα j. Προσοχή! Ενδέχεται η εξίσωση αυτή να έχει μοναδική λύση, αλλά η μήτρα P να μην είναι κανονική, ούτε καν εργοδική!

Παρατηρούμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση (μοναδικής λύσης) όλες οι γραμμές είναι ίδιες, δηλαδή $\pi_{ij}^{\infty} = \pi_j^{\infty}$ για κάθε i, και άρα το $\pi^{\infty} = \left(\pi_1^{\infty}, \ldots, \pi_M^{\infty}\right)$ δίνει κάθε γραμμή της $\overline{P}$.

Έχοντας βρει τα π^{∞} μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης $\overline{C} = \lim_{N\to\infty} E\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty} C(X_n)\right\} \overset{\omega\varsigma\ M}{=} \sum_{j=1} \pi_j^{\infty} C(j)$ που μας δίνει την αναμενόμενη τιμή του μέσου διαχρονικού κόστους για άπειρες περιόδους. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η τιμή του $\overline{C}$ είναι ανεξάρτητη από την αρχική κατάσταση όταν το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση (αυτό εξασφαλίζεται όταν η μήτρα P είναι κανονική, αλλά όχι μόνο τότε…), ενώ διαφορετικά εξαρτάται και από την αρχική κατάσταση της αλυσίδας.

Παραδείγματα

(α) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C(1) = 10 \quad C(2) = -20$

οπότε $E\{\cdots\} = 10\, {}^1\!/_2 + (-20)\frac{1}{2} = -5$

εφόσον η μόνη λύση της $xP = x$ είναι $x = \left({}^1\!/_2, {}^1\!/_2\right)$.

Παρατηρήστε εδώ ότι η μήτρα P δεν είναι εργοδική (άρα ούτε κανονική), άρα η P^{∞} δεν υπάρχει! Υπάρχει όμως η $\overline{P}$ …

(β) $P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$

Τότε, $\pi^{\infty} = (0.6\,, 0.4)$.

Αν $\quad C(1) = 1000 \quad C(2) = 0$ τότε $\overline{C} = 1000 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 = 600$

□

Πολλές φορές ενδιαφέρεται κανείς για το προεξοφλημένο αναμενόμενο κόστος (κέρδος) (όταν ξεκινάμε από μία κατάσταση i, μέχρι την περίοδο N και για επιτόκιο απόδοσης ρ% στην περίοδο):

$$V(i,N) = E\left\{ \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(1+\rho)^n} C(X_n) \mid X_0 = i \right\}$$

που ουσιαστικά είναι η αναμενόμενη τιμή της παρούσας αξίας του συνολικού διαχρονικού κόστους (όχι της μέσης τιμής) μέχρι την περίοδο N.

Είναι όμως:

$$V(i,N) = C(i) + \sum_{j=1}^{M} P_{ij} \cdot E\left\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{C(X_n)}{(1+\rho)^n} \mid X_1 = j \right\} = C(i) + \frac{1}{1+\rho} \sum_{j=1}^{M} P_{ij} E\left\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{C(X_n)}{(1+\rho)^{n-1}} \mid X_1 = j \right\}$$

Παρατηρούμε ότι $E\left\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{C(X_n)}{(1+\rho)^{n-1}} \mid X_1 = j \right\} = V(j, N-1)$

οπότε είναι $V(i,N) = C(i) + \frac{1}{1+\rho} \sum_{j=1}^{M} P_{ij} \; V(j, N-1)$

ή σε διανυσματική μορφή

$$V(N) = C + \frac{1}{1+\rho} P \cdot V(N-1)$$

όπου $V(N) = \begin{pmatrix} V(1,N) \\ V(2,N) \\ V(M,N) \end{pmatrix}$ και $C = \begin{pmatrix} C(1) \\ . \\ . \\ C(M) \end{pmatrix}$.

Αποδεικνύεται ότι το όριο $\lim_{N \to \infty} V(N) = V$ υπάρχει και ικανοποιεί τη σχέση $\left(I - \frac{1}{1+\rho} P \right) \cdot V = C$, ενώ είναι προφανές ότι το προεξοφλημένο αναμενόμενο κόστος (σε αντίθεση με το αναμενόμενο μέσο) εξαρτάται από την αρχική κατάσταση i.

Παραδείγματα

(α) $P=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ $\quad \rho=0.1111\ldots$

οπότε $\frac{1}{1+\rho}=0.9$

Το V ικανοποιεί τη σχέση $\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-0.9\cdot\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}\right]\cdot V=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

και άρα $V=\begin{pmatrix}6.727\\ 4.909\end{pmatrix}$

(β) Υπολογίστε τα $V(0), V(1), V(2)$. Είναι $V(0)=C=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$.

Το $V(1)$ ικανοποιεί την $V(1)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+0.9\cdot\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.72\\ 0.27\end{pmatrix}$

και $V(2)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+0.9\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.72\\ 0.27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.287\\ 0.635\end{pmatrix}$

(γ) Υπολογίστε τα $V(1), V(2)$ για $\rho=0$.

