

Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας, Τελική Εξέταση, Ιανουάριος 2020.

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες.

1ο Θέμα

α) (1 μονάδα) Θεωρήστε ένα οποιοδήποτε ζεύγος πρωτεύοντος-δ्वιικού, με βέλτιστες λύσεις $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ και $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι αν για την λύση x^* η πρώτη ανισότητα, έστω $\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \leq b_1$, ικανοποιείται με $<$, τότε αν την αντικαταστήσουμε με την $\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \leq b_1 + 100$ η βέλτιστη τιμή του πρωτεύοντος και του δ्वιικού δεν αλλάζουν.

β) (0.5+1+0.5 μονάδες) Φτιάχνετε χαρταετούς τριών ειδών, τριγωνικούς, εξαγωνικούς και τύπου παρά πέντε, τους οποίους πουλάτε 2, 5 και 7 ευρώ τον καθένα, αντίστοιχα. Για κάθε χαρταετό χρειάζεστε πανί, πλαστικά κοντάρια για τη στήριξη και σπάγγους. Τι ακριβώς χρειάζεστε για κάθε χαρταετό φαίνεται στο πίνακα.

	Πανί	Πλαστικά	Σπάγγος
Τριγωνικός	4 τ.μ.	3 μ.	2 μ.
Εξαγωνικός	5 τ.μ.	4 μ.	1 μ.
Τύπου παρά πέντε	7 τ.μ.	0 μ.	4 μ.

Η διαθεσιμότητα σε πανί είναι 80 τ.μ., σε πλαστικά κοντάρια 40 μ. και σε σπάγγο 26 μ.

1. Γράψτε ένα γραμμικό πρόγραμμα που μεγιστοποιεί τα έσοδά σας και δώστε και το δ्वιικό του.
(Οι χαρταετοί που φτιάχνονται σίγουρα πωλούνται και η βέλτιστη λύση του γ.π. είναι ακέραια.)
2. Με χρήση των συνθηκών συμπληρωματικής χαλαρότητας, δείξτε ότι σε μια βέλτιστη λύση καταναλώνετε όλα τα πλαστικά και τον σπάγγο και δεν φτιάχνετε καθόλου τριγωνικούς χαρταετούς.
3. Αν αυτή είναι η μοναδική βέλτιστη λύση, τι τιμές θα είχε στο ταμπλώ του *Simplex* η γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης;

2ο Θέμα

α) (1,5 μονάδες) Ο Αντρέας, η Βάσω και ο Γιώργος θα ετοιμάσουν μεγάλη ποσότητα φαγητού για μια συλλογική κουζίνα. Για το φαγητό θα χρειαστούν 5 κιλά φασόλια, 10 κιλά χόρτα και 3 κιλά ψάρι τα οποία και θα προμηθευτούν από μαγαζιά της γειτονιάς τους και θα μεταφέρουν στο χώρο παρασκευής του φαγητού. Καθένας τους μπορεί να μεταφέρει μέχρι 6 κιλά συνολικά. Τα κόστη (σε ευρώ) ανά κιλό για κάθε ζεύγος προϊόν-γειτονιά δίνονται από τον πίνακα

	Φασόλια	Χόρτα	Ψάρι
Γειτονιά Αντρέα	3	2	7
Γειτονιά Βάσως	2	4	4
Γειτονιά Γιώργου	1	1	5

Δεδομένου ότι πρέπει να φτιάξουν το φαγητό, αν ελαχιστοποιούν το κόστος τι πρέπει να αγοράσει ο καθένας τους και σε τι ποσότητα; Πόσο είναι τότε το ελάχιστο κόστος; Τι αλλάζει αν δεν πρέπει κανείς να ξοδέψει παραπάνω από 10 ευρώ;

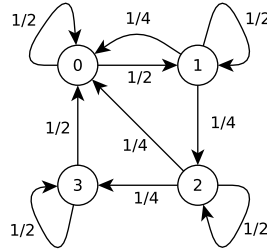
β) (0,5+1 μονάδες) Για ένα πρόβλημα ανάθεσης n ατόμων σε n εργασίες με μη αρνητικά κόστη:

1. Κατασκευάστε-περιγράψτε έναν πίνακα κόστους στον οποίο η ελαχίστου κόστους ανάθεση έχει κόστος 0, χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερα μηδενικά. Γιατί δεν γίνεται με λιγότερα μηδενικά;
2. Κατασκευάστε-περιγράψτε έναν πίνακα κόστους στον οποίο η ελαχίστου κόστους ανάθεση έχει κόστος αυστηρά θετικό, χρησιμοποιώντας όσο περισσότερα μηδενικά μπορείτε. (Γιατί όχι περισσότερα μηδενικά;)

