

Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας, Τελική Εξέταση, Σεπτέμβρης 2020.

Διάρκεια Εξέτασης: $1\frac{2}{3}$ ώρες.

1ο Θέμα

α) (1 μονάδα) Δώστε 5 λόγους γιατί δεν μπορεί το παρακάτω ταμπλώ να είναι το τελικό ταμπλώ του αλγόριθμου *Simplex* 'τρεγμένου' σε γραμμικό πρόγραμμα με 3 ανισοτικούς περιορισμούς που μεγιστοποιεί την $2x_1 + 3x_2 + x_3$.

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	z_3	ct
0	-1	2	0	0	1	6
1	4	0	3	0	2	-2
0	-3	0	1	1	-4	1
0	2	1	-2	0	1	3

β) (1 μονάδα) Δίνεται το γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Γράψτε το δυϊκό του και με χρήση των συνθηκών συμπληρωματικής χαλαρότητας δείξτε ότι η λύση $(x_1, x_2) = (2, 6)$ είναι μια βέλτιστη λύση του.

2ο Θέμα

α) (1,5 μονάδες) Ο Αντρέας, η Βάσω και ο Γιώργος θα ετοιμάσουν μεγάλη ποσότητα φαγητού για μια συλλογική κουζίνα. Για το φαγητό θα χρειαστούν 5 κιλά φασόλια, 10 κιλά χόρτα και 3 κιλά ψάρι τα οποία και θα προμηθευτούν από μαγαζιά της γειτονιάς τους και θα μεταφέρουν στο χώρο παρασκευής του φαγητού. Καθένας τους μπορεί να μεταφέρει μέχρι 6 κιλά συνολικά. Τα κόστη (σε ευρώ) ανά κιλό για κάθε ζεύγος προϊόν-γειτονιά δίνονται από τον πίνακα

	Φασόλια	Χόρτα	Ψάρι
Γειτονιά Αντρέα	3	2	7
Γειτονιά Βάσως	2	4	4
Γειτονιά Γιώργου	1	1	5

Δεδομένου ότι πρέπει να φτιάξουν το φαγητό, αν ελαχιστοποιούν το κόστος τι πρέπει να αγοράσει ο καθένας τους και σε τι ποσότητα;

(Ξεκινήστε από αρχική ανάθεση-δέντρο που σας μοιάζει βολική, χωρίς χρήση του κανόνα ΒΔ γωνίας.)

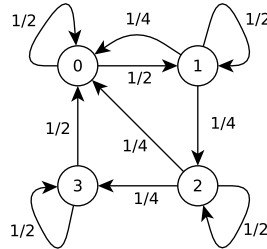
β) (1,5 μονάδες) Τα 2 ξαδερφάκια σας θέλουν να βοηθήσουν να καθαρίσετε το σπίτι. Δεν θέλετε να τα κουράσετε, θέλετε απλά να αναθέσετε 2 δουλειές στο καθένα. Ο πίνακας δίνει τους αντίστοιχους χρόνους για τα ζεύγη (ξαδερφάκι,εργασία). Τι θα αναθέσετε και σε ποιό ξαδερφάκι αν θέλετε να ελαχιστοποιήσετε το συνολικό χρόνο που θα χρειαστούν για να κάνουν τις δουλειές;

	Πλύσιμο πιάτων	Σκούπισμα σαλονιού	Πετάγμα σκουπιδιών	Ξεσκόνισμα βιβλιοθήκης
Ανέστης	3 λεπτά	2 λεπτά	5 λεπτά	4 λεπτά
Γιώτα	2 λεπτά	4 λεπτά	3 λεπτά	2 λεπτά

3ο Θέμα

α) (1 μονάδα) Υποθέστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα 4 καταστάσεων ($S = \{0, 1, 2, 3\}$) στην οποία προσθέτουμε μια νέα κατάσταση, την 4, από την οποία με ίση πιθανότητα μεταφερόμαστε σε κάθε μια από τις τέσσερις καταστάσεις. Αν αρχικά η στάσιμη κατανομή είναι η $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ ποια είναι η νέα στάσιμη κατανομή; Υπάρχουν μεταβατικές καταστάσεις (πριν και μετά); (Προσπαθείστε η απόδειξή σας να είναι 'μαθηματική'.)