Είναι πάλι $V(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $\quad V(1)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.8\\ 0.3\end{pmatrix}$

$V(2)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.8\\ 0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.50\\ 0.75\end{pmatrix}$

□

2.7 Διαδικασία Αποφάσεως Markov

2.7.1 Πεπερασμένος Ορίζοντας

Θεωρούμε ότι σε κάποιο μοντέλο που περιγράφεται από πεπερασμένες καταστάσεις i=1,2, …M μπορούμε να <u>παρέμβουμε</u> στις μήτρες μετάβασης επιλέγοντας κάποια <u>δράση</u> $d = 1, 2, .., D$. Έτσι πλέον έχουμε D μήτρες μετάβασης P_d, που προσδιορίζουν τις διάφορες πιθανότητες μετάβασης ανάλογα με το ποια δράση d έχει επιλεγεί. Το κόστος (όφελος) ανά χρονική στιγμή είναι πλέον συνάρτηση όχι μόνο της κατάστασης που βρισκόμαστε, αλλά και του χρόνου (χρονικού ορίζοντα) καθώς και της δράσης που έχει επιλεγεί, δηλαδή είναι $C(i, d, N)$ (εάν βρισκόμαστε στην κατάσταση i και επιλέγουμε δράση d, οπότε οι πιθανότητες μετάβασης σε κάποια άλλη κατάσταση καθορίζονται από την μήτρα P_d).

Μια <u>στρατηγική</u> δ προσδιορίζει ποια δράση d πρέπει να επιλεγεί (σύμφωνα με την στρατηγική) για κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή (ή χρονικό ορίζοντα) και σαν συνάρτηση της κατάστασης. Είναι δηλαδή $\delta(i, N) = d$ που σημαίνει ότι η στρατηγική είναι μία συνάρτηση $\delta : S \times T \to D$ (όπου το D είναι το σύνολο των δράσεων).

<u>Παράδειγμα</u>

Μια μηχανή είτε λειτουργεί ικανοποιητικά, είτε λειτουργεί ελαττωματικά, είτε καθόλου (καταστάσεις $i = 1, 2, 3$ αντίστοιχα).

Το όφελος είναι $5, 3, 0$ μονάδες ανά περίοδο, ανάλογα με την κατάσταση. Οι δράσεις είναι $d = 1, 2, 3$ όπου: 1:Καμία παρέμβαση 2:Συντήρηση μηχανής 3:Ριζική επιδιόρθωση μηχανής.

Το κόστος των δράσεων είναι $0, -1, -5$ αντίστοιχα. Μία στατηγική (ανεξάρτητη του χρόνου) είναι π.χ $\delta(1) = 1 \quad \delta(2) = 2 \quad \delta(3) = 3$, δηλαδή όποτε η μηχανή λειτουργεί ικανοποιητικά να μην παρεμβαίνουμε καθόλου, όποτε λειτουργεί ελαττωματικά να την συντηρούμε και όποτε δεν λειτουργεί καθόλου να την επιδιορθώνουμε ριζικά (άλλη στρατηγική θα μπορούσε να είναι η $\delta(1) = 1 \quad \delta(2) = 1 \quad \delta(3) = 3$). Σε περίπτωση που εφαρμοστεί η στρατηγική δ, η μήτρα μετάβασης προκύπτει από τις επιμέρους μήτρες P_d.

Έστω π.χ.:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για την συγκεκριμένη στρατηγική δ προκύπτει η μήτρα μετάβασης (γιατί;):

$P_\delta = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ενώ το κόστος ανά περίοδο είναι $C(\delta) = \begin{pmatrix} 5-0 \\ 3-1 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

(εξαρτάται μόνο από την κατάσταση).

Αν το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι $\rho = 0.10$, τότε το άπειρο προεξοφλημένο αναμενόμενο όφελος V_δ ικανοποιεί τη σχέση $V_\delta = C_\delta + \frac{1}{1{,}1} P_\delta V_\delta$ σύμφωνα με όσα είπαμε στην προηγούμενη ενότητα,

ή

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1.1}\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] V_\delta = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_\delta = \begin{pmatrix} 40.25 \\ 37.21 \\ 31.59 \end{pmatrix}$$

Το αναμενόμενο μέσο διαχρονικό όφελος χωρίς προεξόφληση βρίσκεται ως εξής:

Λύνουμε το σύστημα $x \cdot P_\delta = x$ με όλα τα στοιχεία του x να αθροίζουν στη μονάδα.

Το σύστημα έχει μοναδική λύση $x = \left(\frac{10}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{15}\right)$, άρα:

$$\overline{C} = \frac{10}{15} \cdot 5 + \frac{4}{15} \cdot 2 - \frac{1}{15} \cdot 5 = \frac{53}{15}.$$

□

Το φυσικό πρόβλημα που θέλει να λύσει κανείς είναι να βρει τη <u>βέλτιστη στρατηγική</u> με κριτήριο την μεγιστοποίηση του αναμενόμενου οφέλους, προεξοφλημένου ή όχι, για πεπερασμένο ή άπειρο ορίζοντα. Η σημασία του απείρου ορίζοντα έγκειται στο ότι η βέλτιστη στρατηγική είναι απλούστερη από αυτή του πεπερασμένου ορίζοντα και προσεγγίζει ικανοποιητικά το βέλτιστο όφελος για σχετικά μεγάλους ορίζοντες.

Για <u>πεπερασμένο ορίζοντα</u> η βέλτιστη στρατηγική βρίσκεται με δυναμικό προγραμματισμό (είτε θέλουμε να υπολογίσουμε το προεξοφλημένο ή το μέσο όφελος-κόστος).

