Σημειώσεις Ειδικών Θεμάτων Επιχειρησιακής Έρευνας

Αντώνης Δημάκης
τμήμα Πληροφορικής
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κεφάλαιο 1

Βελτιστοποίηση Γραμμικών Προβλημάτων

1. Εισαγωγή

Γενικό πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & g_1(x_1, \ldots, x_n) \le b_1 \\ & \ldots \\ & g_m(x_1, \ldots, x_n) \le b_m \\ \text{όπου } & x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

όπου:

μεταβλητές απόφασης: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
αντικειμενική συνάρτηση: $f(x_1, \ldots, x_n)$
ανισοτικοί περιορισμοί: οι ανισότητες που αφορούν τις συναρτήσεις $g_1, \ldots, g_m$
περιορισμοί θετικότητας: $x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$.

Σκοπός μας είναι η λύση τέτοιων προβλημάτων, δηλαδή η εύρεση των τιμών των μεταβλητών απόφασης που μεγιστοποιούν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και ταυτόχρονα ικανοποιούν τους ανισοτικούς περιορισμούς και τους περιορισμούς θετικότητας.

Ορισμος 1. Ένα διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι **εφικτό** εάν ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί για αυτό το $\vec{x}$, δηλαδή $g_i(\vec{x}) \le b_i$ για όλα τα $i = 1, \ldots, m$ ταυτοχρόνως και όλες οι συνιστώσες του $\vec{x}$ είναι μη αρνητικές.

Ορισμος 2. Το διάνυσμα $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ είναι η **βέλτιστη λύση** του προβλήματος βελτιστοποίησης παραπάνω, εάν:

(1) $f(\vec{x}^*) \ge f(\vec{x})$ για κάθε $\vec{x}$ εφικτό
(2) $\vec{x}^*$ εφικτό

Ορισμος 3. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $f(\vec{x}^*)$ για τη βέλτιστη λύση $\vec{x}^*$ είναι η **βέλτιστη τιμή** του προβλήματος.

1.1. Μετασχηματισμός γραμμικών προβλημάτων. Το παραπάνω πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης. Προβλήματα ελαχιστοποίησης μπορούν πολύ απλά να μετασχηματιστούν σε ισοδύναμα προβλήματα μεγιστοποίησης με βάση την εξής παρατήρηση: $f(\vec{x}^*) \le f(\vec{x}) \iff -f(\vec{x}^*) \ge -f(\vec{x})$. Δηλαδή, το σημείο $\vec{x}^*$ είναι το ελάχιστο (δηλ. η λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης) αν και μόνο εάν το σημείο αυτό μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $-f(\vec{x})$. Συνεπώς εάν μας ζητείται να βρούμε το ελάχιστο σημείο μιας συνάρτησης (είτε με περιορισμούς είτε χωρίς), απλά μπορούμε να βρούμε το μέγιστο της ίδιας συνάρτησης αλλά με αντίθετο πρόσημο: $-f(x)$.

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι **γραμμικό** εάν οι συναρτήσεις $f(\vec{x}), g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})$ είναι γραμμικές συναρτήσεις των συνιστωσών του $\vec{x}$, π.χ.:

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_1 + 8x_2 \\ & x_1 - x_2 \ge 4 \\ & x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_2 \ge 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Παρατηρήστε ότι το πρόβλημα αυτό δεν είναι δοσμένο στη μορφή (1) αφού ζητείται το ελάχιστο αντί του μεγίστου, υπάρχει μια ανισότητα $\ge$ και η μεταβλητή x_1 επιτρέπεται να λαμβάνει αρνητικές τιμές. Η (1) λέγεται κανονική μορφή του προβλήματος βελτιστοποίησης.

Για να φέρουμε το (2) σε κανονική μορφή πρέπει να:

- μεγιστοποιήσουμε αντικειμενική συνάρτηση με αντίθετο πρόσημο, δηλ. $\max -7x_1 - 8x_2$.
- μετατρέψουμε όλους τους περιορισμούς $\le$ σε $\ge$. Αυτό δε συνιστά πρόβλημα μιας και πολλαπλασιάζοντας με -1 τους περιορισμούς με $\ge$ λαμβάνουμε τους ίδιους αλλά με $\le$ τώρα. Π.χ., $x_1 - x_2 \ge 4 \iff x_2 - x_1 \le -4$.

- κάνουμε αλλαγή μεταβλητών έτσι ώστε στο νέο πρόβλημα όλες οι μεταβλητές απόφασης να ικανοποιούν περιορισμούς θετικότητας. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί σαν τη διαφορά δύο θετικών αριθμών, π.χ., $7 = 7 - 0$, $-5 = 0 - 5$. Συνεπώς αντί της μεταβλητής x_1 χρησιμοποιούμε τη διαφορά $w - z$, όπου $w, z \geq 0$.

Από τα παραπάνω οδηγούμαστε στο πρόβλημα:

$$\begin{aligned} -\max \quad & -7(w-z) - 8x_2 \\ & -w + z + x_2 \leq -4 \\ & w - z - x_2 \leq 10 \\ & w, z, x_2 \geq 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Εάν (w^*, z^*, x_2^*) είναι η βέλτιστη λύση του (3) τότε το διάνυσμα $(w^* - z^*, x_2^*)$ είναι εφικτό για το (2) και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του (2) που αντιστοιχεί είναι $7(w^* - z^*) + 8x_2^*$. Η τιμή αυτή είναι προφανώς μικρότερη η ίση από τη βέλτιστη τιμή του (3).

Ιδιοτητα 1. *Η βέλτιστη τιμή του* (3) *είναι μικρότερη ή ίση από αυτή του* (2) *(βλέποντάς το ως πρόβλημα μεγιστοποίησης* $\max -7x_1 - 8x_2$*).*

Παρόμοια, έστω (x_1', x_2') η βέλτιστη λύση του (2) με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $-7x_1' - 8x_2'$. Έστω το διάνυσμα (w', z', x_2') με

$$w' = \begin{cases} x_1'\,, & \text{εάν } x_1' \geq 0 \\ 0\,, & \text{εάν } x_1' < 0 \end{cases}, \quad z' = \begin{cases} 0\,, & \text{εάν } x_1' \geq 0 \\ -x_1'\,, & \text{εάν } x_1' < 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $w', z' \geq 0$ και $w' - z' = x_1'$. Συνεπώς το διάνυσμα (w', z', x_2') είναι εφικτό για το (3) με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $-7x_1' - 8x_2'$ - το πολύ ίση με την βέλτιστη τιμή του (3).

Ιδιοτητα 2. *Δηλαδή η βέλτιστη τιμή του* (2) *είναι μικρότερη ή ίση με αυτή του* (3).

Από τις Ιδιότητες 1 και 2 συμπεραίνουμε ότι τα δύο προβλήματα έχουν την ίδια βέλτιστη τιμή και από την λύση του ενός μπορούμε άμεσα να διαβάσουμε τη λύση του άλλου. Άρα θα μπορούσαμε να λύσουμε το (3) αντί του (2). Πράγματι, θα μετατρέπουμε γραμμικά προγράμματα σε κανονική μορφή γιατί ο αλγόριθμος επίλυσης γραμμικών προβλημάτων simplex που θα δούμε στη συνέχεια, απαιτεί να δίδονται στη μορφή αυτή.

2. Γραμμικά προγράμματα

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε προβλήματα της μορφής (1) όπου οι συναρτήσεις $f, g_1, \ldots, g_m$ είναι γραμμικές, δηλαδή γραμμικά προβλήματα ή προγράμματα όπως συνηθίζεται να τα αποκαλούν. Η γενική μορφή που έχει ένα γραμμικό πρόβλημα είναι:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\,, i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0\,, j = 1, \ldots, n\,. \end{aligned} \tag{4}$$

όπου $c_j, b_i, a_{ij}, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$ είναι κάποιες σταθερές και γνωστές τιμές.

Για λόγους συντομίας το παραπάνω πρόβλημα θα δίνεται πολλές φορές στη διανυσματική μορφή:

$$\begin{aligned} \max \quad & \vec{c}^T \cdot \vec{x} \\ & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & x \geq 0\,, \end{aligned} \tag{5}$$

όπου $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T, \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ και A είναι ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία a_{ij} σε κάθε i-οστή γραμμή και j-οστή στήλη. Για δύο διανύσματα ίδιας διάστασης w, z γράφοντας $w \leq z$ εννοούμε ότι $w_i \leq z_i$ για κάθε i, όπου w_i, z_i είναι οι i-οστές συνιστώσες των w και z αντίστοιχα.

Θεωρήστε το εξής απλό γραμμικό πρόγραμμα:

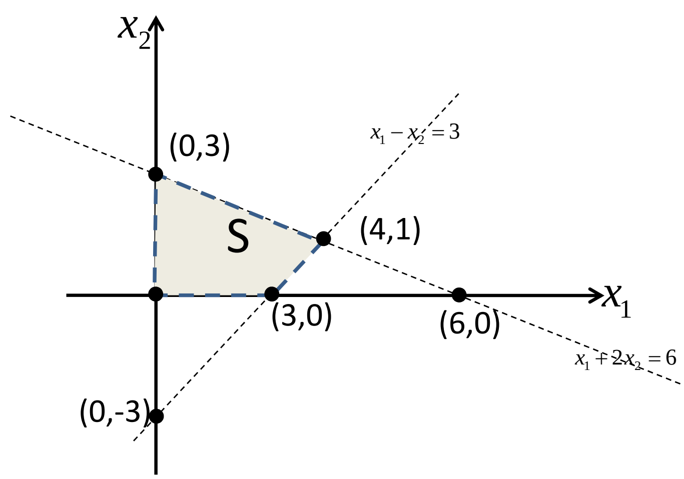
$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ & x \leq 1 \\ & x \geq 0\,, \end{aligned}$$

όπου c μια γνωστή σταθερά. Εάν $c > 0$ τότε η μοναδική βέλτιστη λύση είναι η $x^* = 1$ με βέλτιστη τιμή $cx^* = c$. Εάν $c < 0$ τότε η μοναδική βέλτιστη λύση είναι η $x^* = 0$ με βέλτιστη τιμή 0. Στην περίπτωση που $c = 0$ τότε κάθε εφικτό σημείο είναι βέλτιστο (με τιμή 0) όμως πάλι υπάρχει 'ακραίο' σημείο (π.χ., το $x^* = 1$) το οποίο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή, δηλαδή είναι βέλτιστη λύση.

Για τα γραμμικά προγράμματα είναι ευτυχές γεγονός ότι η βέλτιστη λύση βρίσκεται πάντα τουλάχιστον σε ένα από τα άκρα του συνόλου των εφικτών σημείων.

Παραδειγμα 1. *Θεωρήστε το πρόβλημα:*

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1 - x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

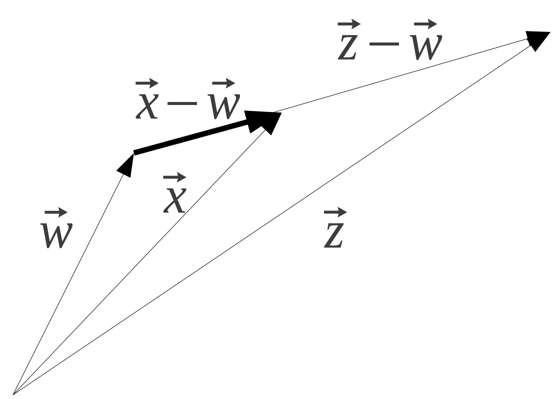


Σχημα 1. Εφικτό σύνολο του γραμμικού προγράμματος (6).

Το σύνολο των εφικτών σημείων είναι το τετράπλευρο (με το εσωτερικό του) που περικλείεται από τους δύο άξονες, την ευθεία $x_1 - x_2 = 3$ και την ευθεία $x_1 + 2x_2 = 6$. Η βέλτιστη λύση βρίσκεται σε ένα από τα τέσσερα ακραία σημεία $(0,0), (3,0), (4,1), (0,3)$. Για να πειστούμε για αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα που ισχύει γενικότερα - όχι μόνο για το παράδειγμα:

Λημμα 1. *Έστω $\vec{c}, \vec{w}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ και θεωρήστε οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{x}$ το οποίο βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $\vec{w}, \vec{z}$. Τότε $\vec{c}^T\vec{x} \le \max\{\vec{c}^T\vec{w}, \vec{c}^T\vec{z}\}$ ή με άλλα λόγια η μέγιστη τιμή λαμβάνεται σε ένα από τα δύο άκρα.*

Αποδειξη. Εφόσον το $\vec{x}$ βρίσκεται ανάμεσα στα $\vec{w}, \vec{z}$, τότε το διάνυσμα $\vec{x} - \vec{w}$ είναι υποπολλαπλάσιο του $\vec{z} - \vec{w}$, δηλαδή $\vec{x} - \vec{w} = t(\vec{z} - \vec{w})$ για κάποιο $0 \le t \le 1$. Κάνοντας πράξεις, βρίσκουμε ότι $\vec{x} = t\vec{z} + (1-t)\vec{w}$.



Συνεπώς, $\vec{c}^T\vec{x} = \vec{c}^T\vec{w} + \vec{c}^T(\vec{z} - \vec{w})t$. Επιλέγοντας κάποιο άλλο σημείο $\vec{x}$ ανάμεσα στα $\vec{w}, \vec{z}$ στην ουσία επιλέγουμε κάποιο άλλο πολλαπλάσιο $0 \leq t \leq 1$. Η μεγαλύτερη τιμή του $\vec{c}^T\vec{x}$ θα ληφθεί για το t εκείνο που μεγιστοποιεί το $\vec{c}^T(\vec{z}-\vec{w})t$. Όμως όπως είδαμε και προηγουμένως, η βέλτιστη λύση βρίσκεται πάντα στα άκρα, δηλαδή στο $t=0$ ή στο $t=1$. Με άλλα λόγια η τιμή του $\vec{c}^T\vec{x}$ δεν είναι μεγαλύτερη από την τιμή στα άκρα δηλαδή την $\vec{c}^T\vec{w}$ και $\vec{c}^T\vec{z}$. □

Έστω $\vec{x}$ ένα οποιοδήποτε σημείο στο εσωτερικό του S. Μπορούμε να βρούμε άλλο σημείο του S με μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση; Η απάντηση είναι ναι, και το λήμμα μας δίνει έναν τρόπο εύρεσής του: Εφόσον το $\vec{x}$ είναι εσωτερικό σημείο, αυτό θα βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την αρχή των αξόνων $(0,0)$ με κάποιο σημείο $\vec{y}$ του συνόρου, δηλαδή κάποιο σημείο ανάμεσα στα $(3,0)$ και $(4,1)$ ή ανάμεσα στα $(4,1)$ και $(0,3)$. Σύμφωνα με το λήμμα, η $\vec{c}^T\vec{x}$ (εδώ έχουμε $c=(1,1)^T$) είναι μικρότερη τιμή από την τιμή στα άκρα. Άρα το $\vec{x}$ δεν είναι βέλτιστο αφού $\vec{c}^T\vec{x} \leq \max\{\vec{c}^T(0,0)^T, \vec{c}^T\vec{y}\}$. Τώρα ας θεωρήσουμε ότι το $\vec{y}$ βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα στα σημεία $(0,3)$ και $(4,1)$. Τότε πάλι λόγω του λήμματος ισχύει $\vec{c}^T\vec{y} \leq \max\{\vec{c}^T(0,3)^T, \vec{c}^T(4,1)\}$, άρα συνολικά $\vec{c}^T\vec{x} \leq \max\{\vec{c}^T(0,0)^T, \vec{c}^T(0,3)^T, \vec{c}^T(4,1)^T\}$. Εαν το $\vec{y}$ βρίσκονταν στο ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα στα $(3,0)$ και $(4,1)$ τότε με τον ίδιο συλλογισμό θα λαμβάναμε $\vec{c}^T\vec{x} \leq \max\{\vec{c}^T(0,0)^T, \vec{c}^T(3,0)^T, \vec{c}^T(4,1)^T\}$. Άρα σε κάθε περίπτωση η τιμή οποιουδήποτε εσωτερικού σημείου είναι μικρότερη από την τιμή που δίνουν τα ακραία σημεία στην αντικειμενική συνάρτηση.

Συνεπώς για την εύρεση της βέλτιστης λύσης σε ένα γραμμικό πρόγραμμα αρκεί να μελετήσουμε τις τιμές που λαμβάνουν τα ακραία σημεία μόνο. Στην επόμενη παράγραφο θα μελετήσουμε έναν αλγεβρικό τρόπο εύρεσης των ακραίων σημείων.

2.1. Βασικές λύσεις. Για την εύρεση των ακραίων σημείων του εφικτού συνόλου στο (5) αντί να εργαστούμε απευθείας με τις ανισότητες $A\vec{x} \leq \vec{b}$ των περιορισμών θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $A\vec{x}+\vec{z}=\vec{b}$ με τους $n+m$ άγνωστους $(\vec{x},\vec{z})=(x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_m)$.

Παραδειγμα 2. *Η ιδέα χρήσης εξισώσεων αντί ανισοτήτων είναι η εξής: η ανισότητα $x \leq 5$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x+z=5$ όπου $z \geq 0$, ή με λόγια 'αντί να λέμε ότι το q είναι μικρότερο του 5, είναι το ίδιο με το να λέμε ότι εάν στο x προσθέσουμε μια θετική ποσότητα τότε ισούται με το 5'. Η αρχική ανισότητα αντικαθίσταται από μια ισότητα (εξίσωση) και έναν περιορισμό θετικότητας για το z. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι περιορισμοί θετικότητας έχουν διαφορετικό ρόλο από τους 'κανονικούς' περιορισμούς και θα τους μεταχειριστούμε με διαφορετικό τρόπο. Η μεταβλητή z λέγεται* **μεταβλητή χαλαρότητας** *για τον περιορισμό $x \leq 5$ γιατί η τιμή της εκφράζει κατά πόσο υπολείπεται το x για να φτάσει τον περιορισμό του 5, δηλαδή μετράει πόσο χαλαρός είναι ο περιορισμός: μεγάλες τιμές σημαίνουν ότι το x είναι αρκετά μικρότερο του 5 (μεγάλη χαλαρότητα), ενώ μικρές τιμές σημαίνουν ότι ο περιορισμός είναι κοντά στο να είναι σημαντικός. Εάν $z=0$ τότε ο περιορισμός είναι 'ενεργός' δηλαδή $x=5$.*

Για το παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει είναι το:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+z_1&=6 \\ x_1-x_2+z_2&=3 \end{aligned} \tag{7}$$

Το σύστημα αυτό περιέχει όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε για το σύνολο των εφικτών σημείων (q_1,q_2). Για παράδειγμα, θεωρήστε ότι (x_1,x_2) είναι οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου -όχι αναγκαστικά εφικτό-. Τότε για αυτά τα γνωστά x_1,x_2 εάν λύσουμε το σύστημα (7) ως προς τους υπόλοιπους άγνωστους (z_1,z_2) μπορούμε να δούμε εάν το (x_1,x_2) είναι εφικτό ή όχι. Π.χ., εάν $(x_1,x_2)=(1,1)$ τότε λαμβάνουμε από (7) το σύστημα $z_1=6, z_2=3$. Εφόσον τα z_1,z_2 είναι θετικά τότε $x_1+2x_2 \leq 6, x_1-x_2 \leq 3$ άρα το σημείο $(x_1,x_2)=(1,1)$ είναι εφικτό.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι το σημείο $(x_1,x_2)=(4,5)$ δεν είναι εφικτό αφού $z_1=-8<0, z_2=4>0$. Συγκεκριμένα ισχύει ο 2ος περιορισμός $x_1-x_2 \leq 3$ όμως δεν ισχύει ο 1ος αφού $z_1<0$.

Όπως είναι φανερό, το πρόσημο των μεταβλητών χαλαρότητας z_i μας δίνει την πληροφορία εάν ικανοποιείται ή όχι ο αντίστοιχος ανισοτικός περιορισμός. Ειδικότερα εάν $z_i=0$ τότε θα ισχύει ακριβώς.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το (7) για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου που βρίσκεται στη γωνία που σχηματίζουν οι ανισοτικοί περιορισμοί. Για να τις υπολογίσουμε, αρκεί να λύσουμε το (7) ως προς x_1,x_2 θέτοντας τα z_1,z_2 ίσα με μηδέν, δηλαδή απαιτώντας να ισχύουν και οι δύο περιορισμοί ταυτόχρονα -άρα να βρεθούμε στη γωνία τους -. Το σύστημα που λαμβάνουμε είναι το:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=6 \\ x_1-x_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=1 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος που αντιστοιχεί στο ακραίο σημείο $(4,1)$ είναι η $(x_1,x_2,z_1,z_2)=(4,1,0,0)$. Στο ακραίο σημείο $(0,3)$ αντιστοιχεί η $(x_1,x_2,z_1,z_2)=(0,3,0,9)$, στο $(3,0)$ η $(x_1,x_2,z_1,z_2)=(3,0,3,0)$ και στο $(0,0)$ η $(x_1,x_2,z_1,z_2)=(0,0,6,3)$. Παρατηρήστε ότι πάντα ακριβώς δύο από τις συνιστώσες του διανύσματος (x_1,x_2,z_1,z_2) είναι μηδενικές. Αυτό συμβαίνει γιατί τα ακραία σημεία είναι σημεία συνάντησης των περιορισμών. Εφόσον για το συγκεκριμένο πρόβλημα αρκούν δύο περιορισμοί για να ορίσουν ένα ακραίο σημείο, θα βρίσκουμε πάντα δύο μηδενικά στις συνιστώσες της λύσης. Κάθε μηδενική συνιστώσα θα αντιστοιχεί σε σημείο που βρίσκεται πάνω στον αντίστοιχο περιορισμό. Άρα για να βρούμε όλα τα ακραία σημεία, αρκεί να επιλέξουμε κάθε δυνατό ζευγάρι μεταβλητών, να το θέσουμε ίσο με μηδέν και να λύσουμε ως προς τις υπόλοιπες συνιστώσες.

Αν θέσουμε $z_1 = 0, x_2 = 0$ τότε βρίσκουμε τη λύση $(x_1, x_2, z_1, z_2) = (6, 0, 0, -3)$. Σε αυτή την περίπτωση το σημείο συνάντησης δύο περιορισμών δεν είναι ακραίο, δηλαδή βρίσκεται έξω από το σύνολο των εφικτών σημείων. Συνεπώς θα πρέπει να αγνοήσουμε λύσεις του (7) με αρνητικές συνιστώσες καθώς αυτές αντιστοιχούν σε μη εφικτά γωνιακά σημεία.

Για το γενικό γραμμικό πρόγραμμα οι ακόλουθοι ορισμοί είναι χρήσιμοι.

Ορισμος 4. Το διάνυσμα $(\vec{x}, \vec{z})$ είναι **βασική λύση (β.λ.)** εάν $A\vec{x} + \vec{z} = \vec{b}$ και τουλάχιστον n συνιστώσες του $(\vec{x}, \vec{z})$ είναι μηδενικές.

Είναι **βασική εφικτή λύση (β.ε.λ.)** εάν επιπλέον δεν υπάρχουν γνήσια αρνητικές συνιστώσες.

Συνήθως οι μηδενικές συνιστώσες των βασικών λύσεων θα είναι ακριβώς n στο πλήθος. Η περίπτωση περισσότερες από n συνιστώσες να είναι μηδενικές σε κάποια βασική λύση εμφανίζεται σε πολύ ειδικές περιπτώσεις, οι οποίες δεν είναι συνηθισμένες. Τα γραμμικά προγράμματα σε τέτοιες περιπτώσεις ονομάζονται **εκφυλισμένα** και δε θα μας απασχολήσουν εκτός την περίπτωση των προβλημάτων μεταφοράς τα οποία θα συναντήσουμε αργότερα στο μάθημα.

Οι βασικές λύσεις είναι τα 'γωνιακά' σημεία που όπως είδαμε δεν είναι αναγκαστικά και ακραία αφού μπορεί να μην είναι εφικτά. Οι βασικές εφικτές λύσεις είναι τα ακραία σημεία.

Ο λόγος που απαιτούμε να μηδενίζονται τουλάχιστον n συνιστώσες στο ορισμό της βασικής λύσης είναι γιατί οι γωνίες μεταξύ των περιορισμών βρίσκονται στα σημεία συνάντησης τουλάχιστον n από αυτούς. Αυτό μπορούμε να το συμπεράνουμε κοιτώντας το σύστημα m εξισώσεων (7) με τους $n + m$ άγνωστους. Τα σημεία συνάντησης n περιορισμών δίνουν ένα σύστημα με m εξισώσεις και m άγνωστους (αφού έχουμε μηδενίσει αυτούς που αντιστοιχούν στους περιορισμούς που θέλουμε να ικανοποιούνται ακριβώς) το οποίο έχει μια μοναδική λύση: το σημείο στη γωνία των περιορισμών.

Για μια βασική λύση, οι μη μηδενικές μεταβλητές ονομάζονται **βασικές μεταβλητές**, ενώ οι μηδενικές είναι οι **μη βασικές μεταβλητές**. Στα μη εκφυλισμένα γραμμικά προγράμματα σε κάθε βασική λύση υπάρχουν m βασικές και n μη βασικές μεταβλητές.

2.2. Επίλυση γραμμικών προγραμμάτων με τη μέθοδο simplex.

Παραδειγμα 3. *Βρείτε τη μέγιστη τιμή και λύση του προβλήματος*

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ & 2x_1 + x_3 \leq 3 \\ & x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	*σταθ.*
1	*-1*	**2**	*0*	*0*	*0*
2	*0*	**1**	*1*	*0*	*3*
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**2**
1	*-3*	*0*	*0*	*-2*	*-4*
2	**-1**	**0**	**1**	**-1**	**1**
0	*1*	*1*	*0*	*1*	*2*
0	*-5/2*	*0*	*-1/2*	*-3/2*	*-9/2*
1	*-1/2*	*0*	*1/2*	*-1/2*	*1/2*
0	*1*	*1*	*0*	*1*	*2*

3. Δυϊκή θεωρία γραμμικών προγραμμάτων

Για ένα γραμμικό πρόγραμμα στη μορφή (4) το **δυϊκό πρόβλημα** είναι το:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \geq c_j\,, j = 1, \ldots, n \\ & \lambda_i \geq 0\,, i = 1, \ldots, m\,. \end{aligned} \tag{9}$$

και σε διανυσματική μορφή:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \vec{b}^T \cdot \vec{\lambda} \\
& A^T \vec{\lambda} \geq \vec{c} \\
& \lambda \geq 0\,,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Παρατηρήστε ότι το δυϊκό έχει τόσες μεταβλητές απόφασης $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ όσοι και οι περιορισμοί του (4). Παρόμοια, το πλήθος των περιορισμών του δυϊκού είναι ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών απόφασης $(x_1, \ldots, x_n)$ του (4). Μάλιστα, ο j-οστός περιορισμός του (9) προκύπτει από τους συντελεστές της j-οστής μεταβλητής στο (4). Παρόμοια, η μεταβλητή λ_i εμφανίζεται στους περιορισμούς του (9) με τους συντελεστές που βρίσκονται στον i-οστό περιορισμό του (4).

Παραδειγμα 4. *Το δυϊκό πρόβλημα του* (6) *είναι:*

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 6\lambda_1 + 3\lambda_2 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 \geq 1 \\
& 2\lambda_1 - \lambda_2 \geq 1 \\
& \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Εφόσον το (9) είναι ένα γραμμικό πρόγραμμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε το δυϊκό του, αφού το φέρουμε πρώτα στην κανονική μορφή:

$$
\begin{aligned}
-\max \quad & (-\vec{b}^T) \cdot \vec{\lambda} \\
& (-A^T)\vec{\lambda} \leq -\vec{c} \\
& \lambda \geq 0\,,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του δυϊκού προγράμματος για αυτό το πρόγραμμα λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
-\min \quad & (-\vec{c}^T) \cdot \vec{y} \\
& (-A)\vec{y} \geq -\vec{b} \\
& y \geq 0\,,
\end{aligned}
$$

όπου $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης του δυϊκού του (12). Όμως το παραπάνω πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το (5), άρα αποδείξαμε την εξής ιδιότητα:

Ιδιοτητα 3. *Το δυϊκό του δυϊκού ενός γραμμικού προγράμματος είναι ισοδύναμο με το αρχικό γραμμικό πρόγραμμα.*

Συνεπώς, κάθε μεταβλητή απόφασης του αρχικού, δηλ. κάθε μια από τις $x_1, \ldots, x_n$ μπορούμε να σκεφτούμε ότι προήλθε από τους n περιορισμούς του δυϊκού, με τον ίδιο τρόπο που θεωρήσαμε ότι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ αντιστοιχούν στους m περιορισμούς του αρχικού προβλήματος.

Η κατασκευή του δυϊκού προβλήματος δε θα ήταν ενδιαφέρουσα εάν δεν σχετίζονταν οι βέλτιστες τιμές και λύσεις των δύο προβλημάτων. Μια απλή αλλά σημαντική σχέση μεταξύ των τιμών τους είναι η ακόλουθη:

Ιδιοτητα 4 (Ασθενής Δυϊκότητα). *Οι τιμές του* (10) *είναι μεγαλύτερες ή ίσες από αυτές του* (5)*, δηλαδή* $\vec{b}^T\vec{\lambda} \geq \vec{c}^T\vec{x}$ *για κάθε* $\vec{x}$ *που ικανοποιεί τους περιορισμούς του* (5) *και κάθε* $\vec{\lambda}$ *που ικανοποιεί αυτούς στο* (10).

Αποδειξη. Έστω $\vec{x}$ εφικτό για το (5) και $\vec{\lambda}$ εφικτό για το (10). Τότε $\vec{b} - A\vec{x} \geq 0$ και άρα $\vec{\lambda}^T(\vec{b} - A\vec{x}) \geq 0$ (αφού $\vec{\lambda} \geq 0$), δηλαδή $\vec{b}^T\vec{\lambda} \geq \vec{x}^T A^T \vec{\lambda}$. Παρόμοια, $A^T\vec{\lambda} - \vec{c} \geq 0$ και άρα $\vec{x}^T A^T \vec{\lambda} \geq \vec{x}^T \vec{c}$ (αφού $\vec{x} \geq 0$). Συγκρίνοντας τις παραπάνω ανισότητες καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Για κάθε εφικτό (για το (10)) $\vec{\lambda}$ η ιδιότητα αυτή μας δίνει κάποιο άνω φράγμα για το (5). Εφόσον το (5) είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμη πληροφορία για τη μέγιστη τιμή του (5) κοιτώντας το (10).