β) (1+0,25+0,75 μονάδες) Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα του σχήματος,



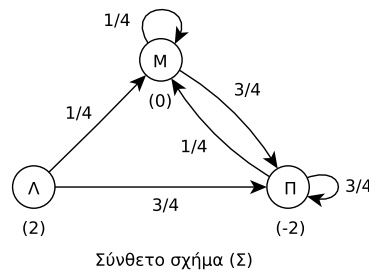
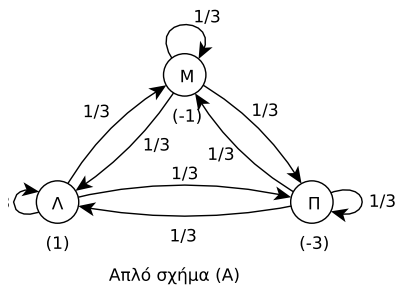
1. Με πόση πιθανότητα στα πρώτα 5 βήματα θα περάσουμε από την κατάσταση 1 (i) ξεκινώντας από την κατάσταση 2 και (ii) ξεκινώντας από την κατάσταση 3; Χρησιμοποιείστε ότι στα πρώτα 4 βήματα θα περάσουμε από την κατάσταση 1 ξεκινώντας από το αντίστοιχο X_0 με πιθανότητες που δίνονται από τον πίνακα

	$X_0 = 0$	$X_0 = 1$	$X_0 = 2$	$X_0 = 3$
$X_0 \text{ ή } \dots \text{ ή } X_4 = 1$	30/32	1	16/32	22/32

2. Ποια η πιθανότητα ξεκινώντας από την κατάσταση 2 κάποτε να βρεθούμε στην κατάσταση 1;
3. Μπορεί το διάνυσμα $(T_{10}, T_{20}, T_{30}) = (2, 3, 5)$ να περιγράφει τον αναμενόμενο αριθμό βημάτων από τη κάθε κατάσταση στην κατάσταση 0;

4ο Θέμα

Ένας συνθέτης θέλει να παρουσιάσει την δουλειά του στο κοινό κι έχει να επιλέξει αν θα χρησιμοποιήσει ένα απλό σχήμα 5 καλλιτεχνών ή ένα πιο σύνθετο 11 καλλιτεχνών. Ανάλογα με την επιλογή του, Α(πλό) ή Σ(ύνθετο), επηρεάζονται τα έξοδα της παράστασης αλλά επηρεάζεται και η ποιότητα της παράστασης και το πόσο κόσμος θα έρθει στην επόμενη παράσταση. Σε ένα αφαιρετικό μοντέλο το κόστος του συνθέτη ανάλογα με την επιλογή του και τον κόσμο στην παράσταση (Π(ολύς), Μ(έτριος), Λ(ίγος)) δίνονται από την ακόλουθη Μαρκοβιανή αλυσίδα αποφάσεων. Απαντήστε σε ένα από τα δύο ερωτήματα.



1. (1 μονάδα) Αν η πρώτη παράσταση γνωρίζουμε ότι θα είναι μέτρια σε κόσμος, ποια είναι η πολιτική που ελαχιστοποιεί το κόστος του συνθέτη αν θα δωθούν συνολικά 3 παραστάσεις; Αν τελικά οι παραστάσεις αποδείχθηκαν όλες μέτριες, ποιο ήταν το συνολικό κόστος του συνθέτη (υπό αυτή την πολιτική);
2. (2 μονάδες) Βρείτε την βέλτιστη πολιτική σε μη φραγμένο οριζόντιο για το κριτήριο του αναμενόμενου μέσου κόστους. Πόσο είναι το βέλτιστο αναμενόμενο μέσο κόστος; (Πάρτε δεδομένο ότι για την Λ και την Μ η βέλτιστη λύση επιλέγει Σ.)