Έστω $V(i,N)$ το βέλτιστο (μέγιστο προεξοφλημένο αναμενόμενο όφελος) αν $X_0 = i$ και για χρονικό ορίζοντα N περιόδων, δηλαδή:

$$V(i,N) = \max_{\delta} E\left\{\sum_{n=0}^{N} \frac{C(x_n, \delta(x_n, N-n))}{(1+\rho)^n} \mid X_0 = i\right\}.$$

Θέλουμε να βρούμε για ποια στρατηγική δ προκύπτει αυτό το μέγιστο.

Μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι η εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού που δίνει το $V(i,N+1)$ είναι:

$$V(i,N+1) = \max_{d \in D}\left\{C(i,d) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(d) V(j,N)\right\}.$$

Η βέλτιστη δράση για $X_0 = i$ και χρονικό ορίζοντα $N+1$ δίνεται από το d που ικανοποιεί το max. Δηλαδή, ξεκινώντας από μία κατάσταση i θέλουμε να προσδιορίσουμε για ποια δράση d θα μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα του οφέλους που προκύπτει από αυτή τη δράση <u>συν</u> το μέγιστο προεξοφλημένο αναμενόμενο όφελος που αντιστοιχεί σε μία κατάσταση j και για ορίζοντα N, αν μεταβούμε από την i στην j με πιθανότητα που καθορίζει η μήτρα μετάβασης P_d. Προφανώς για να λυθεί η εξίσωση ΔΠ χρειάζεται να υπολογίσουμε το $V(i,0)$, το οποίο όμως υπολογίζεται πολύ εύκολα..

<u>Παράδειγμα</u>

Στο προηγούμενο παράδειγμα :

Για N=0:

$$V(i,0)=\max_{d=1,2,3} C(i,d)=\max_{d}\{\text{Κέρδος}(i)-\text{Κόστος}(d)\}$$

Άρα:

$$V(1,0)=\max_{d}\{5-0,\ 5-1,\ 5-5\}=5$$

$$V(2,0)=\max_{d}\{3-0,\ 3-1,\ 3-5\}=3$$

$$V(3,0)=\max_{d}\{0-0,\ 0-1,\ 0-5\}=0$$

Πράγμα που δείχνει ότι $d=1$ σε κάθε περίπτωση, δηλαδή δεν πρέπει να γίνει καμία παρέμβαση στην μηχανή.

Άρα $V(i,0)=\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}$.

Για N=1:

$$V(i,1)=\max_{d=1,2,3}\left\{C(i,d)+\frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(d)V(j,0)\right\}$$

ή

$$V(1,1)=\max_{d=1,2,3}\left\{C(1,d)+\frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{3}P_{ij}(d)V(j,0)\right\}\overset{\text{Για }\rho=0.1}{=}\max\left\{5+\frac{1}{1.1}(0.7\cdot5+0.2\cdot3+0.1\cdot0),\right.$$

$$\left.4+\frac{1}{1.1}(0.9\cdot5+0.1\cdot3),\quad 0+\frac{5}{1.1}\right\}=\max\{8.73\quad 8.36\quad 4.54\}$$

Άρα $V(1,1)=8.73$ και $\delta(1,1)=1$, δηλαδή η καλύτερη δράση είναι η 1.

Αντίστοιχα είναι:

$$V(2,1)=\max\left\{3-0+\frac{1}{1.1}\{0.6\cdot3\},3-1+\frac{1}{1.1}(0.5\cdot5+0.5\cdot3),3-5+\frac{5}{1.1}\right\}$$

$$=\max\{4.63\quad 5.64\quad 2.54\}=5.64 \text{ και } \delta(2,1)=2$$

$$V(3,1)=\max\left\{0,\ 0-1,\ 0-5+\frac{5}{1.1}\right\}=0 \text{ και } \delta(3,1)=1$$

<u>Για N=2:</u>

$$V(1,2)=\max\left\{5+\frac{1}{1.1}(0.7\cdot 8.73+0.2\cdot 5.64),\, 4+\frac{1}{1.1}(0.9\cdot 8.73+0.1\cdot 5.64),\, 0+\frac{8.73}{1.1}\right\}$$

$$=\max\{11.58\quad 11.66\quad 7.94\}=11.66 \qquad \delta=(1,2)=2$$

$$V(2,2)=\max\left\{3+\frac{1}{1.1}0.6\cdot 5.64,\quad 2+\frac{1}{1.1}(0.5\cdot 8.73+0.5\cdot 5.64),\quad -2+\frac{8.73}{1.1}\right\}$$

$$=\max\{6.08\quad 8.53\quad 5.93\}=8.53 \qquad \delta(2,2)=2$$

$$V(3,2)=\max\left\{0+\frac{0}{1.1},\quad -1+\frac{0}{1.1},\quad -5+\frac{8.73}{1.1}\right\}$$

$$=\max\{0\quad -1\quad 2.94\}=2.94 \qquad \delta(3,2)=3$$

Επιβεβαιώστε ότι $\delta(i,2)=\delta(i,3)$ για $i=1,2,3$.