Παραδειγμα 5. *Οι τιμές* $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ *είναι εφικτές στο* (11) *άρα η μέγιστη τιμή του* (6) *δεν είναι μεγαλύτερη από* $6\lambda_1 + 3\lambda_2 = 9$.

Η ασθενής δυϊκότητα μπορεί να αποβεί πολύ χρήσιμη σε κριτήρια που μας επιτρέπουν να αποφανθούμε εάν ένα συγκεκριμένο εφικτό σημείο είναι βέλτιστο. Ας πούμε ότι θέλουμε να ελέγξουμε εάν η $x_1^* = 4, x_2^* = 1$ είναι βέλτιστη λύση για το (6). Προφανώς θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα, π.χ. με τον αλγόριθμο simplex , όμως αυτό θα απαιτούσε πολλαπλά βήματα υπολογισμού. Επιπλέον, ερωτώμαστε για το εάν το *συγκεκριμένο* σημείο είναι βέλτιστο, όχι *ποιό* είναι το βέλτιστο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε την πληροφορία ότι οι τιμές $\lambda_1^* = 2/3, \lambda_2^* = 1/3$ δίνουν στην αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού ίση τιμή με αυτήν που τα $x_1^* = 4, x_2^* = 1$ επιτυγχάνουν για το αρχικό, δηλαδή $6\lambda_1^* + 3\lambda_2^* = x_1^* + x_2^* = 5$. Όμως λόγω της ασθενούς δυϊκότητας συμπεραίνουμε ότι κάθε επιλογή των x_1, x_2 με εφικτό τρόπο, θα δίνει μια μικρότερη τιμή $x_1 + x_2$

β.λ. (6)				τιμή	β.λ. (11)			
x_1	x_2	z_1	z_2		λ_1	λ_2	ν_1	ν_2
0	**0**	**6**	**3**	0	0	0	-1	-1
0	**3**	**0**	**6**	3	1/2	0	-1/2	0
4	**1**	**0**	**0**	**5**	**2/3**	**1/3**	**0**	**0**
3	**0**	**3**	**0**	3	0	1	0	-2
6	0	0	-3	6	**1**	**0**	**0**	**1**
0	-3	12	0	-3	0	-1	-2	0

Πινακας 1.

από $6\lambda_1^* + 3\lambda_2^* = 5$ αφού τα λ_1^*, λ_2^* ικανοποιούν τους περιορισμούς του (11). Συνεπώς τα $x_1^* = 4, x_2^* = 1$ είναι βέλτιστα μιας και επιτυγχάνουν τιμή μεγαλύτερη από αυτή των υπολοίπων εφικτών σημείων.

Πορισμα 1. *Έστω $\vec{x}^*$ εφικτό για το (5) και $\vec{\lambda}^*$ εφικτό για το δυϊκό (10). Εάν για αυτά τα σημεία οι αντίστοιχες αντικειμενικές συναρτήσεις λαμβάνουν ίσες τιμές, δηλαδή $\vec{b}^T\vec{\lambda}^* = \vec{c}^T\vec{x}^*$, τότε το $\vec{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του (5) και το $\vec{\lambda}^*$ είναι βέλτιστη λύση του (10).*

Αποδειξη. Από την ασθενή δυϊκότητα, $\vec{c}^T\vec{x} \leq b^T\vec{\lambda}^*$ για κάθε $\vec{x}$ εφικτό. Συνεπώς το $\vec{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση αφού $\vec{b}^T\vec{\lambda}^* = \vec{c}^T\vec{x}^*$.

Συμπεραίνουμε ότι και το $\vec{\lambda}^*$ είναι βέλτιστο για το (10) αφού λόγω της Ιδιότητας 3 μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ίδιο συλλογισμό στο (10). □

Η διαπίστωση ότι τα x_1^*, x_2^* είναι βέλτιστα είναι συνέπεια της ασθενούς δυϊκότητας μεταξύ του σημείου (x_1^*, x_2^*) του αρχικού και του $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ του δυϊκού. Η κρίσιμη πληροφορία βέβαια ήταν ότι υπάρχουν κάποια σημεία του δυϊκού που επιτυγχάνουν την ίδια τιμή με $x_1^* + x_2^*$. Στην επόμενη παράγραφο θα ασχοληθούμε με αυτό ακριβώς το πρόβλημα, δηλαδή για ένα εφικτό διάνυσμα $\vec{x}$ του (5) πώς βρίσκουμε εφικτό $\vec{\lambda}$ του δυϊκού προβλήματος που επιτυγχάνει ίδια τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση.

3.1. Σχέση των βασικών λύσεων μεταξύ ενός προβλήματος και του δυϊκού. Ξέρουμε ότι η βέλτιστη λύση ενός γραμμικού προγράμματος πάντα βρίσκεται μεταξύ των β.ε.λ. του. Για αυτό το λογο θα εστιάσουμε στις β.λ. του (5) και (10).

Προχωρόντας όπως στην παράγραφο 2.1 υπολογίζουμε τις 6 β.λ. του (6) και τις 6 β.λ. του (11) τις οποίες παραθέτουμε στον πίνακα 1.

Παρατηρήστε ότι οι β.λ. του αρχικού και δυϊκού που βρίσκονται στην ίδια γραμμή ικανοποιούν $\lambda_i z_i = 0$ και $x_j \nu_j = 0$ για κάθε $i = 1, 2$ και $j = 1, 2$.

Ορισμος 5. Η β.λ. $(\vec{x}, \vec{z})$ του (5) και η β.λ. $(\vec{\lambda}, \vec{\nu})$ του (10) είναι **συμπληρωματικές** εάν ικανοποιούν τις **συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας**:

$$\lambda_i z_i = 0\,,\ \text{για κάθε } i = 1, \ldots, m \quad \text{και } x_j \nu_j = 0\,,\ \text{για κάθε } j = 1, \ldots, n\,. \tag{13}$$

Η ονομασία των συνθηκών (13) προέρχεται από το γεγονός ότι σύμφωνα με αυτές, εάν δεν ικανοποιείται ο i-οστός περιορισμός, δηλάδή $z_i \neq 0$ τότε η αντίστοιχη μεταβλητή του δυϊκού λ_i πρέπει να είναι μηδενική. Παρόμοια, εάν $\nu_j \neq 0$ δηλαδή δεν ικανοποιείται ο j-οστός περιορισμός του δυϊκου τότε η αντίστοιχη μεταβλητή του αρχικού, x_j, πρέπει να είναι μηδενική[1].

Το σημαντικό για τις συμπληρωματικές β.λ. είναι ότι έχουν ίδιες τιμές (στις αντίστοιχες αντικειμενικές συναρτήσεις).

Ιδιοτητα 5. *Εάν $(\vec{x}, \vec{z})$ β.λ. του (5) και $(\vec{\lambda}, \vec{\nu})$ συμπληρωματική β.λ. του (10) τότε $\vec{c}^T\vec{x} = \vec{b}^T\vec{\lambda}$.*

Αποδειξη. Έχουμε $\vec{b}^T\vec{\lambda} = (A\vec{x} + \vec{z})^T\vec{\lambda} = \vec{x}^T A^T\vec{\lambda} + \vec{z}^T\vec{\lambda}$. Όμως από τη συμπληρωματικότητα των β.λ. $\vec{z}^T\vec{\lambda} = \sum_{j=1}^{n} z_j\lambda_j = 0$, άρα

$$\vec{b}^T\vec{\lambda} = \vec{x}^T A^T\vec{\lambda}\,. \tag{14}$$

Επίσης $\vec{c}^T\vec{x} = (A^T\vec{\lambda} - \vec{\nu})^T\vec{x} = \vec{\lambda}^T A\vec{x} - \vec{\nu}^T\vec{x}$. Λόγω πάλι της συμπληρωματικότητας λαμβάνουμε $\vec{\nu}^T\vec{x} = 0$, άρα

$$\vec{c}^T\vec{x} = \vec{\lambda}^T A\vec{x}\,. \tag{15}$$

[1] Θυμηθείτε ότι όταν σχηματίσαμε το δυϊκό του δυϊκού του (10), η μεταβλητή x_j αντιστοιχούσε στον j-οστό περιορισμό του δυϊκού

Συνδυάζοντας τις (14),(15) καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Στον πίνακα 1 στη στήλη 'τιμή' αναγράφεται η κοινή τιμή των β.λ. σε κάθε γραμμή. Οι β.λ. με έντονη γραμματοσειρά είναι οι β.ε.λ. για το αντίστοιχο πρόβλημα. Παρατηρήστε ότι η συμπληρωματική της β.ε.λ. $(4, 1, 0, 0)$ του (6) είναι επίσης β.ε.λ. για το δυϊκό (η $(2/3, 1/3, 0, 0)$). Άρα από το Πόρισμα 1 το διάνυσμα $\vec{x}^* = (4, 1)$ είναι βέλτιστη λύση του (6) και το $\vec{\lambda}^* = (2/3, 1/3)$ βέλτιστη λύση του (11). Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο παρακάτω κριτήριο ελέγχου εάν μια β.ε.λ. είναι βέλτιστη.

Θεωρημα 1 (Κριτήριο βέλτιστης β.ε.λ.). *Εάν η συμπληρωματική β.λ.* $(\vec{\lambda}^*, \vec{\nu}^*)$, *μιας β.ε.λ.* $(\vec{x}^*, \vec{z}^*)$ *του* (5), *είναι β.ε.λ. του* (10) *τότε το* $\vec{x}^*$ *είναι βέλτιστη λύση του* (5) *και το* $\vec{\lambda}^*$ *βέλτιστη λύση του* (10).

Αποδειξη. Ισχύει λόγω του Πορίσματος 1 και της Ιδιότητας 5. □

Ευτυχώς ο προσδιορισμός της συμπληρωματικής β.λ. μιας β.ε.λ. του (5) είναι απλός και απαιτεί τη λύση ενός συστήματος n γραμμικών εξισώσεων με n άγνωστους. Παρατηρήστε ότι σε μια μη εκφυλισμένη περίπτωση η β.ε.λ. του (5) περιέχει ακριβώς m βασικές μεταβλητές. Συνεπώς από τις συμπληρωματικές συνθήκες χαλαρότητας, οι μεταβλητές των αντίστοιχων m συνιστωσών θα πρέπει να είναι μη βασικές μεταβλητές (για τη συμπληρωματική β.λ. του δυϊκού). Οι τιμές για τις υπόλοιπες n μεταβλητές καθορίζονται πλήρως από τη λύση των n ισοτικών περιορισμών του δυϊκού (αφού πρόκειται για β.λ.).

Παραδειγμα 6. *Θέλουμε να καθορίσουμε τη συμπληρωματικής της β.ε.λ.* $(x_1, x_2, z_1, z_2) = (4, 1, 0, 0)$ *του* (6). *Εφόσον οι μεταβλητές* x_1, x_2 *είναι βασικές, οι αντίστοιχες μεταβλητές* ν_1, ν_2 *στη συμπληρωματική β.λ. του* (11) *θα πρέπει να είναι μη βασικές. Η β.λ. που αντιστοιχεί σε αυτή την επιλογή μη βασικών μεταβλητών προκύπτει από τη λύση του*

$$\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 = -1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \end{cases} \text{ που δίνει } \lambda_1 = 2/3,\ \lambda_2 = 1/3\,.$$

Δηλαδή η συμπληρωματική β.λ. είναι η $(\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2) = (2/3, 1/3, 0, 0)$.

Παραδειγμα 7. *Είναι βέλτιστη η β.ε.λ.* $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*) = (1, 1, 0, 0, 1, 0)$ *για το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα;*

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ & x_1 + x_3 \le 1 \\ & x_2 - 2x_3 \le 2 \\ & 2x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0\,. \end{aligned}$$

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Θεωρήματος 1, άρα σχηματίζουμε το δυϊκό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ & \lambda_1 + 2\lambda_3 \ge 2 \\ & \lambda_2 + \lambda_3 \ge 1 \\ & \lambda_1 - 2\lambda_2 \ge -1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0\,. \end{aligned}$$

Για την εύρεση της συμπληρωματικής β.λ. $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \nu_1^*, \nu_2^*, \nu_3^*)$ *του δυϊκού μας ενδιαφέρει το σύστημα εξισώσεων:*

$$\begin{cases} -\lambda_1^* - 2\lambda_3^* + \nu_1^* = -2 \\ -\lambda_2^* - \lambda_3^* + \nu_2^* = -1 \\ -\lambda_1^* + 2\lambda_2^* + \nu_3^* = 1 \end{cases}$$

Οι συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας (13) *δίνουν* $\lambda_2^* = 0, \nu_1^* = 0, \nu_2^* = 0$ *αφού* $z_2^* > 0, x_1^* > 0, x_2^* > 0$ *αντίστοιχα. Αντιαθιστώντας αυτές τις τιμές στο παραπάνω σύστημα και λύνοντας παίρνουμε* $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \nu_1^*, \nu_2^*, \nu_3^*) = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$. *Παρατηρούμε ότι είναι β.ε.λ. άρα η* $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*) = (1, 1, 0, 0, 1, 0)$ *είναι βέλτιστη β.ε.λ. για το αρχικό πρόβλημα σύμφωνα με το Θεώρημα 1.*

Παραδειγμα 8. *Μία επιχείρηση παγωτών παράγει τα προϊόντα Choco, Cocktail, Cherryτα οποία περιέχουν βανίλια, σοκολάτα και κεράσι ως πρώτες ύλες με περιεκτικότητες που δίδονται από τον πίνακα:*

	Βανίλια	*Σοκολάτα*	*Κεράσι*	*τιμή*
Choco	*25%*	*75%*	-	*10000*
Cocktail	*25%*	*25%*	*50%*	*5000*
Cherry	*25%*	-	*75%*	*15000*
Διαθέσιμες ποσότητες	5	3	8	

Οι διαθέσιμες ποσότητες πρώτων υλών στην τελευταία γραμμή μετρώνται σε τόνους, ενώ η τελευταία στήλη περιέχει τιμές πώλησης ανά τόνο. Ο υπεύθυνος παραγωγής θα πρέπει να αποφασίσει πόσους τόνους από κάθε προϊόν θα παραχθεί με τον περιορισμό ότι δε θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ποσότητες πρώτων υλών πέρα από αυτές που είναι διαθέσιμες. Θεωρήστε ότι δεν υπάρχουν περιορισμοί στη ζήτηση των προϊόντων έτσι ώστε όλα τα παραγόμενα προϊόντα τελικά να πωλώνται.

Ισχύει ότι στο πιο επικερδές πλάνο παραγωγής καταναλώνεται όλο το κεράσι και η σοκολάτα ενώ δεν παράγεται καθόλου το προϊόν Cocktail;

Έστω $x_1, x_2, x3$ *οι ποσότητες (σε τόνους) των προϊόντων Choco, Cocktail και Cherry αντίστοιχα, που θα παραχθούν. Ο υπεύθυνος παραγωγής αντιμετωπίζει το πρόβλημα:*

$$\begin{aligned} \max \quad & 10000x_1 + 5000x_2 + 15000x_3 \\ & \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \le 5 \\ & \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \le 3 \\ & \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 \le 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0\,. \end{aligned}$$

ή σε ισοδύναμη μορφή:

$$\begin{aligned} 5000\max \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 20 \\ & 3x_1 + x_2 \le 12 \\ & 2x_2 + 3x_3 \le 32 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0\,. \end{aligned}$$

Το πλάνο παραγωγής στο οποίο δεν παράγεται Cocktail, ενώ καταναλώνεται όλη ποσότητα σοκολάτας και κερασιού αντιστοιχεί στο διάνυσμα $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*)$ *με* $x_2^* = 0, z_2^* = 0, z_3^* = 0$. *Εφόσον 3 συνιστώσες είναι μηδενικές -όσες και οι μεταβλητές απόφασησ- υπάρχει μοναδική β.ε.λ. με αυτές τις συνιστώσες. Οι υπόλοιπες συνιστώσες υπολογίζονται λύνοντας το σύστημα:*

$$\begin{cases} x_1^* + x_3^* + z_1^* = 20 \\ 3x_1^* = 12 \\ 3x_3^* = 32 \end{cases}$$

Άρα $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*) = (12, 0, 32/3, 16/3, 0, 0)$.

Για να διαπιστώσουμε εάν αυτή είναι η βέλτιστη λύση θα κάνουμε χρήση του κριτηρίου στο Θεώρημα 1. Το δυϊκό πρόβλημα είναι:

$$\begin{aligned} 5000\min \quad & 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 \\ & \lambda_1 + 3\lambda_2 \ge 2 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \ge 1 \\ & \lambda_1 + 3\lambda_3 \ge 3 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0\,. \end{aligned}$$

Για την εύρεση της συμπληρωματικής β.λ. $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \nu_1^*, \nu_2^*, \nu_3^*)$ *του δυϊκού μας ενδιαφέρει το σύστημα εξισώσεων:*

$$\begin{cases} -\lambda_1^* - 3\lambda_2^* + \nu_1^* = -2 \\ -\lambda_2^* - \lambda_2^* - 2\lambda_3^* + \nu_2^* = -1 \\ -\lambda_1^* - 3\lambda_3^* + \nu_3^* = -3 \end{cases}$$

Οι συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας (13) *δίνουν* $\lambda_1^* = 0, \nu_1^* = 0, \nu_3^* = 0$ *αφού* $z_1^* > 0, x_1^* > 0, x_3^* > 0$ *αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στο παραπάνω σύστημα και λύνοντας παίρνουμε* $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \nu_1^*, \nu_2^*, \nu_3^*) = (0, 2/3, 1, 0, 5/3, 1)$. *Παρατηρούμε ότι είναι β.ε.λ. άρα η* $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*) = (4, 0, 32/3, 16/3, 0, 0)$ *είναι βέλτιστη β.ε.λ. για το αρχικό πρόβλημα σύμφωνα με το Θεώρημα 1.*

Συνεπώς όντως στο πιο επικερδές πλάνο ο υπεύθυνος παραγωγής δε θα επιλέξει να παραχθεί Cocktail ενώ θα χρησιμοποιηθούν όλες οι διαθέσιμες ποσότητες σοκολάτας και κερασιού.

3.2. Συμπληρωματικότητα και ο πίνακας simplex. Το Θεώρημα 1 δίδει ένα κριτήριο για το εάν μια δοσμένη β.ε.λ. είναι βέλτιστη κοιτώντας τις συμπληρωματικές β.λ. του δυϊκού. Επίσης, το κριτήριο τερματισμού του αλγόριθμου simplex είναι η μη θετικότητα των συντελεστών της αντικειμενικής εξίσωσης. Το ακόλουθο θεώρημα μας λέει ότι σε κάθε βήμα του simplex , η συμπληρωματική β.λ. του δυϊκού για την τρέχουσα β.ε.λ. εμφανίζεται στους συντελεστές της αντικειμενικής γραμμής με αντίστροφο πρόσημο.

Θεωρημα 2. *Έστω $(x'_j, z'_i, i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n)$ η β.ϵ.λ. που αντιστοιχεί σϵ κάποιο βήμα του simplex . όπου η γραμμή της αντικϵιμϵνικής ϵξίσωσης πϵριέχϵι τις τιμές:*

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & z_i & \cdots & z_m \\ \hline -v'_1 & \cdots & -v'_j & \cdots & -\lambda'_i & \cdots & -\lambda'_m \end{array}$$

Τότϵ το διάνυσμα μϵ συνιστώσϵς $(\lambda'_1,\ldots,\lambda'_m, v'_1,\ldots,v'_n)$ ϵίναι συμπληρωματική β.λ. της $(x'_j, z'_i, i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n)$.

Παραδειγμα 9. *Στον πρώτο πίνακα simplexτου Παραδϵίγματος 3 η συμπληρωματική β.λ. της $(x_1,x_2,x_3,z_1,z_2) = (0,0,0,3,2)$ ϵίναι η $(\lambda_1,\lambda_2,\nu_1,\nu_2,\nu_3) = (0,0,-1,1,-2)$.*

Εάν κάποιος συντελεστής στην αντικειμενική εξίσωση είναι θετικός τότε η τρέχουσα β.ε.λ. δεν είναι βέλτιστη. Αυτό μας δίνει το αντίστροφο του Θεωρήματος 1.

Πορισμα 2. *Η β.ϵ.λ. $(\vec{x}^*, \vec{z}^*)$ του (5) ϵίναι βέλτιστη ϵάν και μόνο ϵάν υπάρχϵι συμπληρωματική β.λ. $(\vec{\lambda}^*, \vec{v}^*)$ του (10) η οποία ϵίναι ϵφικτή, δηλαδή β.ϵ.λ.*

3.3. Ανάλυση ευαισθησίας.

Θεωρήστε το εξής πρόβλημα

$$\begin{aligned} &\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \,, i = 1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,m \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le b_k + \epsilon \,, \\ &x_j \ge 0 \,, j = 1,\ldots,n \,, \end{aligned} \tag{16}$$

όπου ϵ κάποιος μικρός (κατά απόλυτη τιμή) αριθμός. Η βέλτιστη τιμή του (16) διαφέρει από αυτή του (4) κατά την ποσότητα που δίδεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεωρημα 3 (Θεώρημα Ευαισθησίας Γραμμικών Προγραμμάτων). *Η βέλτιστη τιμή αλλάζϵι κατά $\epsilon\lambda_k^*$, όπου $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$ η βέλτιστη λύση του δυϊκού προβλήματος (9).*

Αποδειξη. Το δυϊκό πρόβλημα για το (16) είναι:

$$\begin{aligned} &\min \quad \sum_{i\ne k} b_i\lambda_i + (b_k+\epsilon)\lambda_k \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \ge c_j \,, j=1,\ldots,n \,, \\ &\lambda_i \ge 0 \,, i = 1,\ldots,m \,. \end{aligned} \tag{17}$$

Παρατηρήστε ότι οι β.ε.λ. του προβλήματος αυτού είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές στο (9) αφού τα δύο προβλήματα έχουν τους ίδιους περιορισμούς. Ας θεωρήσουμε ότι οι β.ε.λ. εκτός της βέλτιστης, δίδονται από τα L διανύσματα $(\vec{\lambda}^{(1)}, \vec{v}^{(1)}), \ldots, (\vec{\lambda}^{(L)}, \vec{v}^{(L)})$ με $\vec{\lambda}^{(l)} = (\lambda_1^{(l)},\ldots,\lambda_m^{(l)}), \vec{v}^{(l)} = (v_1^{(l)},\ldots,v_m^{(l)})$ Τώρα, μεταξύ της βέλτιστης λύσης και οποιασδήποτε άλλης β.ε.λ. ισχύει $\sum_{i=1}^m b_i\lambda_i^* < \sum_{i=1}^m b_i\lambda_i^{(l)}$ για όλα τα $l=1,\ldots,L$. Για μικρό ϵ η ανισότητα $\sum_{i\ne k}^m b_i\lambda_i^* + (b_k+\epsilon)\lambda_k^* < \sum_{i\ne k}^m b_i\lambda_i^{(l)} + (b_k+\epsilon)\lambda_k^{(l)}$ εξακολουθεί να ικανοποιείται, άρα η $(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$ παραμένει βέλτιστη για το (17). Η βέλτιστη τιμή είναι $\sum_{i=1}^m b_i\lambda_i^* + \epsilon\lambda_k^*$ η οποία διαφέρει από αυτή του (9) κατά $\epsilon\lambda_k^*$. □

Παραδειγμα 10. *Θϵωρήστϵ το γραμμικό πρόβλημα στο Παράδϵιγμα 3. Βρϵίτϵ πόσο θα αλλάξϵι η μέγιστη τιμή ϵάν ο πρώτος πϵριορισμός αλλάξϵι σϵ $2x_1 + x_3 \le 3.001$.*

Απάντηση: Εφόσον η αλλαγή στη σταθϵρά του πϵριορισμού ϵίναι μικρή μπορούμϵ να ϵφαρμόσουμϵ το Θϵώρημα 3 όπου σύμφωνα μϵ αυτό η αλλαγή ϵίναι $\epsilon\lambda_1^*$. Εδώ, $\epsilon = 0.001$ και $\lambda_1^* = 1/2$ (βλ. Παράδϵιγμα 3), άρα η τιμή αλλάζϵι κατά 0.0005.

Ποιά ϵίναι η νέα βέλτιστη λύση· Εφόσον οι πϵριορισμοί έχουν αλλάξϵι, το ίδιο θα έχουν κάνϵι και οι β.ϵ.λ., άρα η λύση $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, z_1^*, z_2^*) = (1/2, 0, 2, 0, 0)$ δϵν πϵριμένουμϵ να ϵξακολουθϵί να ϵίναι βέλτιστη για τον νέο πϵριορισμό. Στην απόδϵιξη του Θϵωρήματος 3 ϵίδαμϵ ότι για μικρή αλλαγή των πϵριορισμών, η βέλτιστη λύση $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, v_1^*, v_2^*, v_4^*) = (1/2, 3/2, 0, 5/2, 0)$ του δυϊκού παραμένϵι βέλτιστη.

Ας δούμϵ αν συμβαίνϵι το ίδιο και ϵδώ χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Βέλτιστης β.ϵ.λ.. Οι συνιστώσϵς x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 της συμπληρωματικής β.λ. της $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, v_1^*, v_2^*, v_4^*)$ θα πρέπϵι να ικανοποιούν τους πϵριορισμούς $2x_1 + x_3 + z_1 = 3.001$ και $x_2 + x_3 + z_2 = 2$ όπως και τις συνθήκϵς συμπληρωματικής χαλαρότητας. Οι τϵλϵυταίϵς δίνουν $z_1 = z_2 = x_2 = 0$ αφού $\lambda_1^*, \lambda_2^*, v_2^* > 0$, άρα λύνοντας τις ϵξισώσϵις των πϵριορισμών λαμβάνουμϵ

$(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (0.5005, 0, 2, 0, 0)$. *Παρατηρούμε ότι η β.λ. αυτή είναι β.ε.λ. αφού όλες οι συνιστώσες είναι μη αρνητικές. Συνεπώς, από το Κριτήριο Βέλτιστης β.ε.λ., η βέλτιστη λύση του δυϊκού παραμένει η ίδια. Εφαρμόζοντας πάλι το ίδιο κριτήριο συμπεραίνομε ότι η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος (μετά την αλλαγή) είναι η* $(0.5005, 0, 2, 0, 0)$.

Παραδειγμα 11. *Πόσο θα αλλάξει η βέλτιστη τιμή του προβλήματος στο Παράδειγμα 3 εάν ο 2ος περιορισμός αλλάξει σε* $x_2 + x_3 \leq 2.0015$*;*

Η αλλαγή είναι μικρή άρα από το Θεώρημα της Ευασθησίας βλέπουμε ότι η βέλτιστη τιμή θα αλλάξει κατά $0.0015\lambda_2^*$. *Από τον πίνακα simplexστο τελευταίο βήμα (βλ. Παράδειγμα 3) και το Θεώρημα 2 βλέπουμε ότι* $\lambda_2^* = 3/2$.

4. Το Πρόβλημα της Μεταφοράς

Θεωρήστε ότι n αποθήκες περιέχουν ποσότητες ενός συγκεκριμένου προϊόντος τα οποίο επιθυμούμε να διαθέσουμε σε m καταστήματα. Επιπλέον, η i-οστή αποθήκη (όπου $i = 1, 2, \ldots, n$) διαθέτει s_i μονάδες προϊόντος ενώ το j-οστό κατάστημα (για $j = 1, 2, \ldots, m$) απαιτεί τουλάχιστον d_j μονάδες. Εάν η μεταφορά κάθε μονάδας προϊόντος από την i-οστή αποθήκη προς το j-οστό κατάστημα κοστίζει c_{ij}, τότε ποιός τρόπος μεταφοράς είναι ο πιο οικονομικός; Παρατηρήστε ότι για να είναι δυνατή η εκπλήρωση της ζήτησης των καταστημάτων θα πρέπει $\sum_{i=1}^{n} s_i \geq \sum_{j=1}^{m} d_j$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$ κάτι που αργότερα θα άρουμε.

Προβλήματα τέτοιας μορφής ή γενικότερα προβλήματα που μπορούν ισοδύναμα να τεθούν σε αυτή την μορφή ονομάζονται **προβλήματα μεταφοράς**.

Μεταβλητές απόφασης εδώ είναι οι ποσότητες x_{ij} που θα μεταφερθούν από την αποθήκη i στο κατάστημα j για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και $j = 1, \ldots, m$. Το πρόβλημα μεταφοράς δίδεται από το γραμμικό πρόγραμμα:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq s_i \,, i = 1, \ldots, n \,, \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j \,, j = 1, \ldots, m \,. \end{aligned} \tag{18}$$

Για κάθε i, ο περιορισμός $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq s_i$ αντιστοιχεί στο γεγονός ότι από την αποθήκη i δε μπορεί να μεταφερθεί συνολικά περισσότερη από την ποσότητα s_i που είναι διαθέσιμη εκεί. Παρόμοια, η ποσότητα που μεταφέρεται στο j-οστό κατάστημα συνολικά από όλες τις αποθήκες, πρέπει να καλύπτει τη ζήτηση d_j εκεί.

Παραδειγμα 12. *Θεωρήστε ότι δύο γεωγραφικά απομακρυσμένες εκτυπωτικές μονάδες εφοδιάζουν με ημερήσια φύλλα μιας συγκεκριμένης εφημερίδας καθημερινά τρία πρακτορεία ημερήσιου τύπου που βρίσκονται σε διαφορετικές πόλεις. Στην πρώτη μονάδα παράγονται 10000 φύλλα και 5000 στη δεύτερη. Η ζήτηση στην 1η, 2η και 3η πόλη είναι 6000, 7000 και 2000 αντίστοιχα. Εάν το κόστος μεταφοράς για κάθε 1000 φύλλα ανάμεσα στην i-οστή μονάδα και j-οστή πόλη είναι c_{ij} όπου $c_{11} = c_{23} = 3$, $c_{12} = c_{21} = 2$, $c_{13} = c_{22} = 1$ επιθυμούμε να βρούμε τον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς.*

Εφόσον το πρόβλημα μεταφοράς είναι γραμμικό θα λυθεί με τη μέθοδο simplexχωρίς όμως τη χρήση πίνακα. Κάθε pivotαπαιτεί $(nm + n + m + 1)(n + m) = \Theta(nm(n + m))$ πράξεις αφού έχουμε $nm + n + m$ μεταβλητές (nm απόφασης και $n + m$ χαλαρότητας) και $n + m$ περιορισμούς. Λόγω της ειδικής μορφής[2] που έχει ο πίνακας για το πρόβλημα της μεταφοράς, μόνο $O(nm)$ πράξεις είναι αναγκαίες πραγματικά όπως θα δούμε.