3ο Θέμα

α) (1 μονάδα) Υποθέστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα 4 καταστάσεων ($S = \{0, 1, 2, 3\}$) στην οποία προσθέτουμε μια νέα κατάσταση, την 4, από την οποία με ίση πιθανότητα μεταφερόμαστε σε κάθε μια από τις τέσσερις καταστάσεις. Αν αρχικά ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων από κάθε κατάσταση προς την 0 δινόταν από το $(T_{10}, T_{20}, T_{30}) = (2, 3, 5)$, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων από κάθε κατάσταση προς την 0 στην καινούρια αλυσίδα; (Προσπαθείστε η απόδειξή σας να είναι αρκετά 'μαθηματική'.)

β) (1+0,25+0,25 μονάδες) Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα του σχήματος,



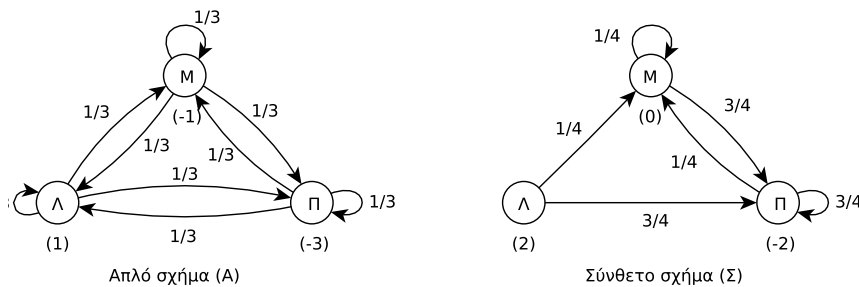
1. Με πόση πιθανότητα μετά από 5 βήματα βρισκόμαστε στην κατάσταση 1 (i) ξεκινώντας από την κατάσταση 2 και (ii) ξεκινώντας από την κατάσταση 3; Χρησιμοποιείτε ότι μετά από 4 βήματα η πιθανότητα να βρεθούμε στην κατάσταση 1 ξεκινώντας από το αντίστοιχο X_0 δίνεται από τον πίνακα

	$X_0 = 0$	$X_0 = 1$	$X_0 = 2$	$X_0 = 3$
$X_4 = 1$	25/64	22/64	21/64	26/64

2. Ποια η πιθανότητα ξεκινώντας από την κατάσταση 2 κάποτε να βρεθούμε στην κατάσταση 1;
3. Μπορεί το διάνυσμα $\pi = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ να περιγράφει τη στάσιμη κατανομή της αλυσίδας;

4ο Θέμα

(1+1,5 μονάδες) Ένας συνθέτης θέλει να παρουσιάσει την δουλειά του στο κοινό κι έχει να επιλέξει αν θα χρησιμοποιήσει ένα απλό σχήμα 5 καλλιτεχνών ή ένα πιο σύνθετο 11 καλλιτεχνών. Ανάλογα με την επιλογή του, Α(πλό) ή Σ(ύνθετο), επηρεάζονται τα έξοδα της παράστασης αλλά επηρεάζεται και η ποιότητα της παράστασης και το πόσο κόσμος θα έρθει στην επόμενη παράσταση. Σε ένα αφαιρετικό μοντέλο το κόστος του συνθέτη ανάλογα με την επιλογή του και τον κόσμο στην παράσταση (Π(ολύς), Μ(έτριος), Λ(ίγος)) δίνονται από την ακόλουθη Μαρκοβιανή αλυσίδα αποφάσεων



1. Αν η πρώτη παράσταση γνωρίζουμε ότι θα είναι μέτρια σε κόσμος, ποια είναι η πολιτική που ελαχιστοποιεί το κόστος του συνθέτη αν θα δωθούν συνολικά 3 παραστάσεις; Αν τελικά οι παραστάσεις αποδείχθηκαν όλες μέτριες, ποιο ήταν το συνολικό κόστος του συνθέτη (υπό αυτή την πολιτική);
2. Βρείτε την βέλτιστη πολιτική σε μη φραγμένο ορίζοντα για το κριτήριο του αναμενόμενου μέσου κόστους. Πόσο είναι το βέλτιστο αναμενόμενο μέσο κόστος; (Πάρτε δεδομένο ότι για την Λ και την Μ η βέλτιστη λύση επιλέγει Σ.)