□

Η παραπάνω μέθοδος εφαρμόζεται είτε για προεξοφλημένο είτε για μη προεξοφλημένο αναμενόμενο όφελος. Στη δεύτερη περίπτωση θέτουμε απλώς $\rho=0$, και η υπόλοιπη διαδικασία είναι ακριβώς η ίδια. Προφανώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο και όταν θέλουμε να <u>ελαχιστοποιήσουμε</u> το προεξοφλημένο αναμενόμενο <u>κόστος</u> για πεπερασμένο ορίζοντα, βάζοντας min αντί για max.

2.7.2 Άπειρος Ορίζοντας

Για <u>άπειρο χρονικό ορίζοντα</u> θέλουμε να βρούμε την βέλτιστη στρατηγική $\delta(i, N)$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η βέλτιστη στρατηγική είναι ανεξάρτητη του χρόνου (stationary policy) όταν ο ορίζοντας είναι μεγάλος και όταν αναφερόμαστε σε αναμενόμενο προεξοφλημένο (ή μη) όφελος (ή κόστος) , είναι δηλαδή $\delta(i, N_1) = \delta(i, N_2) = \delta(i) \qquad N_1 \neq N_2$.

Στην περίπτωση άπειρου ορίζοντα με προεξοφλημένο όφελος θέτουμε

$$V(i) = \max_d E\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C(X_n, \delta(X_n))}{(1+\rho)^n} \mid X_0 = i\right\}.$$

Μπορεί πάλι να επιβεβαιωθεί ότι η $V(i)$ ικανοποιεί την εξίσωση ΔΠ:

$$V(i) = \max_{d=1,2,..,D}\left\{C(i,d) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(d)V(j)\right\}.$$

Η εξίσωση αυτή ερμηνεύεται ως εξής: έστω ότι από την αρχική κατάσταση i επιλέγεται κάποια δράση d, και γίνεται μία μετάβαση στην j (σύμφωνα με την μήτρα P_d). Το αναμενόμενο κόστος είναι: $C(i, d)$ για την μηδενική περίοδο <u>συν</u> το προεξοφλημένο όφελος με έναρξη $X_1 = j$ και με στάθμιση $P_{ij}(d)$.

Η όλη διαδικασία πρέπει να συνεχισθεί κατά τον βέλτιστο τρόπο και άρα το αναμενόμενο όφελος είναι $V(j)$. Προφανώς η καλύτερη d βελτιστοποιεί το $C(i, d)$ συν το αναμενόμενο όφελος $V(j)$, προεξοφλημένο με $\frac{1}{1+\rho}$ και σταθμισμένο με το $P_{ij}(d)$.

Δεν είναι προφανές πως λύνεται η παραπάνω εξίσωση ΔΠ, αντίθετα με τις προηγούμενες, που ίσχυαν για πεπερασμένο ορίζοντα. Θα εξετάσουμε εδώ μερικές από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση.

<u>Μέθοδος Προσέγγισης Αξίας</u> (value iteration)

Έστω πρόβλημα ορίζοντα N και βέλτιστης αξίας

$$V(i,N) = \max_{\delta} E\left\{\sum_{n=0}^{N} \frac{C(x_n,\delta)}{(1+\rho)^n} \mid X_0 = i\right\}$$

Ισχύει ότι $V(i,N) = \max_{d}\left\{C(i,d) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(d)V(j,N-1)\right\}$ για N πεπερασμένο και για $\rho \geq 0$ (ακόμη και για ρ=0 που δεν έχουμε προεξόφληση).

Αν όμως το $\lim_{N\to\infty} V(i,N)$ υπάρχει (που μπορεί να συμβεί μόνο εάν ρ>0, γιατί;) τότε το όριο $\lim_{N\to\infty} V(i,N) \overset{\text{ορισμός}}{\equiv} V(i)$ ικανοποιεί το όριο της παραπάνω εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού, δηλαδή ικανοποιεί την:

$$V(i) = \max_{d}\left\{C(i,d) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(d)V(j)\right\}$$

Αυτή είναι η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για ορίζοντα άπειρης διάρκειας.

Άρα για να υπολογίσουμε τα V(i) αρκεί να υπολογίζουμε διαδοχικά τα V(i,N) για N=0,1,2,… μέχρι ένα «μεγάλο» N, χρησιμοποιώντας την εξίσωση ΔΠ. Όμως πόσο μεγάλο πρέπει να γίνει αυτό το N, ώστε το σφάλμα να είναι ανεκτό;

Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\|V(.,N) - V(.)\| \leq \frac{\rho}{(1+\rho)^N}\|V(.,1) - V(.)\|$ (όπου $\|u(.)\| = \max_{j\in S}|u(j)|$ για μια οποιαδήποτε συνάρτηση u(j)), και άρα για ρ>0 ένα αρκετά μεγάλο N εξασφαλίζει πολύ μικρό σφάλμα.

Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι αν

$$\|V(.,N) - V(.,N+1)\| \leq \frac{\varepsilon\rho}{(1+\rho)}$$

τότε

$$\|V(.,N) - V(.)\| \leq \varepsilon$$

Τα παραπάνω μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κριτήρια τερματισμού του υπολογισμού του V(i): αν π.χ. υπολογίσουμε τα V(i,N+1) για κάποιο επίπεδο N+1 και διαπιστώσουμε ότι η μέγιστη διαφορά τους (κατ' απόλυτη τιμή) με τα τα V(i,N) του προηγούμενου επιπέδου είναι μικρότερη ή ίση από την ποσότητα $\frac{\varepsilon\rho}{(1+\rho)}$, τότε είμαστε βέβαιοι ότι τα V(i,N) προσεγγίζουν τα V(i) (που είναι το ζητούμενο) με σφάλμα όχι μεγαλύτερο από ε.