Παρά τις όποιες διαφορές με το simplexόπως τον χρησιμοποιήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους, η ιδέα είναι ακριβώς η ίδια:

1. Επιλέγουμε αρχική β.ε.λ.
2. Ελέγχουμε εάν η λύση αυτή είναι βέλτιστη. Αν ναί, σταματάμε.
3. Εάν όχι, μετακινούμαστε σε μια οικονομικότερη β.ε.λ. αντικαθιστώντας μια βασική μεταβλητή με μια μη βασική και εκτελούμε πάλι το βήμα 2 για τη νέα β.ε.λ.

Ο έλεγχος για τη βέλτιστη λύση στο βήμα 2 και η επιλογή της μεταβλητής που θα εισέλθει στη βάση στο βήμα 3 θα γίνεται με τη χρήση του Θεωρήματος 2. Για τον σκοπό αυτό θα αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε το

[2] Ο πίνακας είναι *αραιός*, δηλαδή τα περισσότερα στοιχεία του είναι μηδενικά

δυϊκό πρόβλημα του (18):

$$\text{(19)}\qquad \begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{m} d_j\mu_j - \sum_{i=1}^{n} s_i\lambda_i \\ & \mu_j - \lambda_i \le c_{ij}\ , i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m\ , \\ & \lambda_i, \mu_j \ge 0\ . \end{aligned}$$

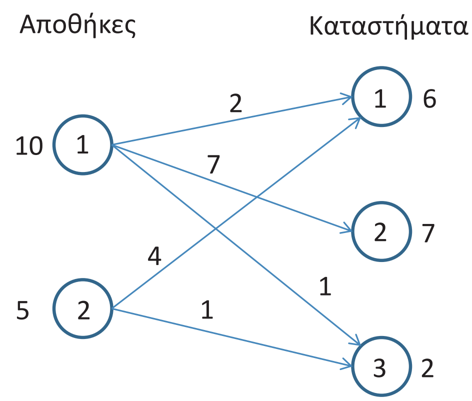
Στη γενική περίπτωση του (4) το βήμα 1 απαιτεί τη Φάση 1 του simplex. Ευτυχώς εδώ είναι εύκολο να βρεθεί μια β.ε.λ. γιατί αυτές έχουν μια εύκολα αναγνωρίσιμη μορφή.

4.1. Αντιστοιχία β.ε.λ. με Δέντρα μεταφοράς. Θεωρήστε ότι το διάνυσμα $(x_{ij}, z_i, \zeta_j, i = 1,\dots,n, j = 1,\dots,m)$ είναι μια β.ε.λ., όπου z_i η μεταβλητή χαλαρότητας του i-οστού περιορισμού διάθεσης και ζ_j αυτή του j-οστού περιορισμού ζήτησης, δηλαδή

$$\text{(20)}\qquad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} + z_i = s_i\ , i = 1,\dots,m\ , \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \zeta_j = d_j\ , j = 1,\dots,n\ .$$

Λόγω της υπόθεσης $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$ θα πρέπει κάθε εφικτή λύση (όχι μόνο οι β.ε.λ.) να ικανοποιεί τους περιορισμούς στο (18) με ισότητα, αφού σε κανένα κατάστημα δε θα μπορούσε να υπερκαλύπτεται η ζήτηση αφού δεν περισσεύει καμμία ποσότητα προϊόντος: η συνολικά διαθέσιμη ποσότητα ίσα που φτάνει για την κάλυψη της ζήτησης. Συνεπώς $z_i = \zeta_j = 0$ για κάθε i, j.

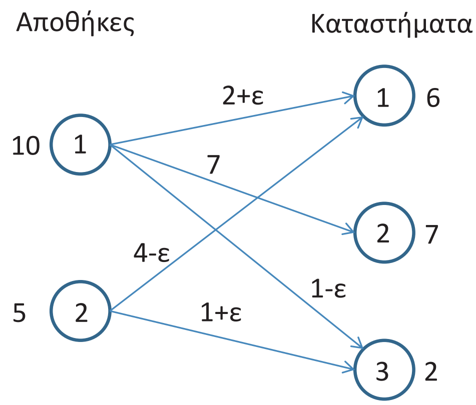
Παραδειγμα 13. *Για το Παράδειγμα 12 ένας τρόπος μεταφοράς των 15000 φύλλων είναι αυτός που απεικονίζεται με το γράφημα στο Σχήμα 2. Οι αριθμοί στις ακμές δηλώνουν τις ποσότητες (σε χιλιάδες) που*



Σχημα 2.

μεταφέρονται από κάθε αφετηρία προς κάθε προορισμό. Οι αριθμοί διπλα στις αποθήκες και καταστήματα δηλώνουν τους αντίστοιχους περιορισμούς διάθεσης ή ζήτησης (σε χιλιάδες). Παρατηρήστε ότι όλοι οι περιορισμοί διάθεσης και ζήτησης ικανοποιούνται ακριβώς.

Θα μπορούσε αυτή η εφικτή λύση να είναι β.ε.λ.; Η απάντηση είναι αρνητική, γιατί δεν ικανοποιούνται όσο το δυνατόν περισσότεροι περιορισμοί. Όπως είδαμε ικανοποιούνται αυτοί που αφορούν τη διάθεση και ζήτηση, όμως θα μπορούσαμε αλλάζοντας τις μεταφερόμενες ποσότητες μεταξύ αφετηριών και προορισμών να επιτύχουμε την εκμηδένιση ενός από τα $x_{ij} \neq 0$, δηλαδή την ικανοποίηση με ισότητα ενός ακόμα περιορισμού (θετικότητας). Συγκεκριμένα, μπορούμε μεταβάλουμε τις ποσότητες στις ακμές κατά μήκος του κύκλου που σχηματίζεται από τις κορυφές Αποθήκη 1,Κατάστημα 1,Αποθήκη 2,Κατάστημα 3,Αποθήκη 1 όπως φαίνεται στο γράφημα στο Σχήμα 3. Παρατηρήστε ότι αυξάνοντας το $\epsilon > 0$ κατά μια μικρή ποσότητα, όλοι οι περιορισμοί διάθεσης, ζήτησης και θετικότητας που πρίν ικανοποιοούνταν με ισότητα εξακολουθούν να κάνουν το ίδιο. Ειδικότερα για τους περιορισμούς διάθεσης και ζήτησης, αυτό συμβαίνει γιατί σε κάθε αποθήκη και κατάστημα που βρίσκεται στον κύκλο προσθαφαιρείται η ίδια ποσότητα ϵ με αποτέλεσμα να μην αλλάζει η συνολική ποσότητα που εξέρχεται/εισέρχεται σε αυτή την κορυφή. Η αύξηση της ποσότητας ϵ είναι δυνατή μέχρι να λάβει την τιμή 1, όπου $x_{13} = 0$ και παύει πια η Αποθήκη 1 να στέλνει στο Κατάστημα 3. Εφόσον η ικανοποίηση ενός ακόμα περιορισμού ακριβώς είναι δυνατή, η λύση στο Σχήμα 2 δε μπορεί να βρίσκεται πάνω σε 'γωνία' που σχηματίζουν οι περιορισμοί και άρα δεν είναι β.ε.λ.



Σχημα 3.

Παρατηρήστε ότι μια τέτοια μεταβολή που οδηγεί στην ικανοποίηση με ισότητα ενός ακόμα περιορισμού θετικότητας, είναι πάντα δυνατή εφόσον το γράφημα περιέχει κάποιον κύκλο. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην εξής πολύ χρήσιμη ιδιότητα:

Ιδιοτητα 6 ('Β.Ε.Λ.=ΔΕΝΤΡΑ'). *Η $(x_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m)$ είναι β.ε.λ. εάν και μόνο εάν το γράφημα που αποτελείται από τις $n + m$ κορυφές των αποθηκών και καταστημάτων και έχει ως ακμές (i, j) μόνο αυτές όπου $x_{ij} \neq 0$, δεν περιέχει κύκλους, δηλαδή αποτελείται από ένα ή περισσότερα δέντρα.*

Αποδειξη. Το ευθύ μέρος της συνεπαγωγής είναι απλά η γενίκευση του συμπεράσματός μας για το παράδειγμα παραπάνω.

Για το αντίστροφο ας θεωρήσουμε μια εφικτή λύση $(x_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m)$ η οποία αντιστοιχεί σε δέντρο/α. Για μια τέτοια λύση θα δείξουμε ότι δεν είναι δυνατή η ικανοποίηση περαιτέρω περιορισμών με ισότητα. Άρα βρισκόμαστε σε 'γωνία' των περιορισμών, δηλαδή σε β.ε.λ.

Ας υποθέσουμε ότι είναι δυνατή η μεταβολή μιας τέτοιας λύσης σε άλλη επίσης εφικτή όπου μηδενίζεται κάποιο x_{ij} το οποίο αρχικά είναι μη μηδενικό. Μια τέτοια μεταβολή θα αντιστοιχούσε στην απομάκρυνση μιας ακμής από ένα δέντρο με συνέπεια τον χωρισμό του σε δύο μη συνδεδεμένα κομμάτια. Σε κάθε κομμάτι η διάθεσιμότητα των αποθηκών που αυτό περιέχει θα κάλυπτε ακριβώς τη ζήτηση των καταστημάτων που βρίσκονται στο ίδιο κομμάτι. Άρα η ακμή (i, j) που αφαιρέθηκε θα έπρεπε να ικανοποιούσε $x_{ij} = 0$ αρχικά, κάτι που είναι άτοπο. □

Ένα πρόβλημα μεταφοράς είναι **μη εκφυλισμένο** εάν όλες οι β.ε.λ. αντιστοιχούν σε συνεκτικά γραφήματα, δηλαδή σε ένα μοναδικό (και άρα συνδετικό) δέντρο. Τα εκφυλισμένα προβλήματα απαιτούν ειδική αντιμετώπιση και δε θα ασχοληθούμε μαζί τους.

4.2. Εύρεση αρχικού δέντρου: ο Κανόνας της Βορειοδυτικής Γωνίας. Βάσει της προηγούμενης ανάλυσης, αρκεί να βρούμε ένα δέντρο με το οποίο θα αρχίσουμε τη μέθοδο simplex. Ένας τρόπος είναι σύμφωνα με τον Κανόνα της Βορειοδυτικής Γωνίας:

(1) Θέτουμε $i = 1, j = 1$.
(2) Από την αποθήκη i μεταφέρεται προς το κατάστημα j η μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα έτσι ώστε:
   - Είτε πρώτα εξαντλείται η διαθέσιμη ποσότητα s_i στην περίπτωση την οποία θέτουμε $i = i + 1$ και συνεχίζουμε στο βήμα 2.
   - Είτε πρώτα καλύπτεται η ζήτηση d_j στην περίπτωση την οποία θέτουμε $j = j + 1$ και συνεχίζουμε στο βήμα 2.
   - Είτε καλύπτεται ταυτόχρονα η ζήτηση d_j και η διαθέσιμη ποσότητα s_i. Στην περίπτωση αυτή ο αλγόριθμος τερματίζει.

Την τρέχουσα β.ε.λ. $(x_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m)$ την αναγράφουμε σε έναν πίνακα όπου οι γραμμές αντιστοιχούν στις αποθήκες και οι στήλες στα καταστήματα. Στο τέλος κάθε γραμμής i εμφανίζεται η διαθέσιμη ποσότητα s_i, ενώ στο τέλος της στήλης j γράφουμε τα d_j. Συνηθίζεται τα στοιχεία του πίνακα που αντιστοιχούν σε μηδενικά x_{ij} να τα αφήνουμε κενά.

	1	2	3	
1	6	4		10
2		3	2	2
	6	7	2	

Πινακας 2.

	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	m	
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1m}	s_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	x_{i1}	x_{i2}	$\vdots$	x_{ij}	$\vdots$	x_{im}	s_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_{n1}	x_{n2}	$\vdots$	x_{nj}	$\vdots$	x_{nm}	s_n
	d_1	d_2	$\cdots$	d_j	$\cdots$	d_m	

Για το Παράδειγμα 12 ο κανόνας της ΒΔ γωνίας δίνει την β.ε.λ. του Πίνακα 2. Μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας τον κανόνα της ΒΔ γωνίας πάνω στον πίνακα. Σύμφωνα με το βήμα 1 του κανόνα, αρχίζουμε από τη ΒΔ γωνία και μετακινούμαστε είτε προς τα ανατολικά είτε νότια ανάλογα με το εάν αντίστοιχα, πρώτα καλύφθηκε η ζήτηση ή εξαντλήθηκε η διαθέσιμη ποσότητα.

Εφόσον βρήκαμε μια αρχική β.ε.λ. προχωράμε στον έλεγχο εάν η τρέχουσα β.ε.λ. είναι βέλτιστη.

4.3. Έλεγχος βέλτιστης λύσης και pivot. Εάν είχαμε διαθέσιμο τον πίνακα simplex θα ελέγχαμε εάν οι συντελεστές στη γραμμή της αντικειμενικής εξίσωσης ήταν όλοι αρνητικοί ή μηδέν. Οι συντελεστές μπορούν να υπολογιστούν από το Θεώρημα 2. Θεωρήστε ότι η τρέχουσα β.ε.λ. είναι η $(x_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m)$ και συμπληρωματική της στο δυϊκό πρόβλημα (19) είναι η $(\lambda_i, \mu_j, v_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m)$ όπου v_{ij} είναι η μεταβλητή χαλαρότητας του περιορισμού στο (19), δηλαδή

$$\mu_j - \lambda_i + v_{ij} = c_{ij}\ , i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\,. \tag{21}$$

Από τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας ισχύει $x_{ij}v_{ij} = 0$ για όλα τα i, j. Θυμηθείτε ότι από την Ιδιότητα 6 τα μη μηδενικά x_{ij} δίνουν ένα συνδετικό δέντρο (για μη εκφυλισμένα προβλήματα μεταφοράς πάντα). Από τη θεωρία γραφημάτων είναι γνωστό ότι σε κάθε συνδετικό δέντρο ο αριθμός των ακμών είναι κατά ένα μικρότερος από τον αριθμό των κορυφών, άρα υπάρχουν ακριβώς $n + m - 1$ μη μηδενικά x_{ij}. Για αυτά τα i, j θα ισχύει $v_{ij} = 0$ από όπου λόγω της (21) λαμβάνουμε τις $n + m - 1$ εξισώσεις $\mu_j - \lambda_i = c_{ij}$ με τους $n + m$ άγνωστους $\lambda_i, \mu_j, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. Αφού υπάρχει ένας περισσότερος άγνωστος από εξισώσεις υπάρχει άπειρος αριθμός λύσεων. Μπορούμε να λάβουμε μια από αυτές αν θέσουμε οποιονδήποτε έναν από τους αγνώστους να είναι ίσος με μια αυθαίρετη τιμή.

Παραδειγμα 14. *Για την αρχική β.ε.λ. στον Πίνακα 2 του Παραδείγματος 12 λαμβάνουμε* $\mu_1 - \lambda_1 = 3, \mu_2 - \lambda_1 = 2, \mu_2 - \lambda_2 = 1, \mu_3 - \lambda_2 = 3$. *Έχουμε 4 εξισώσεις και 5 άγνωστους οπότε θέτουμε (αυθαίρετα)* $\lambda_1 = 0$. *Λύνοντας ως πρός τους υπόλοιπους λαμβάνουμε* $\mu_1 = 3, \mu_2 = 2, \lambda_2 = 1, \mu_3 = 4$.

Απομένει να προσδιορίσουμε τις τιμές των v_{ij} για τα i, j εκείνα με $x_{ij} = 0$. Από την (21), $v_{ij} = c_{ij} - (\mu_j - \lambda_i)$, όπου οι ποσότητες στο δεξί μέλος είναι τώρα γνωστές.

Τώρα μπορούμε να ελέγξουμε εάν η συμπληρωματική β.λ. του δυϊκού $(\lambda_i, \mu_j, v_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m)$ είναι εφικτή. Αν ναι, τότε από το Θεώρημα 1 η λύση $(x_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m)$ είναι βέλτιστη και σταματάμε. Αν υπάρχει κάποιο $v_{ij} < 0$ τότε από το Θεώρημα 2 η τρέχουσα β.ε.λ. δεν είναι βέλτιστη.

Παραδειγμα 15. *Συνεχίζοντας το παραπάνω παράδειγμα, έχουμε* $v_{13} = c_{13} - (\mu_3 - \lambda_1) = 1 - (4 - 0) = -3 < 0$, *άρα η β.ε.λ. στον Πίνακα 2 δεν είναι βέλτιστη.*

Από το Θεώρημα 2 μπορούμε να μετακινηθούμε σε καλύτερη β.ε.λ. αυξάνοντας τη μεταβλητή x_{ij} (για τα i, j που βρήκαμε $v_{ij} < 0$ παραπάνω) από 0 σε μια θετική τιμή $\epsilon > 0$. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την προσθήκη της ακμής (i, j) στο συνδετικό δέντρο που αντιστοιχεί στην τρέχουσα β.ε.λ. Συνεπώς θα δημιουργηθεί ένας κύκλος που περιέχει την ακμή (i, j). Προσθαφαιρώντας το ϵ κατάλληλα στις ακμές κατά μήκος του κύκλου αυτού μπορούμε να διασφαλίσουμε ότι στις κορυφές εξακολουθούν να ικανοποιούνται οι περιορισμοί διάθεσης και ζήτησης.

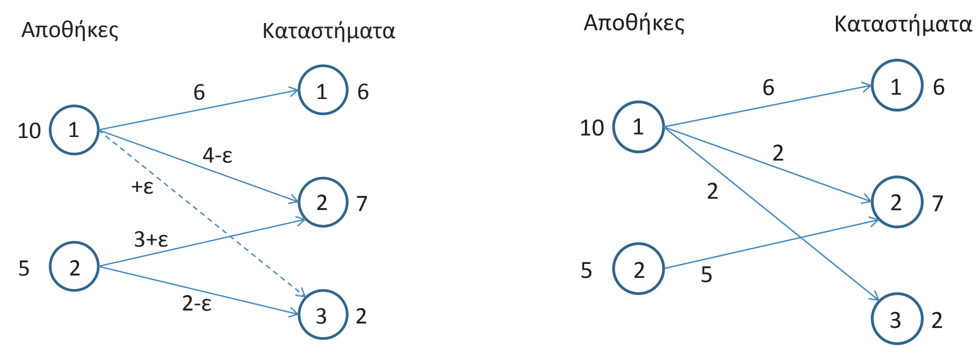
	1	*2*	*3*	
1	*6*	$4-\epsilon$	$+\epsilon$	*10*
2		$3+\epsilon$	$2-\epsilon$	*2*
	6	*7*	*2*	

	1	*2*	*3*	
1	*6*	*2*	*2*	*10*
2		*5*		*2*
	6	*7*	*2*	

Πινακας 3.

Αυξάνουμε το ϵ μέχρι το σημείο που κάποια από τις ακμές του κύκλου μηδενίζεται. Αυτό αντιστοιχεί στην αφαίρεση μιας ακμής από το γράφημα, άρα καταλήγουμε πάλι σε δέντρο. Το δέντρο αυτό αντιπροσωπεύει τη νέα β.ε.λ. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για τη νέα β.ε.λ. μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη.

Παραδειγμα 16. *Εφόσον $v_{13} < 0$, αυξάνουμε τη μεταβλητή x_{13} θέτοντας $x_{13} = \epsilon > 0$ και αναδιατάσοντας τις μεταφερόμενες ποσότητες κατά μήκος του κύκλου που σχηματίζεται στο Σχήμα 4 αριστερά.*



Σχημα 4.

Η μεγαλύτερη δυνατή αύξηση που μπορούμε να επιτύχουμε πριν κάποια μειούμενη ακμή γίνει αρνητική είναι για $\epsilon = 2$ (όπου έχουμε $x_{23} = 0$) δίνοντας τη νέα β.ε.λ. που απεικονίζεται δεξιά στο Σχήμα 4. Σε αυτό το σημείο η x_{23} γίνεται μη βασική μεταβλητή.

Όπως και για την εύρεση της αρχικής β.ε.λ. η μετακίνηση προς τη νέα β.ε.λ. μπορεί να βρεθεί χωρίς την κατασκευή των γραφημάτων στο Σχήμα 4, αλλά με τη χρήση πίνακα όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.

Για τη νέα β.ε.λ. επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με παραπάνω. Οι εξισώσεις που προκύπτουν από τα $x_{ij} > 0$ είναι $\mu_1 - \lambda_1 = 3, \mu_2 - \lambda_1 = 2, \mu_3 - \lambda_1 = 1, \mu_2 - \lambda_2 = 3$. Για να βρούμε μια λύση θέτουμε αυθαίρετα $\mu_2 = 0$ λαμβάνοντας: $\lambda_1 = -2, \mu_1 = 1, \mu_3 = -1, \lambda_2 = -1$. Βλέπουμε ότι για αυτή την επιλογή προέκυψαν αρνητικές τιμές για κάποιες από τις συνιστώσες της συμπληρωματικής λύσης. Παρατηρήστε ότι εάν προσθέταμε στα λ_i, μ_j τον ίδιο αριθμό, θα λαμβάναμε πάλι μια λύση για τις παραπάνω εξισώσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί ο ίδιος αριθμός προσθαφαιρείται από κάθε εξίσωση λόγω των όρων $\mu_j - \lambda_i$ με αποτέλεσμα να εξακολουθεί να ικανοποιείται η ισότητα με το c_{ij}. Για παράδειγμα, προσθέτοντας τον αριθμό 2 λαμβάνουμε $\lambda_1' = -2 + 2 = 0, \mu_1' = 1 + 2 = 3, \mu_3' = -1 + 2 = 1, \lambda_2' = -1 + 2 = 1$, όπου τώρα όλες οι τιμές είναι θετικές.

Μήπως όμως διαφορετικές λύσεις για τα λ_i, μ_j οδηγούν σε διαφορετικές τιμές για τα v_{ij} και άρα ίσως σε διαφορετικά αποτελέσματα; Η απάντηση είναι όχι γιατί όπως φαίνεται στις εξισώσεις (21), οι τιμές των v_{ij} είναι συνάρτηση της τιμής της διαφοράς $\mu_j - \lambda_i$ και όχι των λ_i, μ_j. Συνεπώς, οι τιμές των τελευταίων δεν έχουν καμμιά σημασία και μπορούμε να τις χρησιμοποιούμε στον υπολογισμό των v_{ij} έστω και αν κάποιες από αυτές είναι αρνητικές.

Παραδειγμα 17. *Υπολογίζουμε τα v_{ij} για i, j με $x_{ij} = 0$: $v_{21} = c_{21} - (\mu_1 - \lambda_2) = 2 - (1 - (-1)) = 0$ και $v_{23} = c_{23} - (\mu_3 - \lambda_2) = 3 - (-1 - (-1)) = 3 > 0$. Άρα υπάρχει συμπληρωματική λύση του δυϊκού η οποία είναι β.ε.λ., συνεπώς από το Θεώρημα 1 η β.ε.λ. στον Πίνακα 3 δεξιά είναι η βέλτιστη.*

Παραδειγμα 18. **Κάθε πρωί μια εταιρία γαλακτοκομικών εφοδιάζει δύο πόλεις με 17 και 18 τόνους γάλακτος αντίστοιχα. Το γάλα μεταφέρεται από 3 διαφορετικά εργοστάσια της εταιρίας, όπου το κόστος μεταφοράς (ανά τόνο) από κάθε εργοστάσιο σε κάθε πόλη δίνεται από τον πίνακα:**

	πόλη 1	**πόλη 2**
εργοστάσιο 1	4	2
εργοστάσιο 2	4	2
εργοστάσιο 3	2	3

Το εργοστάσιο 1 παράγει 10 τόνους καθημερινά, 20 τόνους το εργοστάσιο 2 και 5 τόνους το εργοστάσιο 3.

(1) **Βρείτε τον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς του γάλακτος.**

Αρχικοποίηση. *Για να βρούμε μια αρχική β.ε.λ. χρησιμοποιούμε τον κανόνα της βορειοδυτικής γωνίας, όπου βρίσκουμε*

	πόλη 1	πόλη 2	
εργοστάσιο 1	10	0	10
εργοστάσιο 2	7	13	20
εργοστάσιο 3	0	5	5
	17	18	

Βήμα 1: *Για κάθε μηδενική μεταβλητή* x_{ij} *πρέπει να ικανοποιείται* $\mu_j - \lambda_i = c_{ij}$, *οπότε λαμβάνουμε*

$$\begin{cases} \mu_1 - \lambda_1 = 4 \\ \mu_1 - \lambda_2 = 4 \\ \mu_2 - \lambda_2 = 2 \\ \mu_2 - \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Εφόσον οι άγνωστοι υπερβαίνουν τον αριθμό των εξισώσεων κατά ένα, θέτουμε αυθαίρετα κάποια μεταβλητή ίση μηδέν, π.χ., $\lambda_2 = 0$ *και λύνουμε ως προς τους υπόλοιπους άγνωστους για να λάβουμε* $\mu_1 = 4, \mu_2 = 2, \lambda_3 = -1, \lambda_1 = 0$. *Τώρα για τις μηδενικές μεταβλητές* x_{ij} *ελέγχουμε εάν* $-\nu_{ij} = \mu_j - \lambda_i - c_{ij} \leq 0$. *Για* $i = 3, j = 1$: $\mu_1 - \lambda_3 - c_{31} = 2 > 0$, *άρα θα πρέπει να μεταβάλουμε τη β.ε.λ. κατά* $\epsilon > 0$ *ως εξής:*

	πόλη 1	πόλη 2	
εργοστάσιο 1	10	0	10
εργοστάσιο 2	7-ϵ	13+ϵ	20
εργοστάσιο 3	ϵ	5-ϵ	5
	17	18	

Βλέπουμε ότι ανώτατη επιτρεπτή τιμή είναι η $\epsilon = 5$ *η οποία δίνει:*

	πόλη 1	πόλη 2	
εργοστάσιο 1	10	0	10
εργοστάσιο 2	2	18	20
εργοστάσιο 3	5	0	5
	17	18	

Βήμα 2: *Για κάθε μηδενική μεταβλητή* x_{ij} *πρέπει να ικανοποιείται* $\mu_j - \lambda_i = c_{ij}$, *οπότε λαμβάνουμε*

$$\begin{cases} \mu_1 - \lambda_1 = 4 \\ \mu_1 - \lambda_2 = 4 \\ \mu_2 - \lambda_2 = 2 \\ \mu_1 - \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

Θέτοντας $\mu_1 = 0$ *και λύνοντας ως προς τους υπόλοιπους άγνωστους λαμβάνουμε* $\mu_2 = -2, \lambda_3 = -2, \lambda_2 = -4, \lambda_1 = -4$. *Τώρα για τις μηδενικές μεταβλητές* x_{12}, x_{32} *ισχύει* $-\nu_{12} = \mu_2 - \lambda_1 - 2 = 0, -\nu_{32} = \mu_2 - \lambda_3 - 3 = -3 < 0$, *άρα η β.ε.λ.* $x_{11} = 10, x_{21} = 2, x_{22} = 18, x_{31} = 5$ *είναι βέλτιστη.*

4.4. Παράδειγμα. Βρείτε τον οικονομικότερο τρόπο μεταφοράς εάν η ζήτηση για γάλα στην πόλη 1 μειωθεί κατά 5 τόνους. Κατά πόσο θα πρέπει να ελαττωθεί η ποσότητα του παραγώμενου γάλακτος σε κάθε εργοστάσιο έτσι ώστε να μη μένουν αδιάθετες ποσότητες;

Εισάγουμε την πλασματική πόλη 3 με ζήτηση 5 και $c_{i3} = 0$ *για κάθε* $i = 1, 2, 3$.
Αρχικοποίηση. *Ο κανόνας της βορειοδυτικής γωνίας δίνει:*

	πόλη 1	πόλη 2	πόλη 3	
εργοστάσιο 1	10	0	0	10
εργοστάσιο 2	2	18	0	20
εργοστάσιο 3	0	0	5	5
	12	18	5	

Βήμα 1: *Λύνουμε τις εξισώσεις* $\mu_1 - \lambda_1 = 4, \mu_1 - \lambda_2 = 4, \mu_2 - \lambda_2 = 2, \mu_3 - \lambda_3 = 0$ *με* $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ *(πρέπει να θέσουμε 2 άγνωστους ίσους με 0 αφού οι άγνωστοι υπερβαίνουν τον αριθμό των εξισώσεων κατά 2) και λαμβάνουμε:* $\lambda_1 = 0, \mu_1 = 4, \mu_2 = 2, \mu_3 = 0$. *Για τη μηδενική μεταβλητή* x_{31} *ισχύει* $\mu_1 - \lambda_4 = 4 > c_{31} = 0$. *Άρα θα πρέπει να μεταβάλουμε τη β.ε.λ. κατά* $\epsilon > 0$ *ως εξής:*

	πόλη 1	πόλη 2	πόλη 3	
εργοστάσιο 1	10	0	0	10
εργοστάσιο 2	2-ϵ	18	ϵ	20
εργοστάσιο 3	ϵ	0	5-ϵ	5
	12	18	5	

Η ανώτατη επιτρεπτή αύξηση είναι $\epsilon = 2$ *η οποία δίνει:*

	πόλη 1	πόλη 2	πόλη 3	
εργοστάσιο 1	10	0	2	10
εργοστάσιο 2	0	18	2	20
εργοστάσιο 3	2	0	3	5
	12	18	5	

Βήμα 2: *Λύνοντας τις εξισώσεις* $\mu_1 - \lambda_1 = 4, \mu_2 - \lambda_2 = 2, \mu_3 - \lambda_2 = 0, \mu_3 - \lambda_3 = 0, \mu_1 - \lambda_3 = 2$ *για* $\lambda_2 = 0$, *λαμβάνουμε* $\mu_2 = 2, \mu_3 = 0, \lambda_3 = 0, \mu_1 = 2, \lambda_1 = -2$.
Αποφασίζουμε να αυξήσουμε τη x_{13} *κατά* $\epsilon > 0$, *αφού* $\mu_3 - \lambda_1 = 0 + 2 > 0$. *Συνεπώς,*

	πόλη 1	πόλη 2	πόλη 3	
εργοστάσιο 1	10-ϵ	0	ϵ	10
εργοστάσιο 2	0	18	2	20
εργοστάσιο 3	2+ϵ	0	3-ϵ	5
	12	18	5	

όπου η μέγιστη αύξηση του ϵ *(ίση με 3) δίνει*

	πόλη 1	πόλη 2	πόλη 3	
εργοστάσιο 1	7	0	3	10
εργοστάσιο 2	0	18	2	20
εργοστάσιο 3	5	0	0	5
	12	18	5	

Βήμα 3: *Οι εξισώσεις* $\mu_1 - \lambda_1 = 4, \mu_3 - \lambda_1 = 0, \mu_2 - \lambda_2 = 2, \mu_3 - \lambda_2 = 0, \mu_1 - \lambda_3 = 2$ *για* $\lambda_1 = 0$, *δίνουν* $\mu_1 = 4, \mu_3 = 0, \lambda_3 = 2, \lambda_2 = 0, \mu_2 = 2$. *Παρατηρούμε ότι* $\mu_j - \lambda_i \leq c_{ij}$ *για κάθε* i, j, *άρα η τρέχουσα β.ε.λ. είναι βέλτιστη.*

Εφόσον στη λύση αυτή, τα εργοστάσια 1 και 2 στέλνουν 3 και 2 τόνους αντίστοιχα στην πλασματική πόλη, θα πρέπει στην πραγματικότητα να ελαττώσουν την παραγωγή τους κατά τα αντίστοιχα ποσά.