Βέβαια, όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς, η μέθοδος αυτή είναι υπολογιστικά επίπονη.

<u>Μέθοδος Προσέγγισης Στρατηγικών</u> (policy iteration)

Εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο προσέγγισης στρατηγικών που οφείλεται στον R.Bellman.

(α) Ξεκινάμε από μία τυχαία στρατηγική δ_o. Υπολογίζουμε το προεξοφλημένο όφελος V_{δ_0} που αντιστοιχεί σε αυτήν την στρατηγική με βάση τη γνωστή εξίσωση

$$V_{\delta_0} = C_{\delta_0} + \frac{1}{1+\rho} P_{\delta_0} V_{\delta_0} .$$

(β) Έστω ότι για μια στρατηγική δ_k, βρήκαμε το όφελός της V_{δ_k}. Βρίσκουμε μία νέα στρατηγική δ_{k+1} ως εξής : η $\delta_{k+1}(i)$ είναι η δράση d που μεγιστοποιεί την παράσταση $C(i,d) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(d) V_{\delta_k}(j)$

(γ) Αν $\delta_k(i) = \delta_{k+1}(i)$ για κάθε i, τότε έχουμε βρει την βέλτιστη στρατηγική, συνεπώς το βέλτιστο όφελος βρίσκεται από την $V_{\delta_{k+1}} = C_{\delta_{k+1}} + \frac{1}{1+\rho} P_{\delta_{k+1}} V_{\delta_{k+1}}$.

Διαφορετικά, θέτουμε $k \leftarrow k+1$ και επαναλαμβάνουμε το βήμα (β).

Παράδειγμα

Θεωρούμε το παράδειγμα με τη μηχανή από την προηγούμενη υποενότητα. Έστω ότι η αρχική μας στρατηγική δ_o είναι τέτοια ώστε $\delta_0(1)=1, \delta_0(2)=2, \delta_0(3)=3$. Το αναμενόμενο όφελος είναι $V_{\delta_0} = \begin{pmatrix} 40.25 \\ 37.21 \\ 31.59 \end{pmatrix}$.

Η δ_1 υπολογίζεται ως εξής :

Για την $\delta_1(1)$ εξετάζουμε το $\max\left\{5+\frac{1}{1.1}\left(0.7\cdot 40.25+0.2\cdot 37.21+0.1\cdot 31.59\right),\right.$

$$\left. 4+\frac{1}{1.1}\left(0.9\cdot 40.25+0.1\cdot 37.21\right),\quad 0+\frac{40.25}{1.1}\right\}=$$

$$=\max\{40.25 \quad 40.31 \quad 36.6\}$$

άρα $\delta_1(1)=2$, που σημαίνει ότι η δ_1 σίγουρα διαφέρει από την δ_o.

Για την $\delta_1(2)$ ισχύει $\delta_1(2)=2$, ενώ $\delta_1(3)=3$ (Αποδείξτε το σαν άσκηση)

Το αναμενόμενο όφελος από την δ_1 βρίσκεται λύνοντας την εξίσωση :

$$V_{\delta_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{1.1}\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} V_{\delta_1}$$

Οπότε $V_{\delta_1} = \begin{pmatrix} 40.86 \\ 37.71 \\ 32.15 \end{pmatrix}$ (που σημαίνει ότι η δ_1 είναι καλύτερη, όπως αναμέναμε)

Για να βρούμε την δ_2 :

Για την $\delta_2(1)$ εξετάζουμε το

$$\max\left\{5+\frac{1}{1.1}\left(0.7\cdot 40.86+0.2\cdot 37.71+0.1\cdot 32.15\right),\quad 40.86,\quad \frac{40.86}{1.1}\right\}=$$

$$=\max\{40.78 \quad 40.86 \quad 37.15\}$$

Άρα $\delta_2(1)=\delta_1(1)=2$.

Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε ότι $\delta_2(2)=\delta_1(2)=2$ και $\delta_2(3)=\delta_1(3)=3$.

Άρα σύμφωνα με τον αλγόριθμο (3^{o} βήμα), η βέλτιστη στρατηγική είναι η $\delta_2=\delta_1$ και το βέλτιστο όφελος το $V_{\delta_2}=V_{\delta_1}=\begin{pmatrix}40.86\\37.71\\32.15\end{pmatrix}$.

□

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η προσέγγιση στρατηγικών είναι σωστή και οδηγεί στη βέλτιστη στρατηγική. Αυτό που χρειάζεται να αποδείξουμε είναι ότι η στρατηγική που μεγιστοποιεί κάθε φορά το δεξί μέλος της εξίσωσης ΔΠ, οδηγεί πάντα σε αναμενόμενο προεξοφλημένο όφελος συνολικά καλύτερο από κάθε προηγούμενη στρατηγική που είχε εξετάσει ο αλγόριθμος.

<u>Απόδειξη:</u>

Συμβολίζουμε την V_{δ_k} σαν V_k.