5. Πρόβλημα Ανάθεσης

Έστω n άτομα στα οποία επιθυμούμε να αναθέσουμε n εργασίες. Κάθε άτομο θα εκτελέσει μια ακριβώς εργασία και κάθε εργασία θα εκτελεστεί από ένα άτομο. Η εκτέλεση της εργασίας j από το άτομο i ενέχει κόστος c_{ij}, το οποίο δίνεται για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$. Ζητάμε να βρούμε την ανάθεση που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα:

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \tag{22}$$

$$\text{έτσι ώστε } \sum_{j} x_{ij} = 1\,, \forall i \tag{23}$$

$$\sum_{i} x_{ij} = 1\,, \forall j \tag{24}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\,, \forall i,j\,, \tag{25}$$

όπου $x_{ij} = 1$ ή 0 εάν το i-οστό άτομο ανατίθεται στην εργασία j ή όχι. Κάθε πρόβλημα της μορφής (22) λέγεται *πρόβλημα ανάθεσης*.

Ένα προβλήμα ανάθεσης ορίζεται μέσω του $n \times n$ *πίνακα κόστους*, όπου το στοιχείο της i-στής γραμμής και j-οστή στήλη είναι c_{ij}.

Τα προβλήματα ανάθεσης είναι ειδική περίπτωση προβλημάτων μεταφοράς. Παρατηρήστε ότι η βέλτιστη τιμή του (22) είναι μικρότερη από τη βέλτιστη τιμή του γραμμικού προγράμματος που ακολουθεί, όπου οι περιορισμοί ακεραιότητας των x_{ij} έχουν χαλαρώσει:

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \tag{26}$$

$$\text{έτσι ώστε } \sum_{j} x_{ij} = 1\,, \forall i \tag{27}$$

$$\sum_{i} x_{ij} = 1\,, \forall j \tag{28}$$

$$x_{ij} \geq 0\,, \forall i,j\,, \tag{29}$$

Αυτό είναι πρόβλημα μεταφοράς και κατά συνέπεια υπάρχει βέλτιστη λύση η οποία είναι ακέραια. Συνεπώς, οι βέλτιστες τιμές και λύσεις των (22), (26) ταυτίζονται.

Παραδειγμα 19. *3 αντιπρόσωποι A, B και C μιας εταιρίας εργάζονται σε 3 διαφορετικές πόλεις και πρέπει να ταξιδέψουν στις πόλεις D, E, F. Το κόστος των αεροπορικών εισιτηρίων από τις πόλεις που βρίσκονται οι αντιπρόσωποι πρός τις D, E, F δίδεται από τον πίνακα κόστους:*

	D	E	F
A	500	800	700
B	800	1200	700
C	400	800	500

Ιδιοτητα 7. *Μια βέλτιστη ανάθεση στο (22) παραμένει βέλτιστη εάν στα στοιχεία της i-στής γραμμής του πίνακα κόστους προστεθεί u_i και στα στοιχεία της j-οστής στήλης j προστεθεί v_j, για κάθε u_i, v_j.*

Αποδειξη. Παρατηρήστε ότι η αντικειμενική συνάρτηση μετά τη μεταβολή στον πίνακα κόστους γράφεται ως

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} (c_{ij} + u_i + v_j)\, x_{ij} &= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i,j} (u_i + v_j)\, x_{ij} \\
&= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i} u_i \sum_{j} x_{ij} + \sum_{j} v_j \sum_{i} x_{ij} \\
&= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i} u_i + \sum_{j} v_j\,,
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω των περιορισμών στο (22). Συνεπώς κάθε βέλτιστη λύση είναι βέλτιστη επίσης για το (22). □

Παραδειγμα 20. *Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα οι βέλτιστες λύσεις δεν αλλάζουν εάν αφαιρέσουμε από κάθε γραμμή το ελάχιστο στοιχείο της. Ο πίνακας κόστους που λαμβάνουμε έτσι είναι:*

	D	E	F
A	0	300	200
B	100	500	0
C	0	400	100

Αφαιρώντας το ελάχιστο στοιχείο κάθε στήλης από τα στοιχεία της λαμβάνουμε:

	D	E	F
A	0	0	200
B	100	200	0
C	0	100	100

Παρατηρήστε ότι τα ′0′ που βρίσκονται στα τετράγωνα

	D	E	F
A	0	$\boxed{0}$	200
B	100	200	$\boxed{0}$
C	$\boxed{0}$	100	100

σχηματίζουν μια ανάθεση αφού κανένα από αυτά δεν βρίσκεται στην ίδια γραμμή ή στήλη με τα υπόλοιπα.

Αυτή η ανάθεση (δηλ., $A \to E, B \to F, C \to D$) είναι βέλτιστη αφού έχει μηδενικό κόστος, σύμφωνα με τον τελευταίο πίνακα. Το πραγματικό κόστος (δηλ., σύμφωνα με τον αρχικό πίνακα) είναι $800+700+400 = 1900$.

Πολλές φορές η μέθοδος στο παράδειγμα δεν παράγει μια *πλήρη* ανάθεση, δηλαδή το πλήθος των ′0′ που δεν έχουν κοινή γραμμή ή στήλη είναι λιγότερα από n. Παρακάτω περιγράφουμε τον *ουγγρικό αλγόριθμο* ο οποίος βρίσκει τη βέλτιστη ανάθεση και βασίζεται στο Θεώρημα του Kőnig.

Θεωρημα 4 (Θεώρημα του Kőnig). *Το μέγιστο πλήθος ′0′ τα οποία δε βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη ισούται με τον ελάχιστο πλήθος ευθειών που καλύπτουν όλα τα ′0′.*

Ουγγρικός αλγόριθμος.

Βήμα 1: Αφαιρούμε από τα στοιχεία κάθε γραμμής το ελάχιστο στοιχείο της.

Βήμα 2: Αφαιρούμε από τα στοιχεία κάθε στήλης το ελάχιστο στοιχείο της.

Βήμα 3: Καλύπτουμε όλα τα μηδενικά στοιχεία με τον μικρότερο αριθμό γραμμών και στηλών (στο εξής θα τις λέμε ευθείες). Από το Θεώρημα4, εάν ο ελάχιστος αριθμός των ευθειών αυτών είναι n τότε ο πίνακας περιέχει μια πλήρη ανάθεση η οποία είναι βέλτιστη. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος τερματίζει.

Εάν ο ελάχιστος αριθμός ευθειών είναι αυστηρά μικρότερος από n τότε δεν υπάρχει πλήρης ανάθεση με ′0′ και συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 4: Αφαιρούμε το μικρότερο ακάλυπτο στοιχείο του πίνακα από τα στοιχεία των *ακάλυπτων* γραμμών και το προσθέτουμε στα στοιχεία των *καλυμμένων* στηλών. Επαναλαμβάνουμε από το 5.

Παραδειγμα 21. *Βρείτε τη βέλτιστη ανάθεση για τον πίνακα κόστους:*

	A	B	C	D
1	18	15	15	16
2	7	17	11	13
3	25	19	18	21
4	9	22	19	23

Εφαρμόζουμε τον ουγγρικό αλγόριθμο:

Βήμα 1:

	A	B	C	D
1	3	0	0	1
2	0	10	4	6
3	7	1	0	3
4	0	13	10	14

Βήμα 2:

	A	B	C	D
1	3	0	0	0
2	0	10	4	5
3	7	1	0	2
4	0	13	10	13

Βήμα 3:

	A	B	C	D
1	3	0	0	1
2	0	10	4	5
3	7	1	0	2
4	0	13	10	13

Ο ελάχιστος αριθμός ευθειών είναι $3 < 4$*, άρα δεν υπάρχει πλήρης ανάθεση· συνεπώς προχωράμε στο βήμα 4.*

Βήμα 4: *Αφαιρούμε το μικρότερο ακάλυπτο στοιχείο (=4) από τα στοιχεία των ακάλυπτων γραμμών*

	A	B	C	D
1	3	0	0	0
2	-4	6	0	1
3	7	1	0	2
4	-4	9	6	9

και το προσθέτουμε στα στοιχεία των καλυμμένων στηλών:

	A	B	C	D
1	7	0	0	0
2	0	6	0	1
3	13	1	0	2
4	0	9	6	9

Επαναλαμβάνουμε από το βήμα 3:

Βήμα 3:

	A	B	C	D
1	7	0	0	0
2	0	6	0	1
3	13	1	0	2
4	0	9	6	9

Ο μικρότερος αριθμός ευθειών είναι 3, άρα δεν υπάρχει πλήρης ανάθεση – προχωράμε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 4: *Αφαιρούμε το ελάχιστο ακάλυπτο στοιχείο από τις ακάλυπτες γραμμές*

	A	B	C	D
1	7	0	0	0
2	-1	5	-1	0
3	12	0	-1	1
4	-1	8	5	8

και το προσθέτουμε στις καλυπτόμενες στήλες:

	A	B	C	D
1	8	0	1	$\boxed{0}$
2	0	5	$\boxed{0}$	0
3	13	$\boxed{0}$	0	1
4	$\boxed{0}$	8	6	8

Εδώ υπάρχει μια πλήρης ανάθεση (στα τετράγωνα), η οποία είναι βέλτιστη και ο αλγόριθμος τερματίζει.

Στον αρχικό πίνακα η ανάθεση είναι

	A	B	C	D
1	18	15	15	$\boxed{16}$
2	7	17	$\boxed{11}$	13
3	25	$\boxed{19}$	18	21
4	$\boxed{9}$	22	19	23

που δίνει κόστος 9+19+11+16=57.

Κεφάλαιο 2

Αλυσίδες Markov

1. Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο που μας επιτρέπει να αναλύσουμε φαινόμενα που εξελίσσονται χρονικά με έναν τυχαίο τρόπο. Για παράδειγμα, θα θέλαμε να περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η τιμή μιας μετοχής στο χρηματιστήριο. Μια τέτοια περιγραφή φυσικά δε θα μας επιτρέψει να *προβλέψουμε τις μελλοντικές τιμές* της, όμως θα μας επιτρέψει να αξιολογήσουμε το *πόσο πιθανό είναι να λάβει αυτές τις τιμές*. Συνεπώς, βασικό εργαλείο για την περιγραφή αυτή είναι η Θεωρία Πιθανοτήτων.

Αν υποθέσουμε ότι το φαινόμενο που μας ενδιαφέρει είναι η εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής κάθε λεπτό, εφόσον η τιμή αυτή είναι τυχαία, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δίδεται από την τυχαία μεταβλητή X_n για το n-οστό λεπτό, όπου $n = 0, 1, 2, \ldots$ Αν γνωρίζαμε την κατανομή της X_n τότε χρησιμοποιώντας τη βασική θεωρία πιθανοτήτων, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε διάφορα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν, π.χ., την πιθανότητα η τιμή να υπερβαίνει τα 10 ευρώ $P(X_n > 10)$, τη μέση τιμή EX_n, διασπορά. Βέβαια, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, ακόμα μεγαλύτερο ενδιαφέρον έχει ο υπολογισμός πιθανοτήτων που αφορούν ταυτόχρονα πολλαπλές χρονικές στιγμές, π.χ., η πιθανότητα ότι η τιμή της μετοχής θα υπερβεί τα 10 ευρώ μέσα στα πρώτα 3 λεπτά, δηλαδή $P(X_0 > 10 \text{ ή } X_1 > 10 \text{ ή } X_2 > 10)$. Συνεπώς, μας ενδιαφέρει όχι μόνο η κατανομή μιας συγκεκριμένης τυχαίας μεταβλητής X_n αλλά γενικά η κατανομή όλης της ακολουθίας $X_0, X_1, X_2, \ldots$

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε την $P(X_2 = 10, X_1 = 9, X_0 = 10)$; Χρησιμοποιώντας τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας[1], μπορούμε να αναλύσουμε αυτή την πιθανότητα ως:

$$\begin{aligned} P(X_2 = 10, X_1 = 9, X_0 = 10) &= P(X_2 = 10, X_1 = 9 | X_0 = 10) P(X_0 = 10) \\ &= P(X_2 = 10 | X_1 = 9, X_0 = 10) P(X_1 = 9 | X_0 = 10) P(X_0 = 10) \end{aligned}$$

Η τελευταία έκφραση φαίνεται απλούστερη μιας και κάθε παράγοντας αφορά την κατανομή μιας μόνο τυχαίας μεταβλητή τη φορά. Η $P(X_1 = 9 | X_0 = 10)$ εκφράζει την πιθανότητα η τιμή το 1ο λεπτό να γίνει 9 με δεδομένο ότι ήταν 10 αρχικά. Η $P(X_2 = 10 | X_1 = 9, X_0 = 10)$ εκφράζει την πιθανότητα η τιμή στο 2ο λεπτό να γίνει 10 με δεδομένο ότι προηγουμένως ήταν 9 και αμέσως πριν ήταν 10. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η πιθανότητα οποιασδήποτε χρονικής εξέλιξης της τιμής (εδώ αρχικά 10, μετά 9 και αργότερα 10) αναλύεται σε παράγοντες που αφορούν την πιθανότητα η τιμή για μια συγκεκριμένη χρονική να λάβει κάποια τιμή με δεδομένο ότι γνωρίζουμε τι έγινε στο παρελθόν. Βέβαια, τίποτα δε μας εγγυάται ότι η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X_2 = 10 | X_1 = 9, X_0 = 10)$ είναι εύκολο να υπολογιστεί. Είναι λογικό, αν και κάπως απλουστευτικό, να υποθέσουμε ότι η μελλοντική εξέλιξη της τιμής της μετοχής καθορίζεται περισσότερο από τις πιο πρόσφατες τιμές της παρά από αυτές που έλαβε στο απώτατο παρελθόν. Μάλιστα, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το γεγονός $X_1 = 9$ συμπυκνώνει όλη την πληροφορία που χρειάζεται για το πως εξελίσσεται η τιμή της μετοχής. Στην περίπτωση αυτή, η πληροφορία $X_0 = 10$ φαίνεται περιττή όσον αφορά τον καθορισμό της πιθανότητας $X_2 = 10$ *εάν ήδη ξέρουμε ότι* $X_1 = 9$. Η υπόθεση αυτή μας οδηγεί -για το συγκεκριμένο παράδειγμα- στην απλούστευση $P(X_2 = 10 | X_1 = 9, X_0 = 10) = P(X_2 = 10 | X_1 = 9)$.

Γενικότερα, μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_0, X_1, X_2, \ldots$ θα λέμε ότι ικανοποιεί την **ιδιότητα Markov** όποτε ισχύει

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

για κάθε $n \geq 0$ και $j, i, i_{n-1}, \ldots, i_0$. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή η τιμή $P(X_N = i_N, X_{N-1} = i_{N-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$ αναλύεται σε παράγοντες ως $P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_2 = i_2 | X_1 = i_1) \cdots P(X_N = i_N | X_{N-1} = i_{N-1})$. Άρα ο υπολογισμός όλης της χρονικής εξέλιξης βασίζεται στη γνώση των πιθανοτήτων μετάβασης $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ για κάθε i, j, για τις οποίες επίσης υποθέτουμε ότι *δεν επηρεάζονται από το βήμα* n.

Γενικά έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμος 6. Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_0, X_1, \ldots$ είναι μια **αλυσίδα Markov** με πιθανότητες μετάβασης $(p_{ij}, i, j \in S)$ εάν ικανοποιείται η ιδιότητα Markov:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij}$$

για κάθε $n \geq 0$ και καταστάσεις $j, i, i_{n-1}, \ldots, i_0$.

[1] Η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|B)$ ορίζεται ως $P(A \text{ και } B)/P(B)$.

Παρατηρήστε ότι από τη 2η συνθήκη προκύπτει ότι η πιθανότητα μετάβασης μεταξύ δύο καταστάσεων, δε μεταβάλλεται με τη χρονική στιγμή n.

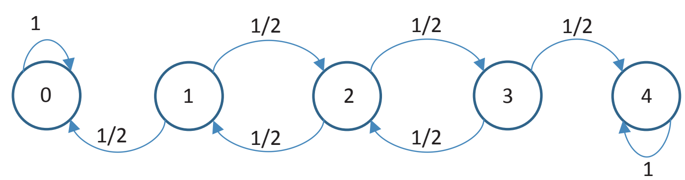
Παραδειγμα 22. *Παίζουμε με μια φίλη μας το εξής παιχνίδι: ρίχνουμε ένα νόμισμα και μας δίνει 1 ευρώ εάν έρθουν γράμματα· αν έρθει κορώνα της δίνουμε 1 ευρώ. Όλοι αρχικά κατέχουν 2 ευρώ και το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρι κάποιος να πάρει όλα τα χρήματα του άλλου. Το νόμισμα φέρνει γράμματα με πιθανότητα p και κορώνα με $1-p$.*

Μπορούμε να περιγράψουμε τα κέρδη μας X_n μέχρι και τη n-οστή ρίψη του νομίσματος με την αλυσίδα Markov με πιθανότητες μετάβασης

$$p_{i,i+1} = p, \quad p_{i,i-1} = 1-p \text{ για } i = 1,2,3 \text{ και } p_{00} = p_{44} = 1\,.$$

Στις καταστάσεις 1,4 ορίζουμε οι μεταβάσεις να μας οδηγούν πάλι στις ίδιες καταστάσεις έτσι ώστε τα τελικά κέρδη να μην αλλάζουν μετά το πέρας του παιχνιδιού. Καταστάσεις για τις οποίες ισχύει $p_{ii} = 1$, δηλαδή η αλυσίδα Markov παραμένει εκεί για πάντα, ονομάζονται **απορροφητικές**.

Πολλές φορές οι πιθανότητες μετάβασης δίνονται μέσω του **γραφήματος μετάβασης** *του Σχήματος 1.*



Σχημα 1.

Οι καταστάσεις αντιστοιχούν στις κορυφές του γραφήματος, ενώ σε κάθε κατευθυνόμενη ακμή μεταξύ των κορυφών (i,j) αναγράφεται η πιθανότητα μετάβασης p_{ij}. Εάν $p_{ij} = 0$ δεν υπάρχει ακμή μεταξύ των (i,j). Σημειώστε ότι εφόσον $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$, το άθροισμα των τιμών των ακμών που εξέρχονται από κάθε κατάσταση i ισούται με 1.

2. Πιθανότητα συγκεκριμένης ακολουθίας τιμών

Ας υποθέσουμε ότι η αλυσίδα αρχικά βρίσκεται στην κατάσταση i_0, δηλ. $X_0 = i_0$. Ποιά είναι η πιθανότητα ότι στα επόμενα N βήματα η αλυσίδα θα επισκεπτεί διαδοχικά τις καταστάσεις $i_1, i_2, \ldots, i_{N-1}, i_N$;

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η πιθανότητα αυτή στην περίπτωση των αλυσίδων Markov είναι ίση με

$$P(X_1 = i_1|X_0 = i_0)P(X_2 = i_2|X_1 = i_1)\cdots P(X_N = i_N|X_{N-1} = i_{N-1}) = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{N-1} i_N}\,.$$

Παραδειγμα 23. *Στο Παράδειγμα 22, ποιά η πιθανότητα τα διαδοχικά μας κέρδη στις 6 πρώτες ρίψεις να είναι 3,2,1,2,3,4; (Θυμηθείτε ότι αρχικά το ποσό που κατέχουμε είναι 2.)*

Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την πιθανότητα η αλυσίδα να ακολουθήσει το μονοπάτι καταστάσεων 3,2,1,2,3,4 αρχίζοντας από την 2. Η πιθανότητα αυτή είναι $p_{23}p_{32}p_{21}p_{12}p_{23}p_{34} = p(1-p)(1-p)ppp = p^4(1-p)^2$.

Είναι διδακτικό να επαναλάβουμε τον ίδιο υπολογισμό με ένα διαφορετικό τρόπο:

$$\begin{aligned} P(X_N = i_N, \ldots, X_2 = i_2, X_1 = i_1|X_0 = i_0) &= P(X_1 = i_1|X_0 = i_0)P(X_N = i_N, \ldots, X_2 = i_2|X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= p_{i_0 i_1} P(X_N = i_N, \ldots, X_2 = i_2|X_1 = i_1) \\ &= p_{i_1 i_0} P(X_{N-1} = i_N, \ldots, X_1 = i_2|X_0 = i_0)\,. \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και η δεύτερη από την ιδιότητα Markov. Για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ιδιότητα Markov δίνει το ίδιο αποτέλεσμα ανεξάρτητα από τη χρονική στιγμή που εξετάζουμε, δηλαδή οι πιθανότητα παρατήρησης μιας ορισμένης ακολουθίας καταστάσεων από το βήμα 1 μέχρι το βήμα N είναι ίδια με την πιθανότητα παρατήρησης της ίδιας ακολουθίας από το βήμα 0 μέχρι το $N-1$. Στις παραπάνω ισότητες αναλύσαμε την πιθανότητα παρατήρησης μιας ακολουθίας καταταστάσεων δεδομένης της αρχικής, σε δύο παράγοντες. Ο πρώτος αφορά τη συμπεριφορά στο 1ο βήμα: θα πρέπει η αλυσίδα να μεταβεί στην κατάσταση i_1. Ο 2ος παράγοντας αφορά τη συμπεριφορά της αλυσίδας μόνο από τη κατάσταση i_1 και μετά, *σαν να άρχιζε η αλυσίδα από το σημείο αυτό.* Πράγματι, η ιδιότητα Markov εγγυάται ότι εφόσον έχουμε ως δεδομένο ότι η κατάσταση στο 1ο βήμα είναι η i_1, η μελλοντική εξέλιξη δεν επηρεάζεται από την πληροφορία ότι στο βήμα 0 η αλυσίδα βρίσκονταν στην i_0. Κατά συνέπεια ο δεύτερος παράγοντας μπορεί να υπολογιστεί ανεξάρτητα από τον πρώτο. Μάλιστα, αυτός αφορά την ακολουθία καταστάσεων για $N-1$ βήματα αντί N του αρχικού υπολογισμού και, εν δυνάμει, είναι πιο εύκολος να υπολογιστεί από ότι η αρχική πιθανότητα.

Η παρατήρηση αυτή είναι το κλειδί για τον υπολογισμό (σχεδόν) όλων των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν σε μια αλυσίδα Markov, όσο περίπλοκα και αν φαίνονται τα μεγέθη αυτά.

Παρατηρηση 1. *Η πιθανότητα να παρατηρήσουμε ότι μια αλυσίδα Markov ακολουθεί μια συγκεκριμένη συμπεριφορά, αναλύεται σε δύο παράγοντες: έναν που αφορά το τι γίνεται στο πρώτο βήμα (δηλαδή ποια τιμή λαμβάνει η X_1 αν γνωρίζουμε τη X_0) και έναν άλλον για το τι απομένει να γίνει εάν η αλυσίδα άρχιζε από εκεί και μετά (δηλαδή αν η αλυσίδα άρχιζε από την κατάσταση X_1).*

3. Υπολογισμός πιθανότητας μετάβασης σε n βήματα

Έστω ότι η αλυσίδα βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση i, δηλαδή $X_0 = i$. Ποιά η πιθανότητα ότι σε n βήματα θα βρεθεί στην κατάσταση j, δηλαδή $X_n = j$; Σε αυτή την παράγραφο θα υπολογίσουμε την τιμή της $P(X_n = j|X_0 = i)$ για κάθε $n \geq 1$ και καταστάσεις i, j, γνωρίζοντας μόνο τις πιθανότητες μετάβασης $(p_{kl}, k, l \in S)$.

Παραδειγμα 24. *Στο Παράδειγμα 22 ποιά η πιθανότητα να χρειαστούμε 4 ρίψεις του νομίσματος μέχρι να κερδίσουμε; Εδώ ζητείται να υπολογίσουμε την $P(X_4 = 4|X_0 = 2)$. Υπάρχουν 3 τρόποι να συμβεί αυτό: είτε ακολουθείται το μονοπάτι 2,3,2,3,4 είτε το 2,1,2,3,4 ή 2,3,4,4. Άρα*

$$
\begin{aligned}
P(X_4 = 4|X_0 = 2) =& P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4|X_0 = 2)\\
&+ P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4|X_0 = 2)\\
&+ P(X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 4, X_4 = 4|X_0 = 2)\\
=& p(1-p)p^2 + (1-p)p^3 + p^2 = 2p^3(1-p) + p^2\ ,
\end{aligned}
$$

χρησιμοποιώντας τον υπολογισμό της προηγούμενης παραγράφου για τα δύο μονοπάτια αυτά.

Ποιά είναι η τιμή της $P(X_6 = 4|X_0 = 2)$; Αν ακολουθήσουμε την ίδια λογική με παραπάνω, θα πρέπει πρώτα να καταγράψουμε όλα τα μονοπάτια 6 βημάτων που καταλήγουν στην κατάσταση 4 αρχίζοντας από τη 2 και έπειτα να προσθέσουμε τις πιθανότητες να συμβούν:

$$
\begin{aligned}
P(X_6 = 4|X_0 = 2) =& P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 4|X_0 = 2)\\
&+ P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 4|X_0 = 2)\\
&+ P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 4|X_0 = 2)\\
&+ P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 4|X_0 = 2)\\
&+ P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4, X_5 = 4, X_6 = 4|X_0 = 2)\\
&+ P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4, X_5 = 4, X_6 = 4|X_0 = 2)\\
&+ P(X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 4, X_4 = 4, X_5 = 4, X_6 = 4|X_0 = 2)\\
=& 4p^4(1-p)^2 + 2p^3(1-p) + p^2\ .
\end{aligned}
$$

Ο τρόπος υπολογισμού της $P(X_n = j|X_0 = i)$ στο παράδειγμα είναι φανερό ότι γίνεται πολύ δύσκολος για μεγαλύτερο αριθμό βημάτων n γιατί το πλήθος των μονοπατιών αυξάνει εκθετικά με το n. Θα χρησιμοποιήσουμε έναν διαφορετικό τρόπο που βασίζεται στην αναδρομή.

Εάν $n = 1$ τότε ο υπολογισμός είναι άμεσος αφού $P(X_1 = j|X_0 = i) = p_{ij}$. Από εδώ και στο εξής θα υποθέσουμε ότι $n \geq 2$.

Για τον υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε την Παρατήρηση 1: αναλύουμε ανάλογα με το ποιά είναι η κατάσταση στο βήμα 1. Εάν η αλυσίδα μεταβεί στο πρώτο βήμα στην k τότε θα πρέπει από εκεί και μετά σε $n-1$ βήματα να μεταβεί στην j, ανεξάρτητα από το τι έγινε πιο πριν (στο βήμα 0). Άρα $P(X_n = j, X_1 = k|X_0 = i) = P(X_1 = k|X_0 = i)P(X_{n-1} = j|X_0 = k)$. Αθροίζοντας τις πιθανότητες αυτές για όλες τις δυνατές καταστάσεις k που μπορεί να βρεθεί η αλυσίδα στο 1ο βήμα λαμβάνουμε

Ιδιοτητα 8.

$$P(X_n = j|X_0 = i) = \sum_{k\in S} P(X_{n-1} = j|X_0 = k)p_{ik} \tag{30}$$

Αποδειξη.

$$\begin{aligned} P(X_n = j|X_0 = i) &= \sum_{k\in S} P(X_n = j, X_1 = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in S} P(X_n = j|X_1 = k, X_0 = i)P(X_1 = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in S} P(X_n = j|X_1 = k)P(X_1 = k|X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in S} P(X_{n-1} = j|X_0 = k)p_{ik} \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα είναι λόγω του νόμου της ολικής πιθανότητας, η δεύτερη προκύπτει από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, η τρίτη από την ιδιότητα Markov και η τελευταία από τη χρονική ομοιογένεια. □

Η ισότητα (30) δε μας δίνει μια άμεση έκφραση για τον υπολογισμό της $P(X_n = j|X_0 = i)$, όμως αναλύει τον υπολογισμό σε έναν που αφορά μεταβάσεις σε $n-1$ βήματα (δες δεξί μέλος) αντί n (δες αριστερό μέλος). Συνεπώς, καταλήγουμε σε έναν αναδρομικό υπολογισμό.

Η ισότητα (30) έχει μια απλή αλγεβρική σημασία. Εάν για κάθε n σχηματίσουμε τον πίνακα $P^{(n)}$ όπου στοιχείο της i γραμμής και j στήλης είναι η τιμή $P(X_n = j|X_0 = i)$, τότε οι ισότητες (30) για κάθε i, j γράφονται ισοδύναμα σε διανυσματική μορφή ως

$$P^{(n)} = P^{(n-1)}P \tag{31}$$

όπου P είναι ο **πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης** με στοιχεία τις πιθανότητες μετάβασης p_{ij} σε ένα βήμα. Αντικαθιστώντας τον πίνακα $P^{(n-1)}$ εφαρμόζοντας πάλι την ισότητα (31), λαμβάνουμε $P^{(n)} = P^{(n-1)}P = P^{(n-2)}P^2 = \cdots = P^n$. Συνεπώς οι πιθανότητες μετάβασης σε n βήματα προκύπτουν αλγεβρικά ως εξής:

Ιδιοτητα 9. *Η $P(X_n = j|X_0 = i)$ είναι το στοιχείο στην i γραμμή και j στήλη του πίνακα P^n, όπου P ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης.*

Παραδειγμα 25. *Θα υπολογίσουμε τις $P(X_4 = 4|X_0 = 2), P(X_6 = 4|X_0 = 2)$ για το Παράδειγμα 22 κάνοντας χρήση της Ιδιότητας 9. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου η κατάσταση 0,1,2,3,4 αντιστοιχεί στη γραμμή/στήλη 1,2,3,4,5.

Μετά από πράξεις προκύπτει

$$P^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p+p(1-p)^2 & 2p^2(1-p)^2 & 0 & 2p^3(1-p) & p^3 \\ (1-p)^2+2p(1-p)^3 & 0 & 4p^2(1-p)^2 & 0 & 2p^3(1-p)+p^2 \\ (1-p)^3 & 2(1-p)^3p & 0 & 2(1-p)^2p^2 & p+(1-p)p^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{και } P^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p+p(1-p)^2+2p^2(1-p)^3 & 4p^3(1-p)^3 & 0 & 4p^4(1-p)^2 & 2p^4(1-p)+p^3 \\ (1-p)^2+2p(1-p)^3+4p^2(1-p)^4 & 0 & 8p^3(1-p)^3 & 0 & p^2+2(1-p)p^3+4(1-p)^2p^4 \\ 2p(1-p)^4+(1-p)^3 & 4p^2(1-p)^4 & 0 & 4p^3(1-p)^3 & p+(1-p)p^2+2(1-p)^2p^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τον P^4 βλέπουμε ότι $P(X_4 = 4|X_0 = 2) = 2p^3(1-p) + p^2$ και από τον P^6 έχουμε $P(X_6 = 4|X_0 = 2) = p^2 + 2(1-p)p^3 + 4(1-p)^2p^4$. Φυσικά και οι δύο υπολογισμοί συμφωνούν με τις τιμές που βρήκαμε στο Παράδειγμα 24 χρησιμοποιώντας μονοπάτια.

Πολλές φορές δεν απαιτείται ο υπολογισμός όλων των στοιχείων του πίνακα P^N. Για παράδειγμα για τον υπολογισμό της $P(X_4 = 0|X_0 = 2)$ αρκούν μόνο οι τιμές των $P(X_3 = 0|X_0 = 1), P(X_3 = 0|X_0 = 3)$ αφού από την ισότητα (30) λαμβάνουμε

$$P(X_4 = 0|X_0 = 2) = pP(X_3 = 0|X_0 = 3) + (1-p)P(X_3 = 0|X_0 = 1)\,.$$

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα όπου σε κάθε γραμμή υπολογίζουμε την $P(X_N = 0|X_0 = i)$ για κάθε i χρησιμοποιώντας μόνο τους όρους που απαιτούνται από την προηγούμενη γραμμή:

κατάσταση	0	1	2	3	4
$N = 0$	1	0	0	0	0
$N = 1$	1	$1-p$	0	0	0
$N = 2$	1	$1-p$	$(1-p)^2$	0	0
$N = 3$	1	$1-p+p(1-p)^2$	$(1-p)^2$	$(1-p)^3$	0
$N = 4$	1	$1-p+p(1-p)^2$	$(1-p)^2 + 2p(1-p)^3$	$(1-p)^3$	0

Από την τελευταία γραμμή βλέπουμε ότι $P(X_4 = 0|X_0 = 2) = (1-p)^2 + 2p(1-p)^3$.

4. Υπολογισμός πιθανότητας επίσκεψης μιας κατάστασης στα N πρώτα βήματα

Εάν η αλυσίδα βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση i, ποιά η πιθανότητα να επισκεφτεί την κατάσταση j *μέσα στα N πρώτα βήματα*; Εδώ ενδιαφερόμαστε για το ενδεχόμενο '$X_n = j$ για κάποιο $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$' ή ισοδύναμα '$X_0 = j$ ή $X_1 = j$ ή $\ldots$ ή $X_N = j$' και για την πιθανότητα

(32) $$P(X_0 = j \text{ ή } X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_N = j|X_0 = i)$$

Παραδειγμα 26. *Για το παιχνίδι του Παραδείγματος 22 υπολογίστε την πιθανότητα να κερδίσουμε πριν την 5η ρίψη, δηλαδή την πιθανότητα $P(X_0 = 4 \text{ ή } X_1 = 4 \text{ ή } X_2 = 4 \text{ ή } X_3 = 4 \text{ ή } X_4 = 4|X_0 = 2)$. Παρατηρήστε ότι αφού όταν η αλυσίδα επισκεφτεί την κατάσταση 4 παραμένει σε αυτήν, το ενδεχόμενο $X_4 = 4$ είναι ισοδύναμο με το παιχνίδι να έχει τελειώσει πριν την 5η ρίψη. Άρα*

$$P(X_0 = 4 \text{ ή } X_1 = 4 \text{ ή } \ldots \text{ ή } X_4 = 4|X_0 = 2) = P(X_4 = 4|X_0 = 2) = 2p^3(1-p) + p^2$$

χρησιμοποιώντας την τιμή της $P(X_4 = 4|X_0 = 2)$ που βρήκαμε στο Παράδειγμα 25.

Από το παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση που η j είναι απορροφητική ισχύει

(33) $$P(X_0 = j \text{ ή } X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_N = j|X_0 = i) = P(X_N = j|X_0 = i)$$

και ο υπολογισμός μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετάβασης υψωμένο στην N, βάσει της Ιδιότητας 9.

Τι ισχύει όμως για τις μη απορροφητικές καταστάσεις; Προφανώς (γιατί;) η ισότητα (33) δεν ισχύει για αυτές αφού $P(X_3 = 1|X_0 = 2) < P(X_0 = 1 \text{ ή } X_1 = 1 \text{ ή } X_2 = 1 \text{ ή } X_3 = 1|X_0 = 2)$. Παρακάτω βρίσκουμε έναν αναδρομικό τύπο υπολογισμού της (32) για κάθε κατάσταση j.

Καταρχάς παρατηρήστε ότι εάν $i = j$ τότε η πιθανότητα αυτή είναι 1: αν συμβεί $X_0 = i$ τότε συμβαίνει και το ενδεχόμενο '$X_0 = i$ ή $X_1 = j$ ή $\ldots$ ή $X_N = j$', άρα

$$P(X_0 = i \text{ ή } X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_N = j|X_0 = i) \geq P(X_0 = i|X_0 = i) = 1\,.$$

Σε ότι ακολουθεί θα υποθέσουμε ότι $i \neq j$, δηλαδή η αρχική κατάσταση δεν είναι αυτή που θέλουμε η αλυσίδα να επισκεφτεί.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η έκφραση (32) δεν αναλύεται στο άθροισμα των μεμονομένων πιθανοτήτων $P(X_n = j|X_0 = i)$ για $n = 0, 1, \ldots, N$ μιας και τα γεγονότα $X_0 = j, X_1 = j, \ldots$ δεν είναι ξένα: η αλυσίδα μπορεί να επισκεφτεί την j πολλές φορές μέσα στα N πρώτα βήματα.

Για τον υπολογισμό της (32) θα χρησιμοποιήσουμε ξανά την Παρατήρηση 1: εάν η αλυσίδα βρεθεί στο πρώτο βήμα στην k από εκεί και πέρα θα πρέπει να υπάρξει επίσκεψη στη j στα $N-1$ βήματα που απομένουν, ανεξάρτητα από το γεγονός ότι $X_0 = i$, δηλαδή

$$P(X_1 = k|X_0 = i)P(X_0 = j \text{ ή } X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_{N-1} = j|X_0 = k)$$

Αθροίζοντας όλες αυτές τις πιθανότητες για κάθε δυνατή επόμενη κατάσταση k λαμβάνουμε την έκφραση για την ολική πιθανότητα:

(34) $$P(X_0 = j \text{ ή } X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_N = j|X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(X_0 = j \text{ ή } X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_{N-1} = j|X_0 = k)p_{ik}$$

ή πιο σύντομα

(35)

$$P(\text{επίσκεψη στην } j \text{ στα } N \text{ πρώτα βήματα}|X_0 = i) = \sum_{k\in S} P(\text{επίσκεψη στην } j \text{ στα } N-1 \text{ πρώτα βήματα}|X_0 = k)p_{ik}$$

Αποδειξη.

$$\begin{aligned}
&P(\text{επίσκεψη στην } j \text{ στα } N \text{ πρώτα βήματα}|X_0 = i)\\
&\quad = P(X_0 = j \text{ ή } X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_N = j|X_0 = i)\\
&\quad = \sum_{k\in S} P(X_1 = k \text{ και } \{X_0 = j \text{ ή } X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_N = j\}|X_0 = i)\\
&\quad = \sum_{k\in S} P(\{X_0 = j, X_1 = k\} \text{ ή } (\{X_1 = k\} \text{ και } \{X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_N = j\})\,|X_0 = i)\\
&\quad = \sum_{k\in S} P(X_1 = k \text{ και } \{X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_N = j\}|X_0 = i)\\
&\quad = \sum_{k\in S} P(X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_N = j|X_1 = k, X_0 = i)P(X_1 = k|X_0 = i)\\
&\quad = \sum_{k\in S} P(X_1 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_N = j|X_1 = k)p_{ik}\\
&\quad = \sum_{k\in S} P(X_0 = j \text{ ή } \cdots \text{ ή } X_{N-1} = j|X_0 = k)p_{ik}\\
&\quad = \sum_{k\in S} P(\text{επίσκεψη στην } j \text{ στα } N-1 \text{ πρώτα βήματα}|X_0 = k)p_{ik}
\end{aligned}$$

□

Παραδειγμα 27. *Για το Παράδειγμα 22 ποιά είναι η $P(X_n = 1$ για κάποιο $n \in \{0,1,2,3\}|X_0 = 2)$; Ας υπολογίσουμε αναδρομικά αυτή την πιθανότητα σύμφωνα με την (32). Κατασκευάζουμε έναν πίνακα όπου σε κάθε γραμμή υπολογίζουμε την $P(X_0 = 1$ ή $\cdots$ ή $X_N = 1|X_0 = i)$ για κάθε i χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους όρους από την προηγούμενη γραμμή:*

κατάσταση	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
$N=0$	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
$N=1$	*0*	*1*	$1-p$	*0*	*0*
$N=2$	*0*	*1*	$1-p$	$(1-p)^2$	*0*
$N=3$	*0*	*1*	$1-p+p(1-p)^2$	$(1-p)^2$	*0*

Σημειώστε ότι η στήλη κάτω από την κατάσταση 1 είναι ίση με 1 αφού εάν η αλυσίδα ξεκινήσει από την 1 τότε ικανοποιείται το ενδεχόμενο επίσκεψης στην 1 ήδη από το βήμα 0.

Υπάρχει άλλος ένας τρόπος υπολογισμού της (32). Είδαμε ότι στην περίπτωση που η j είναι απορροφητική ισχύει η (33) όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους υπολογισμούς της προηγούμενης παραγράφου. Στην περίπτωση που η j δεν είναι απορροφητική μπορούμε πάλι να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα (33) για μια τροποποιημένη αλυσίδα όπου *αλλάζουμε τις μεταβάσεις έξω από την j έτσι ώστε να είναι απορροφητική*. Το ενδεχόμενο η αρχική αλυσίδα να επισκεφτεί την κατάσταση j στα N πρώτα βήματα είναι ίδιο με το ενδεχόμενο η τροποποιημένη αλυσίδα να βρίσκεται στην j στο βήμα N. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα P^N *για τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P της τροποποιημένης όμως αλυσίδας* και από εκεί το στοιχείο $P(X_N = j|X_0 = i)$.

Παραδειγμα 28. *Για το Παράδειγμα 22 ποιά είναι η $P(X_n = 1$ για κάποιο $n \in \{0,1,2,3\}|X_0 = 2)$; Εφόσον ενδιαφερόμαστε για επίσκεψη στην 1, θεωρούμε τον πίνακα πιθανότητας μετάβασης P της τροποποιημένης* *αλυσίδας όπου η 1 είναι απορροφητική,*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Συγκρίνετε με τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης της αρχικής αλυσίδας που δίδεται στο Παράδειγμα 25.) Έχουμε

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p+p(1-p)^2 & p^2(1-p)^2 & 0 & p^3(1-p)+p^2 \\ 0 & (1-p)^2+p(1-p)^3 & 0 & p^2(1-p)^2 & p^2(1-p)+p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

από όπου βλέπουμε ότι $P(X_0 = 1 \text{ ή } X_1 = 1 \text{ ή } X_2 = 1 \text{ ή } X_3 = 1 | X_0 = 2) = P(X_3 = 1|X_0 = 2) = 1-p+p(1-p)^2$.

5. Υπολογισμός πιθανότητας επίσκεψης μιας κατάστασης

Εάν η αλυσίδα βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση i, ποιά η πιθανότητα να επισκεφτεί *κάποτε* την κατάσταση j.

Παραδειγμα 29. *Στο Παράδειγμα 22 ποιά η πιθανότητα να κερδίσουμε; Εδώ ζητείται να βρούμε την πιθανότητα επίσκεψης στην κατάσταση 0 χωρίς να αναφερόμαστε σε κάποιο συγκεκριμένο βήμα όπως στις προηγούμενες παραγράφους.*

Φυσικά εάν $i = j$ η πιθανότητα αυτή είναι 1. Ας υποθέσουμε ότι $i \neq j$. Όπως και πριν, θα χρησιμοποιήσουμε την Παρατήρηση 1: εάν η αλυσίδα επισκεφτεί την k στο πρώτο βήμα, από εκεί και πέρα πρέπει να υπάρξει επίσκεψη στην j αρχίζοντας από την k, δηλαδή $p_{ik} P(\text{επίσκεψη στην } j | X_0 = k)$. Αθροίζοντας για όλες τις δυνατές καταστάσεις k η έκφραση για την ολική πιθανότητα είναι:

$$P(\text{επίσκεψη στην } j|X_0 = i) = \sum_{k\in S} p_{ik} P(\text{επίσκεψη στην } j|X_0 = k)\ , \ \text{για κάθε } j \neq i\ . \tag{36}$$

Αποδειξη. Προκύπτει λαμβάνοντας το όριο καθώς $N \to \infty$ στο δεξί και αριστερό μέλος της (35) και χρησιμοποιώντας το γεγονός $\lim_{N\to\infty} P(\text{επίσκεψη στην } j \text{ στα } N \text{ πρώτα βήματα}|X_0 = i) = \lim_{N\to\infty} P(\text{επίσκεψη στην } j \text{ στα } N- 1 \text{ πρώτα βήματα}|X_0 = i) = P(\text{επίσκεψη στην } j|X_0 = i)$. □

Οι ισότητες (36) μαζί με τη $P(\text{επίσκεψη στην } j|X_0 = j) = 1$ μας δίνουν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με άγνωστους τις τιμές $P(\text{επίσκεψη στην } j|X_0 = i)$ για κάθε $i \in S$. Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές, υπολογίζουμε την πιθανότητα επίσκεψης στη j αρχίζοντας από οποιαδήποτε κατάσταση i.

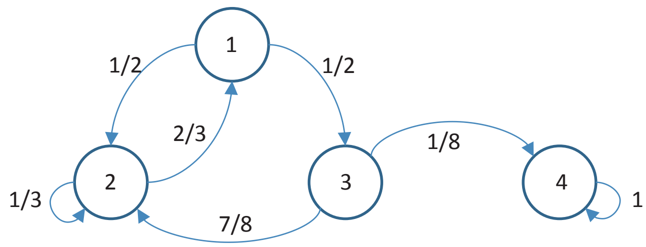
Παραδειγμα 30. *Συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα, για κάθε i χρησιμοποιούμε για συντομία* $f_i = P(\text{επίσκεψη στην } 4|X_0 = i)$. *Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (36) λαμβάνουμε*

$$f_0 = f_0\ ,\quad f_1 = (1-p)f_0 + pf_2\ ,\quad f_2 = (1-p)f_1 + pf_3,\ ,\quad f_3 = (1-p)f_2 + pf_4\ .$$

Λαμβάνοντας υπόψιν επίσης τις (προφανείς) ισότητες $f_4 = 1, f_0 = 0$ *και λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε* $f_2 = \frac{p^2}{1-2p(1-p)}$. *Όπως είναι αναμενόμενο,* $f_2 = 1/2$ *εάν* $p = 1/2$.

5.1. Ιδιότητα της επισκεψιμότητας για συνδεδεμένες αλυσίδες. Θεωρήστε την αλυσίδα που δίδεται από το γράφημα μεταβάσεων: Εάν αρχική κατάσταση είναι η 1, ποιά είναι η πιθανότητα η αλυσίδα να επισκεφτεί κάποτε την 4; Θα μπορούσαμε βεβαίως να σχηματίσουμε και να λύσουμε το σχετικό σύστημα εξισώσεων (36) που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Εντούτοις, χωρίς να λύσουμε καθόλου τις εξισώσεις, μπορούμε να μαντέψουμε την τιμή της πιθανότητας αυτής; Εάν η αλυσίδα δεν επισκέπτονταν ποτέ την 4, θα κινούνταν για πάντα μεταξύ των $\{1, 2, 3\}$. Από κάθε μια από τις καταστάσεις αυτές, υπάρχει ένα μονοπάτι πρός την 4. Εφόσον, κάθε φορά που η αλυσίδα επισκέπτεται αυτές τις καταστάσεις η μελλοντική εξέλιξη από εκεί και μετά είναι ανεξάρτητη από τον δρόμο που ακολουθήθηκε μέχρι εκεί, είναι λογικό να αναμένουμε ότι κάποια στιγμή θα ακολουθηθεί το μονοπάτι που οδηγεί στην 4. Με άλλα λόγια ό,τι είναι πιθανό να γίνει *θα γίνει* εάν παρατηρήσουμε μια αλυσίδα Markov για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα.

Γενικότερα, ισχύει το εξής αποτέλεσμα:



Σχημα 2.

Θεωρημα 5 (Ιδιότητα επισκεψιμότητας). *Έστω μια κατάσταση j για την οποία υπάρχει μονοπάτι (πολλαπλών ίσως βημάτων) που οδηγεί σε αυτήν από οποιαδήποτε άλλη κατάσταση. Τότε $P(\text{επίσκεψη στην } j|X_0 = i) = 1$ για κάθε $i \in S$.*

Αποδειξη. Ας ορίσουμε $f_i = P(\text{επίσκεψη στην } j|X_0 = i)$ για κάθε $i \in S$. Θα δείξουμε ότι $f_i = 1$ για κάθε i.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κατάσταση i_0 για την οποία ισχύει $f_{i_0} = \min_{i\in S} f_i$, δηλαδή η κατάσταση εκείνη που απο εκεί επιτυγχάνεται η μικρότερη πιθανότητα επίσκεψης στην j. Προφανώς, εάν $f_{i_0} = 1$ τότε ισχύει ότι $f_i = 1$ για κάθε i, άρα ας υποθέσουμε ότι $f_{i_0} < 1$. Σε αυτήν την περίπτωση σίγουρα $i_0 \neq j$ γιατί $f_j = 1$. Τότε από την ισότητα (36) έχουμε

$$f_{i_0} = \sum_{k\in S} p_{i_0k} f_k \Leftrightarrow f_{i_0} \sum_{k\in S} p_{i_0k} = \sum_{k\in S} p_{i_0k} f_k \Leftrightarrow \sum_{k\in S} p_{i_0k} \left(f_k - f_{i_0}\right) = 0\,.$$

Οι όροι στο τελευταίο άθροισμα είναι μη αρνητικοί αφού $f_{i_0} \leq f_k$ για κάθε k. Άρα εάν για κάποιο k ισχύει $p_{i_0k} > 0$, δηλαδή η k είναι προσβάσιμη από την i_0 σε ένα βήμα, τότε θα πρέπει να ισχύει $f_k = f_{i_0}$. Δηλαδή, όλες οι καταστάσεις k οι οποίες είναι προσβάσιμες από την i_0 ικανοποιούν $f_k = f_{i_0}$. Από όλες αυτές τις καταστάσεις ας διαλέξουμε μια -την οποία ονομάζουμε i_1- η οποία βρίσκεται στο μονοπάτι που από την i_0 οδηγεί στην j. (Την ύπαρξη ενός τέτοιου μονοπατιού εγγυάται η υπόθεση το θεωρήματος.) Εφόσον για την i_1 ισχύει ότι $f_{i_1} = f_{i_0} = \min_{i\in S} f_i$, εφαρμόζοντας την ίδια λογική προκύπτει ότι υπάρχει μια άλλη κατάσταση, η i_2 η οποία βρίσκεται πάνω στο μονοπάτι που οδηγεί από την i_0 στην i_1 και έπειτα στην j, για την οποία πάλι ισχύει $f_{i_2} = \min_{i\in S} f_i$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, επιλέγοντας μία μία τις καταστάσεις που βρίσκονται στο μονοπάτι $i_0, i_1, i_2, \ldots, j$ καταλήγουμε στο ότι $f_j = \min_{i\in S} f_i$ και άρα $f_i = 1$ για κάθε i. □

6. Υπολογισμός μέσου αριθμού βημάτων μέχρι την πρώτη επίσκεψη σε μια κατάσταση

Εάν η αλυσίδα βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση i, πόσα βήματα θα χρειαστούν μέχρι η αλυσίδα επισκεφτεί την j για πρώτη φορά;

Παραδειγμα 31. *Για το Παράδειγμα 22 ποιός είναι ο μέσος αριθμός ρίψεων που απαιτείται για να λήξει το παιχνίδι -δηλαδή, μέχρι να κερδίσουμε ή χάσουμε-; Εδώ ζητείται να υπολογίσουμε τον μέσο αριθμό βημάτων μέχρι η αλυσίδα να επισκεφτεί οποιαδήποτε από τις καταστάσεις 0,4 για πρώτη φορά.*

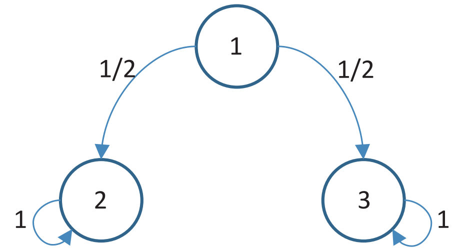
Στο παράδειγμα αυτό ενδιαφερόμαστε για την επίσκεψη σε ένα σύνολο καταστάσεων, όχι σε μία συγκεκριμένη. Όμως εφόσον μας ενδιαφέρει η πορεία μέχρι εκεί και όχι από εκεί και πέρα, μπορούμε να ταυτοποιήσουμε τις δύο καταστάσεις αυτές, π.χ, θεωρώντας ότι από την 3 μεταβαίνουμε στην 0 αντί στην 4.

Για κάθε κατάσταση i ας ορίσουμε τον αριθμό

$$\begin{aligned} T_i &= \text{μέσος αριθμός βημάτων μέχρι την πρώτη επίσκεψη στην } j \text{ εάν } X_0 = i \\ &= E(\text{αριθμός βημάτων μέχρι την πρώτη επίσκεψη στην } j|X_0 = i) \end{aligned}$$

Καταρχάς $T_j = 0$ αφού εάν $X_0 = j$ τότε η 1η επίσκεψη στη j συμβαίνει στο βήμα 0 -άρα απαιτούνται 0 βήματα-.

Οι αριθμοί T_i δεν ορίζονται πάντα, γιατί υπάρχει η περίπτωση μια αλυσίδα να μην επισκεφτεί ποτέ κάποια κατάστασή της. Για παράδειγμα θεωρήστε την αλυσίδα του σχήματος: Εδώ με πιθανότητα 1/2 η αλυσίδα δε θα επισκεφτεί ποτέ την κατάσταση 2 εάν αρχική κατάσταση είναι η 1. Κατά συνέπεια, έχουμε το εξής αποτέλεσμα



Σχημα 3.

Ιδιοτητα 10. *Θεωρήστε μια οποιαδήποτε κατάσταση j. Εάν $P($επίσκεψη στην $j|X_0 = i) = 1$ για κάθε $i \in S$, τότε ο μέσος αριθμός βημάτων T_i μέχρι την πρώτη επίσκεψη στην j, εάν η αλυσίδα αρχίσει από την i, ικανοποιεί*

$$T_i = 1 + \sum_{k \in S} p_{ik} T_k \ , \ \text{για κάθε } i \neq j \text{ και } T_j = 0 \,. \tag{37}$$

Η ιδέα πίσω από την ισότητα αυτή είναι η εξής: εάν $X_0 = i \neq j$ τότε σίγουρα θα απαιτείται τουλάχιστον 1 βήμα μέχρι να επισκεφτούμε την j. Άρα ο αριθμός των βημάτων μέχρι την 1η επίσκεψη στην j ισούται με $1+\tau$, όπου τ ο αριθμός βημάτων που απαιτείται από το βήμα 1 και μετά. Άρα $T_i = E(1+\tau|X_0 = i) = 1+E(\tau|X_0 = i)$. Θα χρησιμοποιήσουμε την Παρατήρηση 1 για τον υπολογισμό του $E(\tau|X_0 = i)$: εάν στο βήμα 1 η αλυσίδα επισκεφτεί την k τότε από εκεί και πέρα θα χρειαστούν T_k βήματα κατά μέση τιμή και αυτή η περίπτωση θα συμβεί με πιθανότητα p_{ik}. Αθροίζοντας για όλες τις δυνατές καταστάσεις k που μπορεί να βρεθεί η αλυσίδα στο βήμα 1, έχουμε για τον συνολικό μέσο χρόνο: $T_i = 1 + \sum_{k \in S} p_{ik} T_k$.

Παραδειγμα 32. *Συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα ορίζουμε $T_i = E($αριθμός βημάτων μέχρι την πρώτη επίσκεψη σε μια από τις 0,4$|X_0 = i)$ για κάθε i. Εάν ταυτίσουμε τις καταστάσεις 0,4 αντικαθιστώντας τις με μία απορροφητική κατάσταση $0'$, η αλυσίδα που προκύπτει ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5 για $j = 0'$. Συνεπώς $P($επίσκεψη στην $0'|X_0 = i) = 1$ για όλες τις καταστάσεις i. Άρα από την Ιδιότητα 10 προκύπτει ότι οι τιμές T_0', T_1, T_2, T_3 ικανοποιούν τις εξισώσεις και σχηματίζουμε τις εξισώσεις*

$$T_1 = 1 + (1-p)T_{0'} + pT_2 \ , \quad T_2 = 1 + (1-p)T_1 + pT_3 \ , \quad T_3 = 1 + (1-p)T_2 + pT_{0'}$$

και $T_{0'} = 0$. Λύνοντας βρίσκουμε $T_2 = 2/(1-2p(1-p))$.

7. Κατηγοριοποίηση καταστάσεων σε επανερχόμενες και μεταβατικές

Στα παραπάνω εξετάσαμε τη συμπεριφορά πεπερασμένων μονοπατιών αλυσίδων Markov , δηλαδή τη συμπεριφορά τους μέχρι μια ορισμένη χρονική στιγμή ή μέχρι την πρώτη επίσκεψη σε μια κατάσταση. Πολλές φορές μας ενδιαφέρει ολόκληρη η συμπεριφορά ολόκληρης της ακολουθίας καταστάσεων $X_0, X_1, X_2, \ldots$ Π.χ., πόσες φορές συνολικά επισκέπεται η αλυσίδα μια κατάσταση; Ποιά είναι η συχνότητα επίσκεψης σε μια κατάσταση; Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την πρώτη ερώτηση. Η δεύτερη θα απαντηθεί στην επόμενη παράγραφο.

Καταρχάς δεν περιμένουμε όλες οι καταστάσεις να παίζουν ρόλο στην ασυμπτωτική συμπεριφορά, μιας και κάποιες καταστάσεις μπορεί να μην τις επισκεφτεί ξανά η αλυσίδα.

Ορισμος 7. Μια κατάσταση i είναι **επανερχόμενη** εάν $P($επιστροφή στην $i|X_0 = i) = 1$.
Εάν $P($επιστροφή στην $i|X_0 = i) < 1$ τότε η i είναι **μεταβατική**.

Παρατηρήστε ότι ο ορισμός αυτός χωρίζει όλες τις καταστάσεις σε επανερχόμενες και μεταβατικές, βάσει του εάν είναι σίγουρη η όχι η επιστροφή σε αυτές. Στην ασυμπτωτική συμπεριφορά ρόλο θα παίξουν μόνο οι επανερχόμενες:

Θεωρημα 6. *Έστω $V_\infty(i)$ η τυχαία μεταβλητή που δίδει τον συνολικό (για τα βήματα $0, 1, 2, \ldots$) αριθμό επισκέψεων στην κατάσταση i. Τότε*

(1) $P(V_\infty(i) < \infty|X_0 = i) = 0$ *εάν η i είναι επανερχόμενη.*
(2) $P(V_\infty(i) < \infty|X_0 = i) = 1$ *εάν η i είναι μεταβατική.*

Αποδειξη. Έστω $X_0 = i$ και ας ορίσουμε $\rho = P($επιστροφή στην $i|X_0 = i)$. Ποιά είναι η πιθανότητα να συμβεί $V_\infty(i) = 1$; Στην περίπτωση αυτή η αλυσίδα επισκέπτεται μία μοναδική φορά την i, δηλαδή μόνο στο βήμα

0. Συνεπώς δεν επιστρέφει ποτέ στην i, άρα $P(V_\infty(i) = 1|X_0 = i) = 1 - P(\text{επιστροφή στην } i|X_0 = i) = 1 - \rho$. Ποιά είναι η πιθανότητα ότι $V_\infty(i) = 2$; Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η αλυσίδα να επιστρέψει μία φορά και να μην το κάνει ξανά μετά τη δεύτερη αυτή επίσκεψη. Συνεπώς, $P(V_\infty(i) = 2|X_0 = i) = \rho(1-\rho)$. Με την ίδια λογική προκύπτει $P(V_\infty(i) = m|X_0 = i) = \rho^{m-1}(1-\rho)$. Άρα

$$\begin{aligned}
P(V_\infty(i) < \infty|X_0 = i) &= P(V_\infty(i) = 1 \text{ ή } V_\infty(i) = 2 \text{ ή } \ldots|X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} P(V_\infty(i) = m|X_0 = i) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{m-1}(1-\rho) \\
&= \begin{cases} 0\,, & \text{εάν } \rho = 1 \\ 1\,, & \text{εάν } \rho < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Σημειώστε ότι το εάν ο αριθμός των επισκέψεων σε μια κατάσταση είναι πεπερασμένος ή άπειρος, δεν είναι τυχαίο. Εάν πραγματοποιούσαμε επαναλαμβανόμενα ανεξάρτητα πειράματα παρατήρησης μιας αλυσίδας, δεν είναι δυνατό σε κάποια πειράματα να δούμε άπειρες επισκέψεις στην i και σε κάποια άλλα όχι. Άρα μπορούμε να ξέρουμε εκ των προτέρων ποιές καταστάσεις είναι αυτές (βλέπε μεταβατικές) όπου δε θα δούμε την αλυσίδα να τις επισκέπτεται μετά από ένα σημείο και μετά.