Είναι:

$$V_{k+1}(i)-V_k(i)=C(i,\delta_{k+1}(i))-C(i,\delta_k(i))+\frac{1}{1+\rho}\left(\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(\delta_{k+1})V_{k+1}(j)-\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(\delta_k)V_k(j)\right)=$$

$$=\left[C(i,\delta_{k+1}(i))+\frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(\delta_{k+1})V_k(j)\right]-\left[C(i,\delta_k(i))+\frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(\delta_k)V_k(j)\right]+$$

$$+\frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(\delta_{k+1})[V_{k+1}(j)-V_k(j)] \;\;\geq\;\; \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(\delta_{k+1})[V_{k+1}(j)-V_k(j)].$$

Αυτό ισχύει επειδή

$$\left[C(i,\delta_{k+1}(i))+\frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(\delta_{k+1})V_k(j)\right]-\left[C(i,\delta_k(i))+\frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(\delta_k)V_k(j)\right]\geq 0$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι σύμφωνα με τον αλγόριθμο η $\delta_{k+1}(i)$ είναι η δράση d που μεγιστοποιεί την παράσταση $C(i,d)+\frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M}P_{ij}(d)V_{\delta_k}(j)$

Έστω $\Delta V(j) = V_{k+1}(j) - V_k(j)$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\Delta V \geq \frac{1}{1+\rho} P \Delta V$.

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι $\Delta V(j) \geq 0$ για όλα τα j. Γιατί αν ήταν $\Delta V(j) < 0$, έστω $\Delta V(j)$ το μικρότερο από τα $\Delta V(i)$. Όμως τότε $\frac{1}{1+\rho} P^j \cdot \Delta V$ (όπου P^j η j γραμμή της μήτρας P) θα είναι μεγαλύτερο και όχι μικρότερο του $\Delta V(j)$, εφόσον η P είναι στοχαστική και $\frac{1}{1+\rho} < 1$. Γεγονός άτοπο. Άρα $\Delta V(j) \geq 0$, δηλαδή $V_{k+1}(j) \geq V_k(j)$ για όλα τα j.

□

Επίλυση με Γραμμικό Προγραμματισμό

Το πρόβλημα της βέλτιστης στρατηγικής με κριτήριο την βελτιστοποίηση του μη προεξοφλημένου μέσου οφέλους μπορεί να λυθεί είτε με μεθόδους όπως οι παραπάνω, είτε με γραμμικό προγραμματισμό.

Θεωρούμε προσωρινά ότι η επιλογή δράσεων μπορεί να είναι πιθανολογική. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καταστάσεις $j = 1, 2, .., M$ και αποφάσεις δράσης $d = 1, 2, .., D$, ενώ συμβολίζουμε με D_{jd} την πιθανότητα

D_{jd} = P(επιλέγεται η δράση d | η κατάσταση είναι j)

Τότε είναι:

y_{jd} = P(η κατάσταση είναι j και επιλέγεται η d) $= D_{jd} \cdot \pi_j$

με π_j την οριακή πιθανότητα να είναι η X_n στην j.

Το αναμενόμενο μέσο όφελος είναι :

$$E(c)=\sum_{j=1}^{M}\sum_{d=1}^{D}C(j,d)D_{jd}\pi_j=\sum_{j,d}y_{jd}\,C_{jd}$$

Πρέπει βέβαια να ισχύει:

(α) $\sum_{j=1}^{M}\sum_{d=1}^{D}y_{jd}=1$

(άθροισμα πιθανοτήτων)

(β) $\sum_{d=1}^{D}y_{jd}=\pi_j=\sum_{i=1}^{M}\pi_i\sum_{d=1}^{D}P_{ij}(d)\,D_{id}=\sum_{i=1}^{M}\sum_{d=1}^{D}y_{id}P_{ij}(d)\ \forall j$ και

(γ) $y_{jd}\geq 0\ \ \forall j,d$.

Επομένως, οδηγούμαστε σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης του $E(C)$ που είναι το ακόλουθο πρόβλημα Γ.Π.

$$\max\sum_{j=1}^{M}\sum_{d=1}^{D}C_{jd}\ y_{jd}$$

με συνθήκες:

- $\sum_{j=1}^{M}\sum_{d=1}^{D}y_{jd}=1$
- $\sum_{d=1}^{D}y_{jd}=\sum_{i=1}^{M}\sum_{d=1}^{D}y_{id}\ P_{ij}(d)$ $\quad\forall\ j=1,..,M$
- $y_{id}\geq 0\ \ \forall i,d$

Βρίσκοντας τα βέλτιστα y_{id} μπορούμε να βρούμε την βέλτιστη στρατηγική ως εξής :

Είναι $D_{jd}=\dfrac{y_{jd}}{\sum_{d=1}^{D}y_{jd}}$

Μπορεί να αποδειχθεί από την θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού ότι για κάθε j, μόνον <u>ένα</u> $y_{jd}>0$ ενώ όλα τα άλλα είναι 0, και άρα η βέλτιστη απόφαση δεν είναι πιθανολογική, εφόσον $D_{jd}=0$ εκτός από κάποιο d^* για το οποίο $D_{jd^*}=1$. Έτσι προσδιορίζουμε για κάθε κατάσταση j, τη δράση d(j) που βελτιστοποιεί, δηλαδή προσδιορίζουμε τη βέλτιστη στρατηγική δ.