Ευτυχώς, ο έλεγχος εάν μια κατάσταση είναι επανερχόμενη ή μεταβατική δεν απαιτεί καθόλου υπολογισμούς αλλά βασίζεται στη συνδεσιμότητα του γραφήματος μετάβασης της αλυσίδας.

Ορισμος 8. Μια αλυσίδα Markov είναι **συνδεδεμένη** εάν για κάθε ζεύγος καταστάσεων i, j υπάρχει μονοπάτι (πολλαπλών ίσως βημάτων) που από τη μια μπορούμε να οδηγηθούμε στην άλλη.

Από την ιδιότητα της επισκεψιμότητας (Θεώρημα 5) προκύπτει ότι για τις συνδεδεμένες αλυσίδες Markov ισχύει $P(\text{επίσκεψη στην } i|X_0 = k) = 1$ για κάθε i, k. Συνεπώς,

$$P(\text{επιστροφή στην } i|X_0 = i) = \sum_{k\in S} p_{ik} P(\text{επίσκεψη στην } i|X_0 = k) = \sum_{k\in S} p_{ik} = 1\,.$$

Άρα

Πορισμα 3. *Σε μια συνδεδεμένη αλυσίδα Markov όλες οι καταστάσεις είναι επανερχόμενες.*

Το αποτέλεσμα αυτό μας δίνει έναν εύκολο τρόπο να διαπιστώσουμε εάν μια κατάσταση i είναι επανερχόμενη, ελέγχοντας εάν ανήκει σε μια συνδεδεμένη αλυσίδα:

Ιδιοτητα 11 (Κριτήριο κατάταξης καταστάσεων). *Εάν σε κάθε κατάσταση που μπορούμε να οδηγηθούμε από μια κατάσταση i, υπάρχει μονοπάτι πίσω στην i, τότε η i είναι επανερχόμενη. Εάν αυτό δεν είναι δυνατό, δηλαδή από την i μπορούμε να πάμε σε μία j από την οποία δεν υπάρχει μονοπάτι επιστροφής στην i τότε η i είναι μεταβατική.*

Παραδειγμα 33. *Θεωρήστε την αλυσίδα του Σχήματος 4. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο κατάταξης καταστάσεων (Ιδιότητα 11) προκύπτει ότι οι καταστάσεις 1,2,5 είναι επανερχόμενες και μεταβατικές οι 3,4.*

8. Ασυμπτωτικές ιδιότητες αλυσίδων Markov

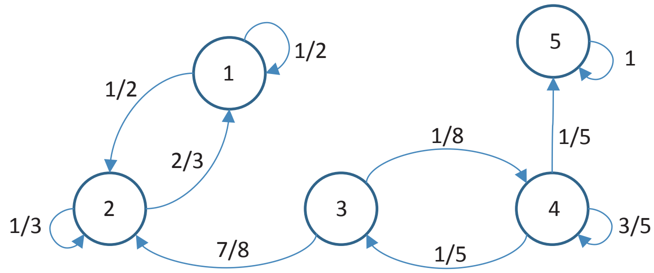
Για κάθε κατάσταση $i \in S$ και βήμα $n \geq 0$, έστω $V_n(i)$ ο αριθμός των επισκέψεων στην κατάσταση i τα βήματα $1, \ldots, n$. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε τη συχνότητα επίσκεψης $\lim_n V_n(i)/n$ της αλυσίδας σε κάθε κατάσταση i.

Ας υποθέσουμε ότι η συχνότητα αυτή συγκλίνει καθώς $n \to \infty$ σε έναν σταθερό και μη τυχαίο αριθμό π_i, δηλαδή

$$\lim_n \frac{V_n(i)}{n} = \pi_i\,, \text{ για κάθε } i \in S\,.$$

Πως υπολογίζουμε τους αριθμούς π_i;

Καταρχάς θα πρέπει να ισχύει $\sum_{i\in S} V_n(i) = n$ για κάθε n, άρα $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$. Επίσης θα πρέπει η συχνότητα εμφάνισης μιας μετάβασης *από* την i προς οποιαδήποτε άλλη κατάσταση (συμπεριλαμβάνοντας την i) να είναι ίση με τη συχνότητα που παρατηρούμε μια μετάβαση *προς* την i. Ο αριθμός των μεταβάσεων από την i μέσα στα βήματα $1, 2, \ldots, n$ είναι ίσος με $V_n(i)$. Από την άλλη, ο αριθμός των μεταβάσεων από την j στην i στο ίδιο διάστημα, είναι κατά προσέγγιση $V_n(j)p_{ji}$, αφού κάθε φορά που η αλυσίδα βρίσκεται στην j θα μεταβεί στην i



Σχημα 4.

με πιθανότητα p_{ji}. Το πλήθος των μεταβάσεων από οποιαδήποτε κατάσταση προς την i είναι $\sum_{j\in S} V_n(j)p_{ji}$, συνεπώς θα έχουμε:

$$\frac{V_n(i)}{n} = \sum_{j\in S} \frac{V_n(j)}{n} p_{ji}$$

Λαμβάνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ και στα δύο μέλη προκύπτει

$$\pi_i = \sum_{j\in S} \pi_j p_{ji}\ ,\ \text{για κάθε } i \in S\ . \tag{38}$$

Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **εξισώσεις ισορροπίας** γιατί προκύπτει από την ισορροπία των μεταβάσεων από και προς κάθε κατάσταση i. Κάθε λύση $(\pi_i, i \in S)$ των εξισώσεων ισορροπίας για τις οποίες ισχύει επιπλέον $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$ είναι μια **στάσιμη κατανομή** της αλυσίδας.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι ο λόγος $V_n(i)/n$ δε συγκλίνει πάντα σε ένα σταθερό αριθμό. Για παράδειγμα θεωρήστε την αλυσίδα στο Σχήμα 3 και $X_0 = 1$. Τότε το όριο $\lim_n V_n(2)/n$ είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει την τιμή 1 ή 0 με πιθανότητα 1/2 σε κάθε περίπτωση. Ο λόγος που παρατηρούμε αυτή τη συμπεριφορά είναι γιατί η αλυσίδα μπορεί να εγκλωβιστεί σε δύο διαφορετικές καταστάσεις. Η κατάσταση εγκλωβισμού καθορίζει και την τιμή των συχνοτήτων επίσκεψης για κάθε κατάσταση. Εφόσον η κατάσταση που θα εγκλωβιστεί η αλυσίδα είναι τυχαία, το ίδιο θα ισχύει και για τις συχνότητες επίσκεψης. Η μη συνδεσιμότητα της αλυσίδας είναι και η μόνο αιτία η σύγκλιση να είναι τυχαία.

Θεωρημα 7. *Για μια συνδεδεμένη αλυσίδα Markov ισχύει:*

(1)

$$\lim_n \frac{V_n(i)}{n} = \pi_i,\ \text{για κάθε κατάσταση } i\ ,$$

όπου $(\pi_i, i \in S)$ είναι η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας.

(2) Η στάσιμη κατανομή είναι μοναδική.

Παραδειγμα 34. *Θεωρήστε την αλυσίδα στο Σχήμα 5. Βρείτε το ποσοστό των βημάτων που η αλυσίδα βρίσκεται σε κάθε κατάσταση εάν παρατηρήσετε την εξέλιξή της για πάρα πολλά βήματα.*

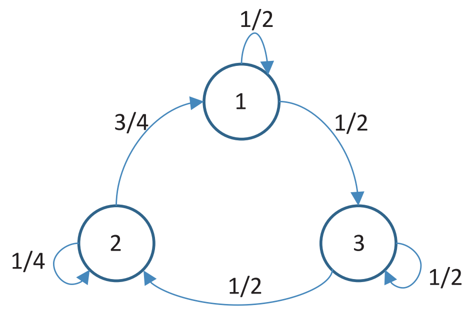
Η αλυσίδα είναι συνδεδεμένη άρα από το Θεώρημα 7 η συχνότητα επίσκεψης κάθε κατάστασης δίδεται από τη μοναδική στάσιμη κατανομή, η οποία δίδεται από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\pi_1 = \pi_1\frac{1}{2} + \pi_2\frac{3}{4}\ , \quad \pi_2 = \pi_2\frac{1}{4} + \pi_3\frac{1}{2}\ , \pi_3 = \pi_1\frac{1}{2} + \pi_3\frac{1}{2}$$

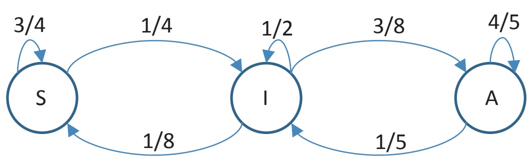
και την $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Λύνοντας βρίσκουμε $\pi_1 = 3/8, \pi_2 = 1/4, \pi_3 = 3/8$.

Παραδειγμα 35. *Ένας επεξεργαστής ενός Η/Υ λειτουργεί σε μια από τις τρείς καταστάσεις: Sleep (S), Idle (I), Active(A). Η κατάσταση που βρίσκεται ο επεξεργαστής αλλάζει κάθε λεπτό σύμφωνα με την αλυσίδα Markov:*

Στην κατάσταση S ο επεξεργαστής καταναλώνει $0mW$, στην I $1mW$ και στην A $4mW$. Να βρείτε τη μέση κατανάλωση ενέργειας (μέση ισχύς) εάν ο επεξεργαστής λειτουργήσει για ένα πολύ μεγάλο διάστημα.



Σχημα 5.



Σχημα 6.

Αρκεί να βρούμε το ποσοστό του χρόνου που ο επεξεργαστής βρίσκεται σε κάθε κατάσταση. Η αλυσίδα είναι συνδεδεμένη, άρα από το Θεώρημα 7 τα ποσοστά π_S, π_I, π_A *αυτά ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας*

$$\pi_S = \pi_S \frac{3}{4} + \pi_I \frac{1}{8}\,, \quad \pi_I = \pi_I \frac{1}{2} + \pi_S \frac{1}{4} + \pi_A \frac{1}{5}\,, \quad \pi_A = \pi_A \frac{4}{5} + \pi_I \frac{3}{8}$$

όπως επίσης και $\pi_S + \pi_I + \pi_A = 1$. *Λύνοντας βρίσκουμε* $\pi_S = 4/27, \pi_I = 8/27, \pi_A = 15/27$. *Συνεπώς*

$$\text{μέση ισχύς} = 0\pi_S + 1\pi_I + 4\pi_A mW = \frac{64}{27} mW\,.$$

9. Εργοδικότητα αλυσίδων Markov

Γιατί η λύση $(\pi_i, i \in S)$ των εξισώσεων ισορροπιας (38) ονομάζεται 'στάσιμη κατανομή'; Έστω ότι αρχίζουμε την αλυσίδα, όχι από κάποια συγκεκριμένη κατάσταση, αλλά επιλέγοντάς τη τυχαία με τέτοιον τρόπο ώστε $P(X_0 = i) = \pi_i$ για κάθε i. Τότε

$$P(X_1 = i) = \sum_{j \in S} \pi_j p_{ji} = \pi_i\,,$$

δηλαδή και η X_1 ακολουθεί τη στάσιμη κατανομή. Εφαρμόζοντας την ίδια λογική προκύπτει ότι $P(X_n = i) = \pi_i$ για κάθε i. Άρα αρχίζοντας την αλυσίδα σύμφωνα με την κατανομή $(\pi_i, i \in S)$, η κατανομή της κατάστασης σε *κάθε βήμα* από εκεί και πέρα είναι η ίδια - δηλαδή στάσιμη. Σημειώστε ότι αυτό που δεν αλλάζει από βήμα σε βήμα είναι η κατανομή της κατάστασης, δηλαδή η $P(X_n = i)$· η ίδια η κατάσταση X_n αλλάζει φυσικά τιμή από βήμα σε βήμα.

Έστω ότι αρχίζουμε την αλυσίδα -όχι σύμφωνα με τη στάσιμη κατανομή- αλλά από μια συγκεκριμένη κατάσταση k. Εάν κοιτούσαμε την κατάσταση μετά από n βήματα, ποιά η πιθανότητα ότι θα βρίσκεται σε οποιαδήποτε κατάσταση i, δηλαδή ποιά είναι η $P(X_n = i|X_0 = k)$; Ας υποθέσουμε ότι η τιμή αυτή συγκλίνει σε μια τιμή a_i καθώς $n \to \infty$, δηλαδή

$$\lim_n P(X_n = i|X_0 = k) = a_i\,, \ \text{για κάθε } i \in S\,. \tag{39}$$

Ποιές είναι οι τιμές αυτές;

Στην περίπτωση που ισχύει η σύγκλιση αυτή, έχουμε:

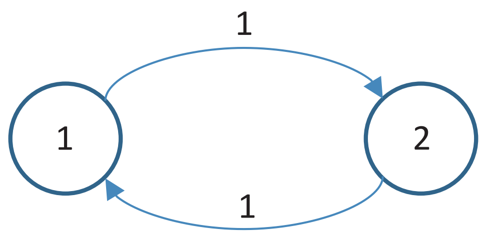
$$a_i = \lim_n P(X_{n+1} = i|X_0 = k) = \lim_n \sum_{j\in S} P(X_n = j|X_0 = k)p_{ji} = \sum_{j\in S} \left(\lim_n P(X_n = j|X_0 = k)\right) p_{ji} = \sum_{j\in S} a_j p_{ji} \, .$$

Άρα οι τιμές $(a_i, i \in S)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας και επιπλέον $\sum_{i\in S} a_i = 1$, άρα είναι μια στάσιμη κατανομή. Στην περίπτωση μάλιστα που η αλυσίδα είναι συνδεδεμένη, η κατανομή αυτή θα είναι μοναδική (βλέπε Θεώρημα 7), άρα *εάν ισχύουν οι συγκλίσεις* (39) τότε

$$\lim_n P(X_n = i|X_0 = k) = \pi_i \, , \text{ για κάθε } i \in S \, ,$$

όπου $(\pi_i, i \in S)$ η στάσιμη κατανομή.

Πότε όμως ισχύουν οι (39); Για την αλυσίδα του σχήματος: ισχύει



Σχημα 7.

$$P(X_n = 1|X_0 = 1) = \begin{cases} 1 \, , & \text{εάν } n \text{ άρτιος} \\ 0 \, , & \text{εάν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Κατά συνέπεια, η τιμή της $P(X_n = 1, |X_0 = 1)$ δε συγκλίνει λόγω της περιοδικότητας στην κίνηση της αλυσίδας. Εντούτοις, εάν μια αλυσίδα δεν παρουσιάζει περιοδικές τροχιές τότε οι συγκλίσεις (39) ισχύουν.

Ορισμος 9. Για κάθε κατάσταση i ορίζουμε την **περίοδο** d_i ως

$$\min = \text{ΜΚΔ}\{n > 0|P(X_n = i|X_0 = i) > 0\} \, .$$

Μια αλυσίδα είναι **απεριοδική** εάν $d_i = 1$ για κάθε i.

Για την αλυσίδα του Σχήματος 7 η πιθανότητα $P(X_n = 1|X_0 = 1)$ είναι μη μηδενική για όλους τους άρτιους n, άρα $d_1 = 2$. Επίσης έχουμε $d_2 = 2$, άρα η αλυσίδα είναι περιοδική (δηλαδή δεν είναι απεριοδική, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό).

Θεωρημα 8. *Για μια συνδεδεμένη και απεριοδική αλυσίδα ισχύει*

$$\lim_n P(X_n = i|X_0 = k) = \pi_i \, , \text{ για κάθε καταστάσεις } i, k \, ,$$

όπου $(\pi_i, i \in S)$ η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας.

Το Θεώρημα 8 δίδει άλλη μια σημασία στη στάσιμη κατανομή, εκτός από αυτή της συχνότητας του Θεωρήματος 7: από όπου και αν αρχίσει η αλυσίδα, αν κοιτάξουμε την κατάσταση μετά από πολλά βήματα (για μεγάλο n) η κατάσταση εκεί θα είναι η i με πιθανότητα που δίδεται (προσεγγιστικά) από τη στάσιμη κατανομή, δηλαδή π_i.

Παραδειγμα 36. *Για το μοντέλο καταστάσεων του επεξεργαστή στο Παράδειγμα 35, ποιά είναι η πιθανότητα στο 1000 λεπτό να βρίσκεται στην κατάσταση Active εάν αρχικά βρίσκεται σε κατάστασηSleep ;*

Υπολογίζοντας τις περιόδους d_i για κάθε κατάσταση i βλέπουμε ότι $d_S = d_I = d_A = 1$, άρα η αλυσίδα είναι απεριοδική. Από το Θεώρημα 8 προκύπτει ότι $P(X_{1000} = A|X_0 = S) \approx \pi_A = 15/27$.

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο για οποιαδήποτε άλλη αρχική κατάσταση του επεξεργαστή.

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα (7),(8) συμπεραίνουμε το εξής:

Πορισμα 4 (Εργοδικότητα). *Για μια συνδεδεμένη και απεριοδική αλυσίδα ισχύει*

$$\lim_n \frac{V_n(i)}{n} = \lim_n P(X_n = i|X_0 = k) \, , \text{ για κάθε καταστάσεις } i, k \, .$$

Με άλλα λόγια, η συχνότητα επίσκεψης στην κατάσταση i αν κοιτάξουμε την αλυσίδα για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, ισούται με την πιθανότητα να τη βρούμε στην κατάσταση i εάν την κοιτάξουμε μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα.

Κεφάλαιο 3

Βελτιστοποίηση στον χρόνο

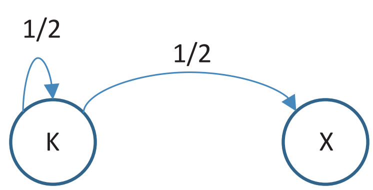
1. Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με προβλήματα τα οποία αφορούν τη βέλτιστη λήψη διαδοχικών αποφάσεων όταν οι αποφάσεις αυτές μπορούν να επηρεάσουν το μέλλον με έναν αβέβαιο -μη ντετερμινιστικό- τρόπο. Για παράδειγμα

- Κατέχουμε μετοχές μιας εταιρίας τις οποίες επιθυμούμε να πουλήσουμε στο χρηματιστήριο αποκομίζοντας το μέγιστο δυνατό κέρδος. Η εξέλιξη της τιμής της μετοχής είναι αβέβαιη, οπότε θα πρέπει κάθε στιγμή να επιλέγουμε μεταξύ πώλησης στην τρέχουσα τιμή ή της αναμονής για μια καλύτερη τιμή στο μέλλον.
- Αποφασίζουμε πότε θα πάμε το αυτοκίνητό μας στο συνεργείο. Αν και μια τέτοια απόφαση μπορεί να είναι δαπανηρή, εντούτοις αν το αποφεύγουμε συνεχώς διακινδυνεύουμε την εμφάνιση μιας σοβαρής βλάβης που μπορεί να επιφέρει ακόμη μεγαλύτερο κόστος.
- Τυχερά παιχνίδια. Ανεξάρτητα με τον τύπο του παιχνιδιού, ένα βασικό δίλημμα είναι εάν θα συνεχίσουμε να παίζουμε ή θα σταματήσουμε.

Παρά το γεγονός ότι τα προβλήματα αυτά φαινομενικά είναι διαφορετικά, εντούτοις έχουν ένα βασικό κοινό χαρακτηριστικό: οι αποφάσεις σε κάθε χρονικό σημείο πρέπει να ισορροπήσουν μεταξύ ενός άμεσου ωφέλους και της προσδοκίας ότι το μέλλον μπορεί να επιφυλάσσει κάτι καλύτερο. Θα λύσουμε αυτά τα προβλήματα χρησιμοποιώντας ένα πολύ γενικό μαθηματικό εργαλείο με το οποίο μπορεί (θεωρητικά τουλάχιστον) να λυθεί (σχεδόν) κάθε πρόβλημα λήψης αποφάσεων κάτω από αβεβαιότητα.

Παράδειγμα 37. *Ένας φίλος μας δανείζει το αμάξι του για N ημέρες. Το αμάξι μπορεί να βρίσκεται σε δύο διακριτές καταστάσεις: είτε σε καλή κατάσταση (K) ή χαλασμένο (X). Στο τέλος κάθε ημέρας αποφασίζουμε εάν θα κάνουμε κάποιο σύντομο έλεγχο στο αμάξι ή όχι. Εάν δε γίνει έλεγχος τότε εάν το αμάξι βρίσκεται στην κατάσταση X, η κατάσταση του την επόμενη ημέρα μεταβάλλεται τυχαία σύμφωνα με τις πιθανότητες μετάβασης που δίνονται από το διάγραμμα: ενώ αν γίνει, μεταβάλλεται ως εξής: Παρατηρήστε ότι εάν δεν*



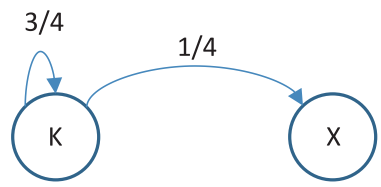
Σχημα 1.

γίνει έλεγχος υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα το αμάξι να χαλάσει την επόμενη ημέρα, συγκρινόμενη με την περίπτωση που γίνεται έλεγχος. Εάν το αμάξι είναι χαλασμένο τότε η επόμενη κατάσταση δίδεται από τις πιθανότητες μετάβασης στο Σχήμα 3 ανεξαρτήτως εάν κάνουμε έλεγχο ή όχι. Αυτό έχει νόημα, για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι στην κατάσταση X το αμάξι βρίσκεται στο συνεργείο και έτσι η εξέλιξή του δεν εξαρτάται από τις αποφάσεις μας αλλά από έναν εξωγενή παράγοντα, όπως ο διαθέσιμος χρόνος των μηχανικών του συνεργείου.

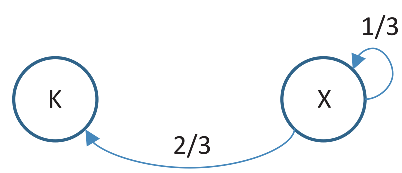
Κάθε απόφαση δημιουργεί κάποιο άμεσο κόστος το οποίο εξαρτάται και από την κατάσταση του αμαξιού. Έτσι, εάν κάνουμε έλεγχο (E) στην κατάσταση K κοστίζει 1 ενώ εάν δεν κάνουμε έλεγχο (T) κοστίζει -1. (Το ώφελος δίδεται ως αρνητικό κόστος.) Στην κατάσταση X κοστίζουν 2 και οι δύο αποφάσεις.

Η περιγραφή του Παραδείγματος καθορίζει πλήρως τον μηχανισμό με τον οποίον οι αποφάσεις επηρεάζουν την (τυχαία) εξέλιξη των καταστάσεων, όσο και το κόστος που αυτές επιφέρουν. Μια τέτοια περιγραφή ορίζει μια Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων.

Ορισμος 10. Μια **Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων (ΜΔΑ)** ορίζεται από τα παρακάτω:



Σχημα 2.



Σχημα 3.

- Ένα πεπερασμένο **σύνολο καταστάσεων** S.
- Ένα πεπερασμένο **σύνολο αποφάσεων** A.
- Τις **πιθανότητες μετάβασης** p_{ij}^a μεταξύ της κατάστασης $i \in S$ και $j \in S$ όταν λαμβάνεται η απόφαση $a \in A$.
- Μια **συνάρτηση κόστους** με τιμές $c(i,a)$ για κάθε κατάσταση $i \in S$ και απόφαση $a \in A$.

Παραδειγμα 38. *Για το Παράδειγμα 37 η ΜΔΑ που ορίζεται είναι αυτή με*

- *Σύνολο καταστάσεων* $S = \{K, X\}$.
- *Σύνολο αποφάσεων* $A = \{E, T\}$.
- *Πιθανότητες μετάβασης*

$$p_{ij}^a = \begin{cases} 1/2\,, & \textit{εάν } a = T, i = K \\ 3/4\,, & \textit{εάν } a = E, i = j = K \\ 1/4\,, & \textit{εάν } a = E, i = K, j = X \\ 1/3\,, & \textit{εάν } i = X, j = X \\ 2/3\,, & \textit{εάν } i = X, j = K \end{cases}$$

- *Συνάρτηση κόστους*

$$c(i,a) = \begin{cases} 1\,, & \textit{εάν } a = E, i = K \\ -1\,, & \textit{εάν } a = T, i = K \\ 2\,, & \textit{εάν } i = X \end{cases}$$

Η ΜΔΑ περιγράφει την επίπτωση που έχουν οι αποφάσεις σε κάθε κατάσταση, όχι όμως πως λαμβάνονται αυτές οι αποφάσεις. Ο τρόπος με τον οποίον γίνεται αυτό καθορίζεται από την **πολιτική (ή στρατηγική) λήψης αποφάσεων**. Δεν θα θεωρήσουμε κανέναν περιορισμό στον τρόπο με τον οποίον λαμβάνονται οι αποφάσεις, παρά μόνο ότι επιλέγονται με έναν *αιτιατό* τρόπο, δηλαδή η απόφαση A_n που λαμβάνεται στο βήμα n δε μπορεί να επιλέγεται βάσει των μελλοντικών καταστάσεων $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ και αποφάσεων $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$. Για κάθε $n \geq 0$ η A_n Θα πρέπει να είναι συνάρτηση της μέχρι τότε τότε διαθέσιμης πληροφορίας δηλαδή των $X_n, X_{n-1}, A_{n-1}, X_{n-2}, A_{n-2}, \dots, X_0, A_0$. Για παράδειγμα, η A_0 θα πρέπει να βασίζεται στη γνώση μόνο της X_0, δηλαδή $A_0 = \sigma_0(X_0)$, για μια συνάρτηση σ_0 που αντιστοιχίζει τις δυνατές τιμές για τη X_0, δηλαδή το σύνολο καταστάσεων S σε μία απόφαση από το σύνολο αποφάσεων A. Παρόμοια, η A_1 θα πρέπει να είναι μια συνάρτηση των X_1, X_0, A_0, δηλαδή $A_1 = \sigma_1(X_1, X_0, A_0)$ για μια συνάρτηση σ_1 που αντιστοιχίζει σημεία του $S \times S \times A$ σε μια απόφαση στο A. Έτσι έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμος 11. Μια **πολιτική** είναι μια ακολουθία συναρτήσεων $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots)$ όπου η τιμή της n-οστής συνάρτησης είναι

$$\sigma_n(x_n, x_{n-1}, a_{n-1}, x_{n-2}, a_{n-2}, \ldots, x_0, a_0)\,, \tag{40}$$

για κάθε $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0 \in S$ και $a_{n-1}, a_n, \ldots, a_0 \in A$.

Η τιμή της n-οστής συνάρτησης (40) είναι η απόφαση που θα ληφθεί στο βήμα n στην κατάσταση x_n εάν οι προηγούμενες καταστάσεις ήταν οι $x_{n-1}, \ldots, x_0$ και είχαν ληφθεί οι αποφάσεις $a_{n-1}, \ldots, a_0$ αντίστοιχα.

Παραδειγμα 39. *Τρείς διαφορετικές πολιτικές που θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε στο Παράδειγμα 37 είναι:*

(1) $\sigma^{(1)}$ = *'Δεν κάνω τίποτα'. Εδώ* $\sigma^{(1)} = (\sigma_0^{(1)}, \sigma_1^{(1)}, \ldots)$ *όπου* $\sigma_n^{(1)}(x_n, x_{n-1}, a_{n-1}, x_{n-2}, a_{n-2}, \ldots, x_0, a_0) = T$ *για κάθε* $n \geq 0, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0 \in S$ *και* $a_{n-1}, a_n, \ldots, a_0 \in A$.

(2) $\sigma^{(2)}$ = *'Κάνουμε έλεγχο όταν το αμάξι είναι σε καλή κατάσταση και τίποτα όταν χαλάσει'. Εδώ*

$$\sigma_n^{(1)}(x_n, x_{n-1}, a_{n-1}, x_{n-2}, a_{n-2}, \ldots, x_0, a_0) = \begin{cases} E\,, & \text{εάν } x_n = K \\ T\,, & \text{εάν } x_n = X \end{cases}$$

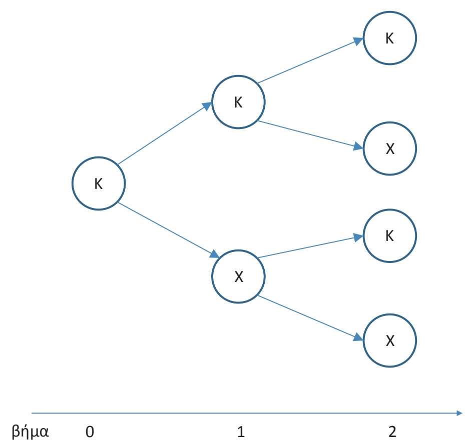
(3) $\sigma^{(3)}$ = *'Δεν κάνουμε έλεγχο μέχρι να χαλάσει το αμάξι για πρώτη φορά. Απο εκεί και πέρα κάνουμε έλεγχο καθημερινά εφόσον το αμάξι είναι σε καλή κατάσταση.' Εδώ*

$$\sigma_n^{(1)}(x_n, x_{n-1}, a_{n-1}, x_{n-2}, a_{n-2}, \ldots, x_0, a_0) = \begin{cases} T\,, & \text{εάν } x_n = X \text{ ή } x_n = x_{n-1} = \cdots = x_0 = K \\ E\,, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Εάν έχουμε μια ΜΔΑ (δηλαδή τον μηχανισμό με τον οποίο οι αποφάσεις επηρεάζουν τις μελλοντικές καταστάσεις και το κόστος) και μια συγκεκριμένη πολιτική (δηλαδή τον τρόπο που λαμβάνουμε αποφάσεις σε κάθε βήμα) έχουμε όλα τα συστατικά που χρειάζονται για να περιγράψουμε (στατιστικά) πως εξελίσσονται οι καταστάσεις και αποφάσεις στον χρόνο, εάν γνωρίζουμε την κατανομή της αρχικής κατάστασης X_0. Δηλαδή η περιγραφή της ΜΔΑ μαζί με αυτήν της πολιτικής μας επιτρέπουν (θεωρητικά) να υπολογίσουμε την κατανομή των ακολουθιών $X_0, X_1, X_2, \ldots$ και $A_0, A_1, A_2 \ldots$ που περιγράφουν την ακολουθία καταστάσεων και αποφάσεων αντιστοίχως.

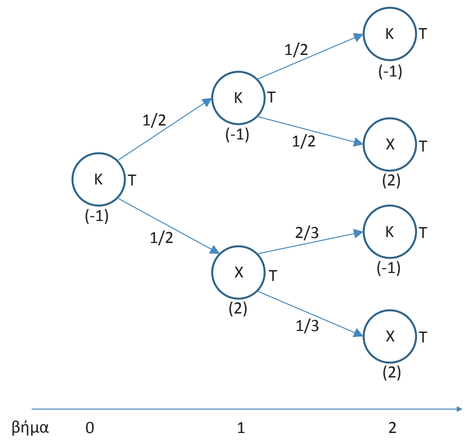
Παραδειγμα 40. *Θα καθορίσουμε την κατανομή των τριών πρώτων καταστάσεων* X_0, X_1, X_2 *και αποφάσεων* A_0, A_1, A_2 *για τη ΜΔΑ του Παραδείγματος 38 και τις πολιτικές στο Παράδειγμα 39, εάν* $X_0 = K$.

Ας 'ξεδιπλώσουμε' τις καταστάσεις στον χρόνο όπως φαίνεται στο **δέντρο αποφάσεων** *στο Σχήμα 4.*



Σχημα 4.

Υπάρχουν 4 δυνατά μονοπάτια από αριστερά προς δεξιά: KKK, KKX, KXK *και* KXX. *Το μονοπάτι που συνδέει κάθε κορυφή με την αρχική κατάσταση στο βήμα 0 (κορυφή στα αριστερά) αναπαριστά την ακολουθία καταστάσεων μέχρι εκείνο το σημείο. Εφόσον για οποιαδήποτε πολιτική η απόφαση που αυτή λαμβάνει σε κάθε βήμα εξαρτάται από το τι έχει γίνει μέχρι εκείνο το βήμα, σε κάθε κορυφή λαμβάνεται και μια συγκεκριμένη απόφαση. Από εκεί καθορίζονται οι πιθανότητες μετάβασης μεταξύ δύο κορυφών και κατά συνέπεια η πιθανότητα για κάθε μονοπάτι (πολλαπλασιάζοντας τις πιθανότητες μετάβασης πάνω σε αυτό).*



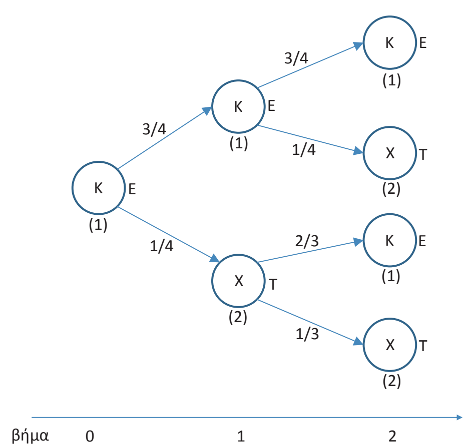
Σχημα 5.

(1) *Για την πολιτική $\sigma^{(1)}$ οι πιθανότητες μετάβασης και αποφάσεις σε κάθε κατάσταση είναι αυτές που δίνονται στο Σχήμα 5, αφού σε κάθε κορυφή λαμβάνεται η απόφαση T, άρα οι πιθανότητες μετάβασης από τις κορυφές K είναι 1/2 ανεξάρτητα από το βήμα. Οι πιθανότητες μετάβασης από τις κορυφές X είναι 2/3 και 1/3 πρός τις K, X είναι 2/3 και 1/3 αντίστοιχα. Συνεπώς,*

$$P(X_1 = K, X_2 = K | X_0 = K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$P(X_1 = K, X_2 = X | X_0 = K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$P(X_1 = X, X_2 = K | X_0 = K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$P(X_1 = X, X_2 = X | X_0 = K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Οι αριθμοί στις παρενθέσεις κάτω από κάθε κορυφή δίνουν το άμεσο κόστος για το αντίστοιχο ζεύγος κατάστασης/απόφασης εκεί, σύμφωνα με με τη συνάρτηση κόστους στο Παράδειγμα 39.

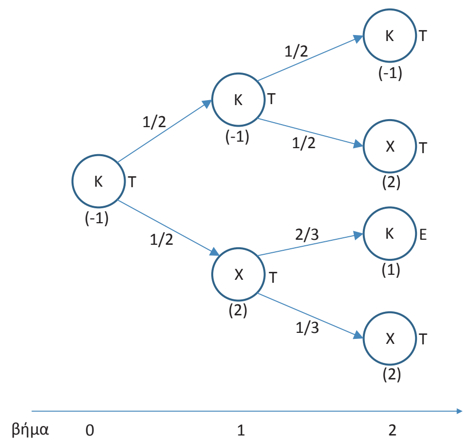
(2) *Για την πολιτική $\sigma^{(2)}$ οι πιθανότητες μετάβασης και αποφάσεις δίνονται στο Σχήμα 6.*



Σχημα 6.

$$P(X_1 = K, X_2 = K | X_0 = K) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$
$$P(X_1 = K, X_2 = X | X_0 = K) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$
$$P(X_1 = X, X_2 = K | X_0 = K) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$
$$P(X_1 = X, X_2 = X | X_0 = K) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

(3) Για την πολιτική $\sigma^{(3)}$ οι πιθανότητες μετάβασης και αποφάσεις δίνονται στο Σχήμα 7.



Σχημα 7.

$$P(X_1 = K, X_2 = K | X_0 = K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$P(X_1 = K, X_2 = X | X_0 = K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$P(X_1 = X, X_2 = K | X_0 = K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$P(X_1 = X, X_2 = X | X_0 = K) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ποιά είναι όμως η καλύτερη πολιτική· Για να απαντήσουμε ένα τέτοιο ερώτημα θα πρέπει πρώτα να διατυπώσουμε ένα κριτήριο σύμφωνα με το οποίο αξιολογούμε την 'επίδοση' κάθε πολιτικής. Θα ασχοληθούμε με δύο κριτήρια, αυτό του μέσου συνολικού κόστους σε φραγμένο χρονικό ορίζοντα και αυτό του μέσου συνολικού υποτιμούμενου κόστους.

2. Το κριτήριο του μέσου συνολικού κόστους σε φραγμένο χρονικό ορίζοντα

Ορισμος 12. Το **μέσο συνολικό κόστος σε χρονικό ορίζοντα** $N+1$ **βημάτων** (N μεταβάσεων) για την πολιτική $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots)$ όταν αρχίζει από την κατάσταση i είναι

$$E\left[\sum_{n=0}^{N} c(X_n, A_n) | X_0 = i\right], \tag{41}$$

όπου $A_n = \sigma_n(X_n, X_{n-1}, A_{n-1}, \ldots, X_0, A_0)$ για κάθε $n \geq 0$.

Παραδειγμα 41. *Θα υπολογίσουμε το μέσο συνολικό κόστος για ορίζοντα $N = 3$ βημάτων που επιτυγχάνει κάθε πολιτική. Το συνολικό κόστος κάθε μονοπατιού προκύπτει αθροίζοντας τους αριθμούς στις παρενθέσεις κάτω από τις κορυφές που ανήκουν σε αυτό.*

(1) *Από το Σχήμα 5 τα μονοπάτια* KKK,KKX,KXK,KXX *έχουν συνολικό κόστος -3,0,0,3 αντίστοιχα, άρα το μέσο συνολικό κόστος είναι*

$$-3P(X_1 = K, X_2 = K|X_0 = K) + 0P(X_1 = K, X_2 = X|X_0 = K) + 0P(X_1 = X, X_2 = K|X_0 = K) + 3P(X_1 = X, X_2 = X|X_0 = K) = -\frac{1}{4}\,,$$

χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 40.

(2) *Από το Σχήμα 6 τα μονοπάτια* KKK,KKX,KXK,KXX *έχουν συνολικό κόστος 3,4,4,5 αντίστοιχα, άρα το μέσο συνολικό κόστος είναι*

$$3P(X_1 = K, X_2 = K|X_0 = K) + 4P(X_1 = K, X_2 = X|X_0 = K) + 4P(X_1 = X, X_2 = K|X_0 = K) + 5P(X_1 = X, X_2 = X|X_0 = K) = \frac{169}{48}\,,$$

χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 40.

(3) *Από το Σχήμα 7 τα μονοπάτια* KKK,KKX,KXK,KXX *έχουν συνολικό κόστος -3,0,2,3 αντίστοιχα, άρα το μέσο συνολικό κόστος είναι*

$$-3P(X_1 = K, X_2 = K|X_0 = K) + 2P(X_1 = K, X_2 = X|X_0 = K) + 3P(X_1 = X, X_2 = K|X_0 = K) + 3P(X_1 = X, X_2 = X|X_0 = K) = \frac{169}{48}\,,$$

χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 40.

Στο παράδειγμα βλέπουμε ότι η πολιτική $\sigma^{(1)}$ επιτυγχάνει μικρότερο μέσο συνολικό κόστος από τις $\sigma^{(2)}$ και $\sigma^{(3)}$. Ποιά όμως είναι η καλύτερη πολιτική από το σύνολο Π *όλων των δυνατών πολιτικών*;

Ορισμος 13. Η πολιτική σ^* είναι **βέλτιστη** (για το κριτήριο του μέσου συνολικού κόστους σε χρονικό ορίζοντα $N+1$ βημάτων) εάν το συνολικό μέσο κόστος $V_N(i)$ που συσσωρεύει, αρχίζοντας από οποιαδήποτε κατάσταση i, ικανοποιεί

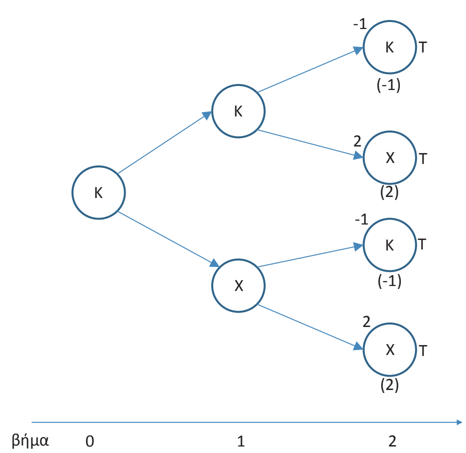
$$V_N(i) = \min_{\sigma\in\Pi} E\left[\sum_{n=0}^{N} c(X_n, A_n)|X_0 = i\right]$$

όπου για κάθε $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots) \in \Pi$ έχουμε $A_n = \sigma_n(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0, A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0)$ για κάθε $n \geq 0$.

Η συνάρτηση $V_N(i)$ που δίνει το ελάχιστο δυνατό μέσο συνολικό κόστος για κάθε αρχική κατάσταση i, είναι η **συνάρτηση αξίας** (για το κριτήριο του φραγμένου χρονικού ορίζοντα $N+1$ βημάτων).

Παραδειγμα 42. *Ας υπολογίσουμε τη βέλτιστη πολιτική για τη ΜΔΑ του Παραδείγματος 38 σύμφωνα με το κριτήριο* (41) *για* $N = 2$.

Θα κατασκευάσουμε το δέντρο απόφασης που αντιστοιχεί στη βέλτιστη πολιτική αρχίζοντας από το τέλος, αρχικά θεωρώντας τις κορυφές στο τελευταίο βήμα δεξιά στο Σχήμα 8. Κάθε μια από τις κορυφές αντιπροσωπεύει



Σχημα 8.

την τελευταία κατάσταση στα τέσσερα δυνατά σενάρια KKK, KKX, KXK, KXX. *Ας πάρουμε την πάνω δεξιά κορυφή* K, *δηλαδή την τελευταία κατάσταση του μονοπατιού* KKK. *Όποιο κόστος και να είχε συσσωρευτεί στα προηγούμενα βήματα 0 και 1, σε εκείνη την κορυφή η βέλτιστη πολιτική επιλέγει την απόφαση α με το μικρότερο* *άμεσο κόστος* $c(K,a)$, *μιας και αφού το βήμα 2 είναι το τελευταίο, η απόφαση* a *επηρεάζει μόνο το άμεσο κόστος και όχι το μέλλον. Άρα η απόφαση που θα ληφθεί εκεί είναι η* T *γιατί* $c(K,T) = -1 < 1 = c(K,E)$. *Η ίδια απόφαση είναι βέλτιστη επίσης και για την άλλη κορυφή* K *του τελευταίου βήματος, την τελευταία κορυφή* K *του μονοπατιού* KXK. *Αυτό συμβαίνει γιατί η απόφαση στο τελευταίο βήμα δε χρειάζεται να λάβει υπόψιν του τι έχει προηγηθεί, μιας και δε μπορεί να αλλάξει το κόστος που έχει συσσωρευτεί στο παρελθόν. Παρατηρήστε ότι η επιλογή της απόφασης στην κατάσταση* X *δεν έχει αντίκτυπο στο άμεσο κόστος και στις πιθανότητες μετάβασης, άρα δεν έχει σημασία ποιά θα επιλέξουμε· ας επιλέξουμε* T *αυθαίρετα.*

Στο Σχήμα10, αριστερά και πάνω από κάθε κορυφή δίδεται το μέσο ελάχιστο κόστος που συσσωρεύεται από εκείνη την κορυφή και μετά. Οι αριθμοί αυτοί είναι ίδιοι για ίδιες καταστάσεις, π.χ., -1 και για τις δύο κορυφές K *του τελευταίου βήματος. Δηλαδή, το μέσο συνολικό ελάχιστο κόστος από μια κορυφή και μετά δεν εξαρτάται από το παρελθόν αλλά μόνο από την κατάσταση αυτή. Άρα το κόστος από εκεί και μετά είναι ίσο με το ελάχιστο μέσο συνολικό κόστος για τον χρονικό ορίζοντα 1 βηματος. Από τον ορισμό της συνάρτησης αξίας οι αριθμοί αυτοί είναι οι* $V_0(K)$ *και* $V_0(X)$ *για τις καταστάσεις* K *και* X *αντίστοιχα.*

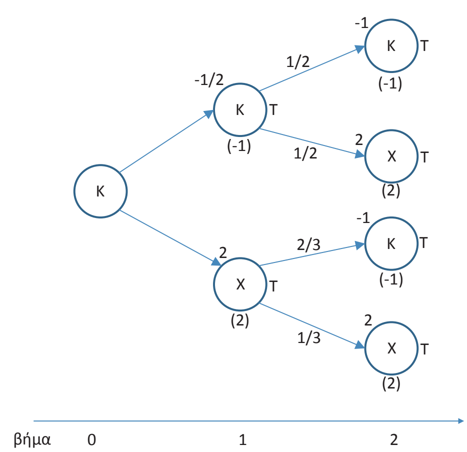
Ας υπολογίσουμε τώρα τις βέλτιστες αποφάσεις για τις κορυφές του Σχήματος 10 στο βήμα 1. Για την K, *εάν η απόφαση* a *οδηγήσει στην κατάσταση* j, *θα επιφέρει μέσο κόστος από το βήμα 1 και μετά ίσο με* $c(K,a) + V_0(j)$ *και αυτό θα συμβεί με πιθανότητα* p^a_{Kj}. *Αθροίζοντας για όλες τις καταστάσεις του βήματος 2 που μπορεί να πάμε από την* K *του βήματος 1, συσσωρεύεται μέσο κόστος*

$$c(K,a) + p^a_{KK}V_0(K) + p^a_{KX}V_0(X) = c(K,a) + p^a_{KK}(-1) + p^a_{KX}2 = \begin{cases} -1 + \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}2 = -\frac{1}{2}\,, & \text{εάν } a = T \\ 1 + \frac{3}{4}(-1) + \frac{1}{4}2 = \frac{3}{4}\,, & \text{εάν } a = K \end{cases}$$

Άρα $V_1(K) = \min(-1/2, 3/4)$ *και καλύτερη απόφαση η* $a_1(K) = T$. *Για την κατάσταση* X *και οι δύο αποφάσεις επιφέρουν μέσο κόστος (για τα βήματα 1,2) ίσο με*

$$V_1(X) = 2 + \frac{2}{3}V_0(K) + \frac{1}{3}V_0(X) = 2$$

και όπως και πριν θέτουμε $a_1(X) = T$ *και καταλήγουμε στο δέντρο απόφασης του Σχήματος 9.*



Σχημα 9.

Για τον προσδιορισμό του μέσου συνολικού κόστους από την κατάσταση K *στο βήμα 0, χρησιμοποιούμε την ίδια ιδέα: η βέλτιστη πολιτική θα χρησιμοποιήσει τις βέλτιστες αποφάσεις από το βήμα 1 και μετά, δηλαδή την καλύτερη πολιτική για ορίζοντα 2 βημάτων. Άρα στο βήμα 0 απο την κατάσταση* K *εάν ληφθεί η απόφαση* T *το συνολικό μέσο κόστος είναι*

$$-1 + \frac{1}{2}V_1(K) + \frac{1}{2}V_1(X) = -\frac{1}{4}\,,$$

ενώ η απόφαση E *επιφέρει κόστος*

$$1 + \frac{3}{4}V_1(K) + \frac{1}{4}V_1(X) = \frac{9}{8}\,,$$

Συνεπώς $V_2(K) = \min(9/8, -1/4) = -1/4$ *και βέλτιστη απόφαση η* $a_2(K) = T$.

Άρα η βέλτιστη πολιτική είναι ποτέ να μην κάνουμε έλεγχο του αμαξιού, δηλαδή η πολιτική $\sigma^{(1)}$ *(βλέπε Παραδείγμα 39).*

Το κλειδί για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής στο παράδειγμα ήταν η παρατήρηση ότι *η βέλτιστη πολιτική για ορίζοντα $n+1$ βημάτων μετά το αρχικό βήμα 0, δηλαδή στα βήματα 1 μέχρι n, εφαρμόζει τη βέλτιστη πολιτική για τον ορίζοντα n βημάτων που απομένουν.* Η παρατήρηση αυτή ονομάζεται και **αρχή του δυναμικού προγραμματισμού** και πρωτοδιατυπώθηκε από τον Richard Bellman.

Η αρχή αυτή διατυπώνεται από την **εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού** και προσδιορίζει αναδρομικά τη συνάρτηση αξίας:

Θεωρημα 9. *Η συνάρτηση αξίας $V_n(i)$ ικανοποιεί*

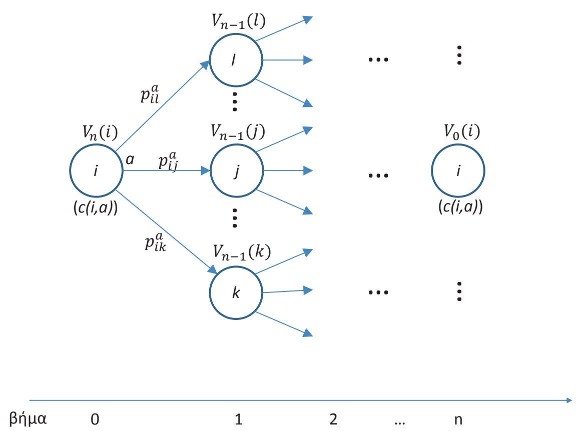
$$V_n(i) = \min_{a \in A} \left[c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a V_{n-1}(j) \right] \ , \ \text{για κάθε } n \geq 1, i \in S \tag{42}$$

και $V_0(i) = \min_{a \in A} c(i,a)$ για κάθε i.

Η απόφαση $a_n(i)$ που λαμβάνει η βέλτιστη πολιτική στην κατάσταση i, n μεταβάσεις πριν το τέλος, είναι το a που ελαχιστοποιεί το δεξί μέλος της (42), δηλαδή η $a_n(i)$ είναι η απόφαση a που ικανοποιεί

$$V_n(i) = c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a V_{n-1}(j) \ .$$

Αποδειξη. Θα αποδείξουμε την (42) αναδρομικά. Έστω ότι η τρέχουσα κατάσταση είναι η i. Για $n = 0$



Σχημα 10.

βρισκόμαστε στο τελευταίο βήμα του ορίζοντα και δεν θα υπάρξει επόμενη κατάσταση, άρα συσσωρεύεται μόνο το άμεσο κόστος $c(i,a)$ εάν ληφθεί η απόφαση a. Κατά συνέπεια η βέλτιστη απόφαση είναι αυτή που ελαχιστοποιεί το $c(i,a)$. Άρα $V_0(i) = \min_a c(i,a)$ και η βέλτιστη απόφαση $a_0(i)$ αυτή που ελαχιστοποιεί το $\min_a c(i,a)$.

Έστω ότι ισχύει για $n - 1 \geq 0$· θα δείξουμε ότι ισχύει για n. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι i. Εάν τύχει και μεταβούμε στο επόμενο βήμα στην j τότε από εκεί και μέχρι το τέλος του ορίζοντα απομένουν n βήματα, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την πολιτική που ελαχιστοποιεί το κριτήριο 41 για τον ορίζοντα n βημάτων. Άρα από το βήμα 1 μέχρι το n θα συσσωρευτεί μέσο συνολικό κόστος $V_{n-1}(j)$. Το συνολικό κόστος για τα $n+1$ βήματα θα είναι $c(i,a) + V_{n-1}(j)$. Η μετάβαση στην j θα συμβεί με πιθανότητα p_{ij}^a άρα το μέσο κόστος για όλες τις πιθανές καταστάσεις του πρώτου βήματος θα είναι

$$\sum_{j \in S} p_{ij}^a \left[c(i,a) + V_{n-1}(j) \right] = c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a V_{n-1}(j) \tag{43}$$

Η έκφραση αυτή εξαρτάται μόνο από την αρχική απόφαση a, άρα η βέλτιστη πολιτική για τον ορίζοντα $n+1$ βημάτων θα ικανοποιεί

$$V_n(i) = \min_{a \in A} \left[c(i,a) + \sum_{j \in S} p_{ij}^a V_{n-1}(j) \right]$$

και η βέλτιστη απόφαση θα είναι η a που ελαχιστοποιεί την τιμή (43) □

3. Μη φραγμένος χρονικός ορίζοντας

Όλα τα προβλήματα με τα οποία ασχοληθήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο υποθέτουν ότι ενδιαφερόμαστε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μέσα σε έναν προκαθορισμένο χρονικό ορίζοντα. Σε πολλές εφαρμογές όμως αυτή η υπόθεση μπορεί να είναι πολύ περιοριστική ή και μη ρεαλιστική. Για παράδειγμα, οι αποφάσεις που λαμβάνονται σε ορισμένες χρηματιστηριακές συναλλαγές δεν γίνονται με γνώμωνα το κέρδος σε ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα: μπορεί να είναι συμφέρει κάποιες αποφάσεις να παραταθούν για ένα απροσδιόριστο χρονικό διάστημα, π.χ., μέχρι η τιμή μιας μετοχής να αυξηθεί αρκετά.

Σε αυτή την παράγραφο θα θεωρήσουμε ένα κριτήριο κόστους που αφορά έναν χρονικό ορίζοντα απροσδιόριστα πολλών (ή και άπειρων) βημάτων. Επειδή το συνολικό κόστος που συσσωρεύεται μπορεί να είναι άπειρο, θα θεωρήσουμε ότι το άμεσο κόστος στο βήματος n υποτιμάται κατά ένα παράγοντα β^n, όπου β μια γνωστή σταθερά $0 < \beta < 1$. Σε ορισμένες οικονομικές εφαρμογές μια τέτοια υπόθεση είναι φυσική και δικαιολογείται από πληθωριστικά φαινόμενα. Εάν ο μηνιαίος πληθωρισμός είναι 0.1% η αξία ενός ευρώ σήμερα διατηρεί το 99.9% της αρχικής του αξίας μετά από ένα μήνα. Συνεπώς οι ονομαστικές αξίες (κόστη/ωφέλη) πρέπει να προσδιορίζονται χρονικά. Σε άλλες εφαρμογές μπορεί να μην υπάρχει μια παρόμοια φυσική ερμηνεία της υποτίμησης των αξιών και εκεί όμως πάλι μια τέτοια υπόθεση μπορεί να έχει έννοια, μιας και κάποια ωφέλη είναι προτιμότερο να προκύψουν νωρίτερα παρά αργότερα.

Ορισμος 14. Το **μέσο συνολικό υποτιμούμενο κόστος** με παράγοντα υποτίμησης β (με $0 < \beta < 1$) για την πολιτική $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots)$ όταν αρχίζει από την κατάσταση i είναι

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n, A_n) | X_0 = i\right], \tag{44}$$

όπου $A_n = \sigma_n(X_n, X_{n-1}, A_{n-1}, \ldots, X_0, A_0)$ για κάθε $n \geq 0$.

Παρατηρήστε ότι ο χρονικός ορίζοντας είναι άπειρος άρα δεν είναι δυνατή η κατασκευή του δέντρου απόφασης για μια πολιτική και ο υπολογισμός του μέσου συνολικού υποτιμούμενου κόστους που αυτή επιτυγχάνει. Εντούτοις, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε το κόστος για τις εξής απλές πολιτικές:

Ορισμος 15. Η πολιτική $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots)$ είναι **Μαρκοβιανή** εάν η απόφαση που λαμβάνει σε κάθε n είναι συνάρτηση μόνο της κατάστασης στο βήμα n, δηλαδή οι συναρτήσεις σ_n έχουν τη μορφή

$$\sigma_n(x_n, x_{n-1}, a_{n-1}, \ldots, x_0, a_0) = f(x_n),$$

για κάποια συνάρτηση $f : S \longrightarrow A$ και για κάθε $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0 \in S$ και $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in A$.

Παραδειγμα 43. *Θεωρήστε τις πολιτικές του Παραδείγματος 39. Η $\sigma^{(1)}$ είναι Μαρκοβιανή πολιτική αφού η απόφαση δεν εξαρτάται από το παρελθόν και το χρονικό βήμα. Μάλιστα,*

$$\sigma_n^{(1)}(x_n, x_{n-1}, a_{n-1}, \ldots, x_0, a_0) = f^{(1)}(x_n),$$

για τη συνάρτηση $f^{(1)}(x) = T$ για κάθε $x \in S$.

Η πολιτική $\sigma^{(2)}$ είναι και αυτή Μαρκοβιανή αφού πάλι η αποφάση στο βήμα n εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση. Εδώ

$$\sigma_n^{(2)}(x_n, x_{n-1}, a_{n-1}, \ldots, x_0, a_0) = f^{(2)}(x_n),$$

$$\text{για τη συνάρτηση } f^{(2)}(x) = \begin{cases} E, & \text{εάν } x = K \\ T, & \text{εάν } x = X \end{cases}$$

Η πολιτική $\sigma^{(3)}$ δεν είναι Μαρκοβιανή γιατί στην κατάσταση K μπορεί να αποφασιστεί T ή E ανάλογα με το εάν στο παρελθόν το αμάξι έχει μεταβεί στην κατάσταση X. Με άλλα λόγια, η τιμή της $\sigma_n^{(3)}(x_n, x_{n-1}, a_{n-1}, \ldots, x_0, a_0)$ εξαρτάται και από τις $x_{n-1}, \ldots, x_0$.

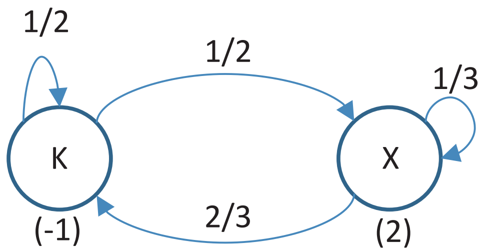
Γνωρίζουμε ότι οι πιθανότητες μετάβασης $(p_{ij}^a, j \in S)$ από μια κατάσταση i εξαρτώνται από την απόφαση a που θα ληφθεί. Για μια Μαρκοβιανή πολιτική η απόφαση που θα ληφθεί στην i είναι η $f(i)$, άρα οι πιθανότητες μετάβασης από την i είναι $(p_{ij}^{f(i)}, j \in S)$ και εξαρτώνται μόνο από την i. Άρα η ακολουθία καταστάσεων $X_0, X_1, X_2, \ldots$ είναι μια αλυσίδα Markov . Για αυτό το λόγο ονομάζονται 'Μαρκοβιανέσ'.

Παραδειγμα 44. *Στο Παράδειγμα 39 εάν εφαρμοστεί η πολιτική $\sigma^{(1)}$, η ακολουθία καταστάσεων είναι η αλυσίδα Markov με γράφημα μεταβάσεων που δίδεται από το Σχήμα 11. Απο κάτω από κάθε κατάσταση δίδεται το άμεσο κόστος (μη υποτιμημένο) για κάθε κατάσταση.*

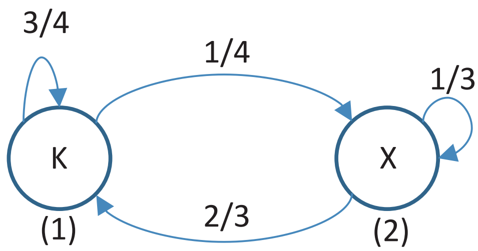
Στην πολιτική $\sigma^{(2)}$ αντιστοιχεί η αλυσίδα Markov του Σχήματος 12.

Ιδιοτητα 12. *Για τη Μαρκοβιανή πολιτική σ το μέσο συνολικό υποτιμούμενο κόστος $V_\sigma(i)$ εάν αρχίσει από οποιαδήποτε κατάσταση i ικανοποιεί*

$$V_\sigma(i) = c(i, f(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f(i)} V_\sigma(j), \text{ για κάθε } i \in S.$$



Σχημα 11.



Σχημα 12.

Αποδειξη. Έστω $X_0 = i$. Εάν η επόμενη κατάσταση είναι η j τότε το μέσο κόστος είναι

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n c(X_n, A_n)|X_1 = j, X_0 = i\right] &= c(i, f(i)) + \beta E\left[\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} c(X_n, A_n)|X_1 = j, X_0 = i\right] \\ &= c(i, f(i)) + \beta E\left[\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} c(X_n, A_n)|X_1 = j\right] \\ &= c(i, f(i)) + \beta E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \beta^{n} c(X_n, A_n)|X_0 = j\right] \\ &= c(i, f(i)) + \beta V_\sigma(j) \end{aligned}$$

Αθροίζοντας για όλες τις καταστάσεις j, αφού πολλαπλασιάσουμε με την πιθανότητα $p_{ij}^{f(i)}$ να συμβεί $X_1 = j$, λαμβάνουμε

$$V_\sigma(i) = c(i, f(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f(i)} V_\sigma(j) \,. \tag{45}$$

□

Παραδειγμα 45. *Εδώ θα υπολογίσουμε το μέσο συνολικό υποτιμούμενο κόστος με παράγοντα υποτίμησης $\beta = 1/2$ για την πολιτική $\sigma^{(1)}$ του Παραδείγματος 39 (βλ. επίσης Παράδειγμα 44).*

Θέτοντας $i = K$ και $i = X$ στην ισότητα (45) λαμβάνουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} V_{\sigma^{(1)}}(K) &= -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}V_{\sigma^{(1)}}(K) + \frac{1}{2}V_{\sigma^{(1)}}(X)\right) \\ V_{\sigma^{(1)}}(X) &= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}V_{\sigma^{(1)}}(K) + \frac{1}{3}V_{\sigma^{(1)}}(X)\right) \end{aligned}$$

όπου λύνοντας βρίσκουμε $V_{\sigma^{(1)}}(K) = -8/13$, $V_{\sigma^{(1)}}(X) = 28/13$.