Παράδειγμα

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η συνάρτηση κέρδους είναι :

$$\max \quad \left\{5y_{11} + 4y_{12} + 0y_{13} + 3y_{21} + 2y_{22} + (-2)\,y_{23} + 0y_{31} + (-1)\,y_{32} + (-5)\,y_{33}\right\}$$

Η μεγιστοποίηση γίνεται με περιορισμούς:

- $\sum_{i=1}^{3}\sum_{d=1}^{3} y_{id} = 1$
- $y_{id} \geq 0$

και

- $y_{11} + y_{21} + y_{13} = 0{,}7y_{11} + 0{,}9y_{12} + 1y_{13} + 0y_{21} + 0{,}5y_{22} + 1y_{23} + 0y_{31} + 0y_{32} + 1y_{33}$
- $y_{21} + y_{22} + y_{23} = 0{,}2y_{11} + 0{,}1y_{12} + 0y_{13} + 0{,}6y_{21} + 0{,}5y_{22} + 0y_{23} + 0y_{31} + 0y_{32} + 0y_{33}$
- $y_{31} + y_{32} + y_{33} = 0{,}1y_{11} + 0y_{12} + 0y_{13} + 0{,}4y_{21} + 0y_{22} + 0y_{23} + 1y_{31} + 1y_{32} + 0y_{33}$

Η επίλυση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού (9 μεταβλητές, 4 περιορισμοί) με Simplex ή με κάποια άλλη μέθοδο δίνει την βέλτιστη στρατηγική (δοκιμάστε σαν άσκηση να λύσετε το πρόβλημα με κάποιο γνωστό λογισμικό βελτιστοποίησης).

□

Η Γραμμική Βελτιστοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και για την επίλυση του προβλήματος μεγιστοποίησης του <u>συνολικού αναμενόμενου προεξοφλημένου οφέλους</u> σε άπειρο ορίζοντα.

Οι σχέσεις:

$$V(i) = \max_{d \in D}\left\{C(i,d) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(d)V(j)\right\} \text{ για κάθε κατάσταση } i=1,2,\ldots M$$

ισοδυναμούν με την λύση του εξής προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού:
(χρησιμοποιούμε το σύμβολο V_i αντί για V(i))

$$\min \sum_{j=1}^{M} V_j$$

όπου:

$$V_i \geq C(i,d) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(d)V_j \quad i = 1,2,...,M \quad d \in D$$

Άγνωστοι σε αυτό το πρόβλημα είναι τα V_i, i=1,2,…,M.

Απόδειξη

Ευθύ: Για να αποδείξουμε ότι μια λύση του ΓΠ ικανοποιεί τον ΔΠ:

για μία τυχαία λύση βέλτιστη λύση V_i του ΓΠ θα πρέπει προφανώς να ισχύει ότι:

$$V_i \geq \max_{d \in D}\left\{C(i,d) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(d)V_j\right\}$$

Επιπλέον ισχύει η ισότητα για τουλάχιστον ένα d, διότι αν ίσχυε σε βέλτιστο αυστηρά η ανισότητα

$V_i > C(i,d) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(d)V_j$ για κάθε d, ή ισοδύναμα

$$\left(1 - \frac{1}{1+\rho}P_{ii}(d)\right)V_i > C(i,d) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j \neq i} P_{ij}(d)V_j$$

θα μπορούσαμε να μειώσουμε το V_i παίρνοντας καλύτερη λύση χωρίς να επηρεάσουμε τις απλές ανισότητες. Άρα το V_i δεν θα μπορούσε να ανήκει στη βέλτιστη λύση του ΓΠ. Επομένως, δεν μπορεί

$$V_i > \max_{d \in D}\left\{C(i,d) + \frac{1}{1+\rho}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(d)V_j\right\}$$

Άρα η λύση του Γραμμικού Προγραμματισμού ικανοποιεί την εξίσωση του Δυναμικού Προγραμματισμού (ως ισότητα).

Αντίστροφο: Αν η λύση του ΔΠ δεν ήταν η βέλτιστη λύση στον ΓΠ τότε θα είχαμε δύο λύσεις στον ΔΠ (η τρέχουσα συν η βέλτιστη του ΓΠ), κάτι που μπορεί να αποδειχθεί άτοπο.

□

Παράδειγμα

Δίνεται το ακόλουθο σύστημα δύο καταστάσεων και δύο αποφάσεων $D = \{d_1, d_2\}$ με τις αντίστοιχες για κάθε απόφαση μήτρες μετάβασης

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

ενώ το κέρδος ανά κατάσταση και απόφαση δίνεται από:

Απόφαση **Κατάσταση**	**d_1**	**d_2**
1	20	-1
2	1	0

Αν $\dfrac{1}{1+\rho} = 0{,}9$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε το μέγιστο προεξοφλημένο αναμενόμενο κέδρος για άπειρο ορίζοντα και την στρατηγική που οδηγεί σε αυτό, μπορούμε να οδηγηθούμε στο ισοδύναμο πρόβλημα ΓΠ:

$$\begin{aligned}
&\min V_1 + V_2 \\
&V_1 \geq 20 + 0{,}9(0{,}4V_1 + 0{,}6V_2) \qquad d_1 \\
&V_1 \geq -1 + 0{,}9(0{,}5V_1 + 0{,}5V_2) \qquad d_2 \\
&V_2 \geq 1 + 0{,}9(0{,}25V_1 + 0{,}75V_2) \qquad d_1 \\
&V_2 \geq 0 + 0{,}9(0{,}8V_1 + 0{,}2V_2) \qquad d_2 \\
&V_1, V_2 \ \text{ελεύθερες μεταβλητές}
\end{aligned}$$

Λύνοντας το πρόβλημα ΓΠ καταλήγουμε στην λύση:

$V_1 = 89{,}0 \ , V_2 = 68{,}45$

Επιβεβαιώστε ότι η βέλτιστη στρατηγική είναι η $\delta(1) = d_1 \ \ \delta(2) = d_2$ (αποδείξτε ότι ο πρώτος και ο τέταρτος περιορισμός ισχύουν ως ισότητες). Υπολογίστε την αξία της και επιβεβαιώστε ότι ικανοποιεί την εξίσωση ΔΠ.

□

Μια τελευταία μέθοδος για τον προσδιορισμό του βέλτιστου μέσου αναμενόμενου οφέλους δίνεται χωρίς άμεση αιτιολόγηση:

(α) Έστω αριθμοί $R, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_M$ $\quad (\upsilon_j$, για $j = 1, \ldots, M)$

τέτοιοι ώστε: (i) $R + \upsilon_i = C(i) + \sum_{j=1}^{M} P_{ij}\upsilon_j$ για κάθε i=1,2,…,M

(ii) $\upsilon_1 = 0$

Τότε το R είναι το μέσο αναμενόμενο όφελος, με όφελος ανά κατάσταση i το $C(i)$

(β) Έστω αριθμοί R, υ_j $\quad j = 1, \ldots, M$ με $\upsilon_1 = 0$ τέτοιοι ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, M$ να ισχύει: $R + \upsilon_i = \max_{d=1,\ldots,D} \left\{ C(i,d) + \sum_{j=1}^{M} P_{ij}(d)\upsilon_j \right\}$

Τότε το R είναι το βέλτιστο μέσο αναμενόμενο όφελος. Η βέλτιστη στρατηγική είναι εκείνη που για την κατάσταση i, δίνει τη δράση d $(= \delta(i))$ όπου επιτυγχάνεται η τιμή του $\max$.

Και η εξίσωση μπορεί να λυθεί είτε με την μέθοδο των προσεγγίσεων με στρατηγικές είτε με αξίες.

<u>Παράδειγμα</u>

Ας θεωρήσουμε το αρχικό παράδειγμα με τις μηχανές.

Η προσέγγιση στρατηγικών προχωράει ως εξής :

Ξεκινάμε με μια τυχαία αρχική στρατηγική $\delta_0(1) = 1, \quad \delta_0(2) = 2, \quad \delta_0(3) = 3$.

Τότε $C_{\delta_0} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad P_{\delta_0} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

οπότε έχουμε:

$$\begin{pmatrix} R \\ R+\upsilon_2 \\ R+\upsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$R' = {}^{53}\!/_{15} \quad \upsilon'_2 = -{}^{46}\!/_{15} \quad \upsilon'_3 = -{}^{128}\!/_{15}$$

Η νέα στρατηγική δ_1 βρίσκεται βελτιστοποιώντας ως προς τα υ'_2, υ'_3:

Αν $i=1$ είναι $\delta_1(1)$ η δράση όπου επιτυγχάνεται το

$$\max\left\{5+0,2\left(-\frac{46}{15}\right)+0,1\left(-\frac{128}{15}\right),\quad 4+0,1\left(-\frac{46}{15}\right),\quad 0\right\} = \max\{3,53,\ 3,69,\ 0\}$$

άρα $\delta_1(1)=2$.

Αν $i=2$ η $\delta_1(2)$ βρίσκεται από το:

$$\max\left\{3+0,6\left(-\frac{46}{15}\right)+0,4\left(-\frac{128}{15}\right),\ 2+0,5\left(-\frac{46}{15}\right),\ -2\right\} = \{-2,25,\ 0,467,\ -2\}$$

άρα $\delta_1(2)=2$.

Άρα $C_{\delta_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ και $P_{\delta_1} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

και $$\begin{pmatrix} R \\ R+\upsilon_2 \\ R+\upsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$R'' = {}^{11}\!/_{3} \quad \upsilon''_2 = -{}^{10}\!/_{3} \quad \upsilon''_3 = -{}^{26}\!/_{3}$$

Για να βρούμε το $\delta_2(1)$ εξετάζουμε το

$$\max\left\{5+0{,}2\left(-\frac{10}{3}\right)+0{,}1\left(-\frac{26}{3}\right),\ 4+0{,}1\left(-\frac{10}{3}\right),\ 0\right\}=\max\{3{,}47\ ,\ 3{,}67\ ,\ 0\}$$

και άρα $\delta_2(1)=\delta_1(1)=2$

Με τον ίδιο τρόπο επιβεβαιώνεται ότι

$\delta_2(2)=\delta_1(2)=2$ και $\delta_2(3)=\delta_1(3)=3$.

Άρα η $\delta_1=\delta_2$ είναι η βέλτιστη στρατηγική και το βέλτιστο μέσο όφελος είναι $11/3$.

□