3.1. Εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού για το κριτήριο του μέσου συνολικού υποτιμούμενου κόστους.

Ορισμος 16. Μια πολιτική είναι **βέλτιστη** (σύμφωνα με το κριτήριο του μέσου συνολικού υποτιμούμενου κόστους με παράγοντα υποτίμησης β) εάν το συνολικό μέσο υποτιμούμενο κόστος $V(i)$ που συσσωρεύει, αρχίζοντας από οποιαδήποτε κατάσταση i, ικανοποιεί

$$V(i) = \min_{\sigma\in\Pi} E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n c(X_n, A_n)|X_0 = i\right], \tag{46}$$

όπου για κάθε $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots) \in \Pi$ έχουμε $A_n = \sigma_n(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_0, A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0)$ για κάθε $n \geq 0$.

Η συνάρτηση $V(i)$ που δίνει το ελάχιστο δυνατό μέσο συνολικό υποτιμούμενο κόστος (με παράγοντα β) για κάθε αρχική κατάσταση i, είναι η **συνάρτηση αξίας** (για το κριτήριο (44)).

Όπως και στην περίπτωση του φραγμένου χρονικού ορίζοντα, κλειδί για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής είναι η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για την περίπτωση του κριτηρίου (44).

Θεωρημα 10. *Η συνάρτηση αξίας $V(i)$ ικανοποιεί την* **εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού**

$$V(i) = \min_{a\in A}\left[c(i,a) + \beta\sum_{j\in S} p_{ij}^a V(j)\right]. \tag{47}$$

Η βέλτιστη πολιτική είναι Μαρκοβιανή και η απόφαση $f(i)$ που λαμβάνει στην κατάσταση i είναι το a που ελαχιστοποιεί το δεξί μέλος της (47), δηλαδή η $f(i)$ είναι η απόφαση a που ικανοποιεί

$$V(i) = c(i,a) + \beta\sum_{j\in S} p_{ij}^a V(j).$$

Παραδειγμα 46. *Για το Παράδειγμα 38 η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για το κριτήριο του μέσου συνολικού υποτιμούμενου κόστος με παράγοντα υποτίμησης $\beta = 1/2$ είναι*

$$V(K) = \min\left\{-1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}V(K) + \frac{1}{2}V(X)\right), 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}V(K) + \frac{1}{4}V(X)\right)\right\}$$
$$V(X) = \min\left\{2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}V(K) + \frac{1}{3}V(X)\right), 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}V(K) + \frac{1}{3}V(X)\right)\right\}$$

Το Θεώρημα 10 εγγυάται ότι η βέλτιστη πολιτική είναι Μαρκοβιανή. Για να ελέγξουμε εάν η Μαρκοβιανή πολιτική $\sigma^{(1)}$ (βλ. Παράδειγμα 39) είναι βέλτιστη ελέγχουμε εάν το κόστος $V_{\sigma^{(1)}}(i)$ από κάθε κατάσταση i, ικανοποιεί την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού. Στο Παράδειγμα 45 βρήκαμε $V_{\sigma^{(1)}}(K) = -8/13$, $V_{\sigma^{(1)}}(X) = 28/13$ οι οποίες τιμές ικανοποιούν την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για $V(i) = V_{\sigma^{(1)}}(i), i = 1, 2$. Άρα η $\sigma^{(1)}$ είναι βέλτιστη.

Στο παράδειγμα μαντέψαμε ποιά μπορεί να είναι η βέλτιστη πολιτική και το επαληθεύσαμε ελέγχοντας αν ικανοποιείται η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού 47 για το κόστος της υποψήφιας πολιτικής. Μάλιστα εφόσον στην κατάσταση X και οι δύο αποφάσεις έχουν την ίδια επίπτωση, ουσιαστικά υπάρχουν μόνο δύο υποψήφιες Μαρκοβιανες πολιτικες, οι $\sigma^{(1)}$ και $\sigma^{(2)}$, τις οποίες θα μπορούσαμε να ελέγξουμε μία μία αν είναι βέλτιστη. Γενικότερα, ο αριθμός των Μαρκοβιανών πολιτικών είναι μεγάλος και δεν είναι δυνατόν εξαντλητικά να τις ελέγξουμε όλες. Στην επόμενη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε μια επαναληπτική μέθοδο για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής, με την οποία δεν είναι αναγκαίος ο έλεγχος όλων των Μαρκοβιανών πολιτικών.

3.2. Επίλυση εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο βελτίωσης πολιτικής. Το κλειδί της μεθόδου είναι η τεχνική της βελτίωσης μιας δοσμένης Μαρκοβιανής πολιτικής. Για μια δεδομένη Μαρκοβιανή πολιτική μέσω της βελτίωσης προκύπτει μια νέα επίσης Μαρκοβιανή πολιτική η οποία επιτυγχάνει μικρότερο κόστος (από κάθε αρχική κατάσταση) συγκρινόμενη με την αρχική πολιτική.

Θεωρημα 11 (Βελτίωση Μαρκοβιανής Πολιτικής). *Έστω η Μαρκοβιανή πολιτική $\sigma^{(0)}$. Για κάθε i, έστω $f^{(1)}(i)$ η απόφαση a που ελαχιστοποιεί την έκφραση*

$$c(i,a) + \beta\sum_{j\in S} p_{ij}^a V_{\sigma^{(0)}}(j).$$

Η τιμή της έκφρασης αυτής είναι το κόστος της μη Μαρκοβιανής πολιτικής η οποία εφαρμόζει την απόφαση a στο βήμα 0 και από εκεί και μετά ακολουθεί την $\sigma^{(0)}$.

Η Μαρκοβιανή πολιτική $\sigma^{(1)}$ η οποία λαμβάνει την απόφαση $f^{(1)}(i)$ στην κατάσταση i ικανοποιεί $V_{\sigma^{(1)}}(i) \leq V_{\sigma^{(0)}}(i)$ για κάθε i, δηλαδή είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο η $\sigma^{(0)}$. Επιπλέον, εάν $V_{\sigma^{(1)}}(i) = V_{\sigma^{(0)}}(i)$, δηλαδή δεν τη βελτιώνει, τότε η $\sigma^{(1)}$ είναι βέλτιστη.

Αποδειξη. Έστω $f^{(0)}(i)$ η απόφαση που λαμβάνει η $\sigma^{(0)}$ στην κατάσταση i. Από την Ιδιότητα 12 ισχύει

$$\begin{aligned} V_{\sigma^{(0)}}(i) &= c(i, f^{(0)}(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f^{(0)}(i)} V_{\sigma}(j) \\ &\geq c(i, f^{(1)}(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f^{(1)}} V_{\sigma^{(0)}}(j) \, , \end{aligned}$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από τον ορισμό της απόφασης $f^{(1)}(i)$. Άρα η (μη Μαρκοβιανή) πολιτική $\sigma' = (f^{(1)}, f^{(0)}, f^{(0)}, \ldots)$ βελτιώνει τη $\sigma^{(0)}$.

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\begin{aligned} V_{\sigma'}(i) &= c(i, f^{(1)}(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f^{(1)}} V_{\sigma^{(0)}}(j) \\ &\geq c(i, f^{(1)}(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f^{(1)}} V_{\sigma'}(j) \end{aligned}$$

αφού $V_{\sigma'}(j) \leq V_{\sigma^{(0)}}(j)$ για κάθε j. Όμως η έκφραση στο δεξί μέλος της ανισότητας είναι το κόστος της πολιτικής $\sigma'' = (f^{(1)}, f^{(1)}, f^{(0)}, \ldots)$ δηλαδή αυτή που λαμβάνει αποφάσεις στα δύο πρώτα βήματα βάσει της συνάρτησης $f^{(1)}(\cdot)$ και από εκεί και πέρα ακολουθεί την πολιτική $\sigma^{(0)}$. Οπότε για τις πολιτικές $\sigma^{(0)}, \sigma''$ έχουμε

$$V_{\sigma^{(0)}}(i) \geq V_{\sigma'}(i) \geq V_{\sigma''}(i) \, ,$$

για κάθε i. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο διαπιστώνουμε ότι η πολιτική που στα N πρώτα βήματα λαμβάνει αποφάσεις σύμφωνα με τη $f^{(1)}$ και έπειτα ακολουθεί τη $\sigma^{(0)}$, πάντα βελτιώνει τη $\sigma^{(0)}$. Όμως για μεγάλο N η πρώτη πολιτική επιτυγχάνει το ίδιο κόστος με αυτό της πολιτικής που χρησιμοποιεί συνέχεια τη $f^{(1)}$, δηλαδή την $\sigma^{(1)}$. Άρα και η $\sigma^{(1)}$ βελτιώνει τη $\sigma^{(0)}$.

Τώρα εάν $V_{\sigma^{(1)}}(i) = V_{\sigma^{(0)}}(i)$ για κάθε i, ισχύει

$$\begin{aligned} V_{\sigma^{(1)}}(i) &= c(i, f^{(1)}(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f^{(1)}(i)} V_{\sigma^{(1)}}(j) \\ &= c(i, f^{(1)}(i)) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{f^{(1)}(i)} V_{\sigma^{(0)}}(j) \\ &= \min_{a \in A} \left[c(i, a) + \beta \sum_{j \in S} p_{ij}^{a} V_{\sigma^{(1)}}(j) \right] \, , \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της απόφασης $f^{(1)}(i)$. Άρα το κόστος της πολιτικής $\sigma^{(1)}$ ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας και για αυτό είναι βέλτιστη. □

Η μέθοδος εύρεσης βέλτιστης πολιτικής είναι η εξής:

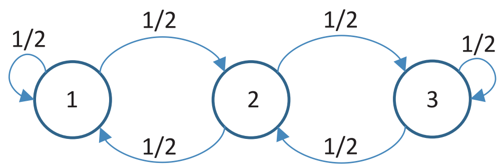
(1) Θεωρούμε οποιαδήποτε Μαρκοβιανή πολιτική $\sigma^{(0)}$ και υπολογίζουμε το κόστος $V_{\sigma^{(0)}}(i)$ από οποιαδήποτε κατάσταση i.
(2) Βελτιώνουμε τη $\sigma^{(0)}$ κατασκευάζοντας μια νέα Μαρκοβιανή πολιτική $\sigma^{(1)}$ σύμφωνα με το Θεώρημα 11.
(3) Εάν δεν υπάρχει βελτίωση, δηλαδή έχουν το ίδιο κόστος από κάθε κατάσταση, τότε η βέλτιστη πολιτική είναι η $\sigma^{(1)}$ και σταματάμε. Αλλιώς, συνεχίζουμε από το βήμα (1) χρησιμοποιώντας τη $\sigma^{(1)}$ στη θέση της $\sigma^{(0)}$.

Παραδειγμα 47. *Έστω ότι η τιμή μιας μετοχής μεταβάλλεται κάθε λεπτό μεταξύ των τιμών* $1, 2, 3$ *σύμφωνα με την αλυσίδα Markov στο Σχήμα 13. Εάν κατέχουμε μια μετοχή, πρέπει να αποφασίσουμε πότε να την πουλήσουμε (στην τρέχουσα τιμή της) έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος πώλησης. Άρα οι διαθέσιμες αποφάσεις είναι οι 'πουλάω' (Π), 'δεν πουλάω' (Δ). Εφόσον σταματάμε όταν πουλήσουμε την μετοχή, εισάγουμε την πλασματική κατάσταση 'τέλος' (Τ) έτσι ώστε όταν πουλήσουμε να μεταβούμε στην Τ. Στην Τ το άμεσο κόστος είναι 0 και μεταβαίνουμε πάλι στην Τ, ανεξάρτητα από την απόφασή μας. Άρα ουσιαστικά σταματάει να συσσωρεύεται κόστος όταν επισκεφτούμε την Τ μετά την πώληση.*

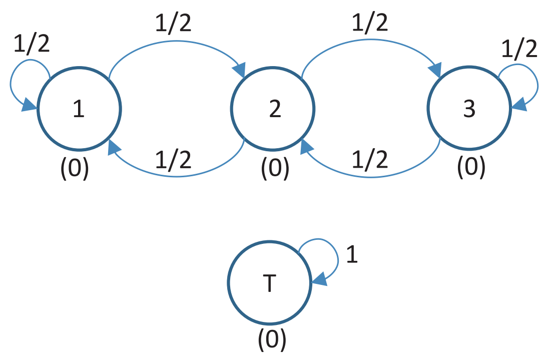
Οι πιθανότητες μετάβασης για την απόφαση Δ δίδονται στο Σχήμα 14 και αυτές για την απόφαση Π στο Σχήμα 15.

Κάτω από κάθε κατάσταση δίδεται το κόστος για την αντίστοιχη απόφαση. Όσο δεν υπάρχει πώληση το άμεσο κόστος είναι 0, ενώ η πώληση στην τιμή i *επιφέρει κόστος* $-i$ *(δηλαδή, κέρδος* i*).*

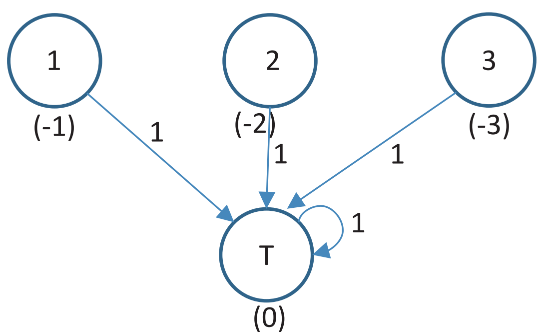
Το κριτήριο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το συνολικό μέσο υποτιμούμενο κόστος με παράγοντα υποτίμησης $\beta = 3/4$.



Σχημα 13.



Σχημα 14.



Σχημα 15.

Αρχίζουμε με τη Μαρκοβιανή πολιτική $\sigma^{(0)}$ *όπου ποτέ δεν πουλάμε, άρα αναμένουμε* $V_{\sigma^{(0)}}(i)$*=0 για κάθε* i*. Το κόστος της* $\sigma^{(0)}$ *σύμφωνα με την Ιδιότητα 12 ικανοποιεί τις εξισώσεις*

$$V_{\sigma^{(0)}}(1) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}V_{\sigma^{(0)}}(1) + \frac{1}{2}V_{\sigma^{(0)}}(2)\right)$$
$$V_{\sigma^{(0)}}(2) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}V_{\sigma^{(0)}}(1) + \frac{1}{2}V_{\sigma^{(0)}}(3)\right)$$
$$V_{\sigma^{(0)}}(3) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}V_{\sigma^{(0)}}(2) + \frac{1}{2}V_{\sigma^{(0)}}(3)\right)$$
$$V_{\sigma^{(0)}}(T) = \frac{3}{4}V_{\sigma^{(0)}}(T)$$

όπου λύνοντας βρίσκουμε $V_{\sigma^{(0)}}(i) = 0$ *για κάθε* i*.*

Στην κατάσταση 1 εάν στο πρώτο βήμα μόνο εφαρμόζαμε την απόφαση Π και έπειτα τη $\sigma^{(0)}$ θα προέκυπτε κόστος

$$-1+\frac{3}{4}V_{\sigma^{(0)}}(T)=-1<V_{\sigma^{(0)}}(1)$$

μικρότερο δηλαδή από την εφαρμογή της Δ στο πρώτο βήμα. Άρα στην βελτιωμένη πολιτική $\sigma^{(1)}$ θα έχουμε $f^{(1)}(1)=P$. Παρατηρούμε ότι και στις άλλες καταστάσεις είναι καλύτερο στο πρώτο βήμα να αποφασιστεί Π. Άρα η $\sigma^{(1)}$ ικανοποιεί $f^{(1)}(i)=P$.

Γράφουμε τις εξισώσεις για τον προσδιορισμό του κόστους για τη $\sigma^{(1)}$:

$$\begin{aligned}
V_{\sigma^{(1)}}(1)&=-1+\frac{3}{4}V_{\sigma^{(1)}}(T)\\
V_{\sigma^{(1)}}(2)&=-2+\frac{3}{4}V_{\sigma^{(1)}}(T)\\
V_{\sigma^{(1)}}(3)&=-3+\frac{3}{4}V_{\sigma^{(1)}}(T)\\
V_{\sigma^{(1)}}(T)&=\frac{3}{4}V_{\sigma^{(1)}}(T)\,,
\end{aligned}$$

όπου λύνοντας βρίσκουμε $V_{\sigma^{(1)}}(i)=-i$ για $i=1,2,3$ και $V_{\sigma^{(1)}}(T)=0$. Τώρα στην κατάσταση 1 η απόφαση Δ στο πρώτο βήμα και έπειτα η πολιτική $\sigma^{(1)}$ επιφέρει κόστος ίσο με

$$0+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(-2)\right)=-\frac{9}{8}$$

το οποίο είναι μικρότερο από -1 που είναι το κόστος εφαρμογής της Π στο πρώτο μόνο βήμα. Άρα η βελτιωμένη πολιτική $f^{(2)}$ που θα θεωρήσουμε έχει $f^{(2)}(1)=\Delta$. Στην κατάσταση 2 εάν $a=\Pi$ (στο πρώτο βήμα πάντα) κοστίζει -2 ενώ η $a=\Delta$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(-3)\right)=-\frac{3}{2}>-2\,,$$

άρα $f^{(2)}(2)=\Pi$. Στην κατάσταση 3 εάν $a=\Pi$ κοστίζει -3 ενώ η $a=\Delta$ κοστίζει

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}(-2)+\frac{1}{2}(-3)\right)=-\frac{15}{8}>-3\,,$$

άρα $f^{(2)}(3)=\Pi$.

Το κόστος της $\sigma^{(2)}$ ικανοποιεί

$$\begin{aligned}
V_{\sigma^{(2)}}(1)&=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}V_{\sigma^{(2)}}(1)+\frac{1}{2}V_{\sigma^{(2)}}(2)\right)\\
V_{\sigma^{(2)}}(2)&=-2+\frac{3}{4}V_{\sigma^{(2)}}(T)\\
V_{\sigma^{(2)}}(3)&=-3+\frac{3}{4}V_{\sigma^{(2)}}(T)\\
V_{\sigma^{(2)}}(T)&=\frac{3}{4}V_{\sigma^{(2)}}(T)
\end{aligned}$$

όπου λύνοντας βρίσκουμε $V_{\sigma^{(2)}}(1)=-6/5$, $V_{\sigma^{(2)}}(2)=-2$, $V_{\sigma^{(2)}}(3)=-3$, $V_{\sigma^{(2)}}(T)=0$.

Στην κατάσταση 1 εάν $a=\Delta$ δημιουργείται κόστος -6/5 ενώ εάν $a=\Pi$ κόστος -1. Άρα $f^{(3)}(1)=\Delta$. Στην κατάσταση 2 εάν $a=\Pi$ προκύπτει κόστος -2 ενώ εάν $a=\Delta$ κόστος

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-6}{5}+\frac{1}{2}(-3)\right)=-\frac{63}{40}\,,$$

άρα $f^{(3)}(2)=\Pi$. Στην κατάσταση 3 εάν $a=\Pi$ προκύπτει κόστος -3 ενώ εάν $a=\Delta$ κόστος

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}(-2)+\frac{1}{2}(-3)\right)=-\frac{15}{8}>-3\,,$$

άρα $f^{(3)}(3)=\Pi$.

Η νέα πολιτική $\sigma^{(3)}$ είναι ίδια με τη $\sigma^{(2)}$, άρα δεν υπάρχει βελτίωση και η $\sigma^{(2)}$ είναι βέλτιστη, από το Θεώρημα 11.

Άρα η βέλτιστη πολιτική είναι να μην πουλήσουμε για τιμή μετοχής 1 και να πουλήσουμε στις άλλες τιμές.

3.3. Εξίσωση Δυναμικού Προγραμματισμού για το κριτήριο του χρονικού μέσου κόστους. Σε πολλές εφαρμογές το κριτήριο του υποτιμούμενου κόστους δεν έχει πρακτική σημασία ή χρησιμότητα. Για παράδειγμα, ένας αλγόριθμος διαχείρισης της κρυφής (cache) μνήμης ενός Η/Υ στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της συχνότητας που πρέπει ο επεξεργαστής να προστρέξει στην κύρια μνήμη. Στην περίπτωση αυτή, σημασία έχει το πλήθος των αποτυχημένων αναζητήσεων στην κρυφή μνήμη (cache miss) σε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα.

Αυτό μας παρακινεί να θεωρήσουμε το κριτήριο του **χρονικού μέσου κόστους**:

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} c(X_n, A_n)\right] . \tag{48}$$

Το κριτήριο αυτό σχετίζεται με το κριτήριο του μέσου συνολικού υποτιμούμενου κόστους για τιμές του συντελεστή υποτίμησης κοντά στη μονάδα: για οποιαδήποτε ακολουθία πραγματικών αριθμών $c_0, c_1, \ldots$ ισχύει η εξής ιδιότητα:

$$\begin{aligned}\lim_N \frac{\sum_{n=0}^{N-1} c_n}{N} &= \lim_N \lim_{\beta\uparrow 1} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \beta^n c_n}{\sum_{n=0}^{N-1}\beta^n} \\ &= \lim_{\beta\uparrow 1} \lim_N \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \beta^n c_n}{\sum_{n=0}^{N-1}\beta^n} \\ &= \lim_{\beta\uparrow 1}(1-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n c_n ,\end{aligned} \tag{49}$$

όποτε τα όρια υπάρχουν. Συνεπώς τα δύο κριτήρια είναι ισοδύναμα για συντελεστή υποτίμησης κοντά στη μονάδα. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την παρατήρηση ως εξής: για την εύρεση της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το μέσο χρονικό κόστος (48) λύνουμε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού (47) για το κριτήριο του υποτιμούμενου κόστους. Η σειρά των παραπάνω ισοτήτων για την ακολουθία $c_n = E\left[c(X_n, A_n)\right], n = 1, 2, \ldots$ υποδεικνύει ότι η βέλτιστη πολιτική ως προς το κριτήριο του υποτιμούμενου κόστους, επιτυγχάνει μικρές τιμές για το μέσο χρονικό κόστος. Άρα, έτσι μπορούμε να βρούμε πολιτικές που είναι 'σχεδόν' βέλτιστες ως προς το κριτήριο του μέσου χρονικού κόστους.

Όμως είναι δυνατόν να βρούμε τις βέλτιστες πολιτικές και όχι 'σχεδόν' βέλτιστες; Μπορούμε να βρούμε μια εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού που αυτές ικανοποιούν, όπως κάναμε με τα προηγούμενα κριτήρια; Η απάντηση είναι ναι.

Η ιδέα είναι να βρούμε μια εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για την περίπτωση '$\beta = 1$' στην (47). Βέβαια, δε μπορούμε απλά να θέσουμε $\beta = 1$ αφού η συνάρτηση αξίας $V(i)$ (βλ. (46)) ενδέχεται να απειρίζεται. Όμως, οι διαφορές $V(i) - V(j)$ ίσως ήταν πεπερασμένες.

Πιο συγκεκριμένα, εάν $V_\beta(\cdot)$ είναι η συνάρτηση αξίας για το κριτήριο του υποτιμούμενου κόστους με συντελεστή υποτίμησης $\beta < 1$ και $i_0 \in S$ μια οποιαδήποτε κατάσταση, εφόσον η $V_\beta(i)$ ικανοποιεί την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού (47), έχουμε

$$\begin{aligned}V_\beta(i) - V_\beta(i_0) &= \min_{a\in A}\left[c(i,a) + \beta\sum_{j\in S} p_{ij}^a V_\beta(j)\right] - V_\beta(i_0) \\ &= \min_{a\in A}\left[c(i,a) + \beta\sum_{j\in S} p_{ij}^a V(j) - \beta\sum_{j\in S} p_{ij}^a V_\beta(i_0)\right] - (1-\beta)V_\beta(i_0) \\ &= \min_{a\in A}\left[c(i,a) + \beta\sum_{j\in S} p_{ij}^a \left[V_\beta(j) - V_\beta(i_0)\right]\right] - (1-\beta)V_\beta(i_0) ,\end{aligned} \tag{50}$$

Αν υποθέσουμε ότι το όριο

$$\lim_{\beta\uparrow 1}\left[V_\beta(i) - V_\beta(i_0)\right] = h(i) \tag{51}$$

υπάρχει για κάθε i, τότε λαμβάνοντας το όριο $\beta \uparrow 1$ στην πρώτο και τελευταίο μέλος της (50), έχουμε

$$h(i) = \min_{a\in A}\left[c(i,a) + \sum_{j\in S} p_{ij}^a h(j)\right] - \lim_{\beta\uparrow 1}(1-\beta)V_\beta(i) , i \in S .$$

Ας αναλύσουμε τον τελευταίο όρο περισσότερο:

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\uparrow 1}(1-\beta)V_\beta(i) &= \lim_{\beta\uparrow 1}(1-\beta)E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n c(X_n,A_n)|X_0=i\right]\\ &= \lim_{\beta\uparrow 1}(1-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n E\left[c(X_n,A_n)|X_0=i\right]\\ &= \lim_{N}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}E\left[c(X_n,A_n)|X_0=i\right]\\ &= \lim_{N}E\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}c(X_n,A_n)|X_0=i\right],\end{aligned} \tag{52}$$

όπου κάναμε χρήση της (49). Τώρα, στο τελευταίο μέλος εμφανίζεται το μέσο χρονικό κόστος για την βέλτιστη πολιτική. Άρα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεωρημα 12. *Η βέλτιστη πολιτική για το κριτήριο του μέσου χρονικού κόστους (48) προκύπτει λύνοντας την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού*

$$h(i)+\gamma=\min_{a\in A}\left[c(i,a)+\sum_{j\in S}p_{ij}^a h(j)\right], i\in S\,. \tag{53}$$

Η βέλτιστη πολιτική είναι Μαρκοβιανή και η απόφαση που λαμβάνει στην κατάσταση i είναι η $a\in A$ που ελαχιστοποιεί το δεξί μέλος της (53), δηλαδή η a που ικανοποιεί

$$h(i)+\gamma=c(i,a)+\sum_{j\in S}p_{ij}^a h(j)\,.$$

Παρατηρήστε ότι οι εξισώσεις (53) είναι κατά ένα λιγότερες από ότι οι άγνωστοι $h(i), i\in S, \gamma$. Εντούτοις, ξέρουμε $h(i_0)=0$, άρα περιμένουμε οι εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού να έχουν μοναδική λύση.

Παραδειγμα 48. *Στο Παράδειγμα 37, ας θεωρήσουμε ότι είμαστε οι ιδιοκτήτες του αυτοκινήτου, οπότε πρόκειται να το λειτουργήσουμε για πάρα πολλές ημέρες. Ας βρούμε την πολιτική που ελαχιστοποιεί το μέσο χρονικό κόστος.*

Σκοπός μας είναι η λύση της εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού, που εδώ είναι:

$$\begin{cases} h(K)+\gamma=\min\left[1+\frac{3}{4}h(K)+\frac{1}{4}h(X), -1+\frac{1}{2}h(K)+\frac{1}{2}h(X)\right]\\ h(X)+\gamma=2+\frac{1}{3}h(X)+\frac{2}{3}h(K)\end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο βελτίωσης πολιτικής που χρησιμοποιήσαμε για το κριτήριο του υποτιμούμενου κόστους.

1η επανάληψη: *Αυθαίρετα, αρχίζουμε με την Μαρκοβιανή πολιτική όπου κάνουμε έλεγχο (απόφαση E) στην K και τίποτα (T) στην X. Δοκιμάζουμε εάν αυτή η πολιτική επιλύει την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού, οπότε επιλύουμε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων:*

$$\begin{cases} h(K)+\gamma=1+\frac{3}{4}h(K)+\frac{1}{4}h(X)\\ h(X)+\gamma=2+\frac{1}{3}h(X)+\frac{2}{3}h(K)\end{cases}$$

Έχουμε έναν παραπάνω άγνωστο από τις εξισώσεις, οπότε θέτουμε αυθαίρετα το $h(K)$ ή $h(X)$ ίσο με μηδέν, έστω το $h(X)$. (Αυτό αντιστοιχεί στο να είχαμε επιλέξει $i_0=X$ στην (51).) Λύνοντας βρίσκουμε $h(K)=-12/11, \gamma=14/11$.

Οπότε για την κατάσταση K,

$$1+\frac{3}{4}h(K)+\frac{1}{4}h(X)=\frac{2}{11}>-1+\frac{1}{2}h(K)+\frac{1}{2}h(X)=-\frac{17}{11}\,,$$

άρα η πολιτική που επιλέξαμε δεν είναι βέλτιστη.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τη βελτιωμένη πολιτική που στην κατάσταση K λαμβάνεται η απόφαση που έδωσε τη μικρότερη τιμή στο δεξί μέλος, δηλαδή η T. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, στην κατάσταση X και οι δύο αποφάσεις έχουν το ίδιο αποτέλεσμα, οπότε επιλέγουμε την T και εκεί.

2η επανάληψη: *Το γραμμικό σύστημα που επιλύουμε είναι:*

$$\begin{cases} h(K) + \gamma = -1 + \frac{1}{2}h(K) + \frac{1}{2}h(X) \\ h(X) + \gamma = 2 + \frac{1}{3}h(X) + \frac{2}{3}h(K) \end{cases}$$

Θέτοντας $h(X) = 0$, *λαμβάνουμε* $h(K) = -18/7, \gamma = 2/7$.

Για την κατάσταση K *έχουμε*

$$1 + \frac{3}{4}h(K) + \frac{1}{4}h(X) = -\frac{13}{14} > -1 + \frac{1}{2}h(K) + \frac{1}{2}h(X) = -\frac{16}{7}\ ,$$

άρα τα $h(K) = -18/7, h(X) = 0, \gamma = 2/7$ *είναι λύση της εξίσωσης δυναμικού προγραμματισμού* (48) *και η πολιτική που δεν κάνουμε έλεγχο στην κατάσταση* K *ελαχιστοποιεί το μέσο χρονικό κόστος,*