Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας
Λύσεις θεμάτων προόδου, 5 Δεκεμβρίου 2012.

---

1. **(3 μονάδες) Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:**

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 + x_2 \\ \text{έτσι ώστε}\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

   (α′) **Η λύση $x_1 = 2, x_2 = 1$ είναι βέλτιστη;**

   Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο βέλτιστης β.ε.λ. για τη β.ε.λ. $(x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*) = (2, 1, 0, 2, 0)$ και για τον σκοπό αυτό θα υπολογίσουμε τη συμπληρωματική β.λ. $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \nu_1^*, \nu_2^*)$ στο δυϊκό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \min\ & 7\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ \text{έτσι ώστε}\ & 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \geq 2 \\ & 3\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \geq 1 \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0\,. \end{aligned}$$

   Οι εξισώσεις που προκύπτουν από τους περιορισμούς (εισάγοντας τις μεταβλητές χαλαρότητας ν_1, ν_2) είναι:

$$\begin{cases} 2\lambda_1^* - \lambda_2^* + \lambda_3^* = 2 + \nu_1^* \\ 3\lambda_1^* - \lambda_2^* - \lambda_3^* = 1 + \nu_2^* \end{cases}$$

   Από τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας: $x_1^* > 0 \Rightarrow \nu_1^* = 0, x_2^* > 0 \Rightarrow \nu_2^* = 0, z_2^* > 0 \Rightarrow \lambda_2^* = 0$. Εισάγοντας αυτές τις τιμές στο σύστημα εξισώσεων παραπάνω και λύνοντας ως προς τους υπόλοιπους άγνωστους βρίσκουμε: $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \nu_1^*, \nu_2^*) = (3/5, 0, 4/5, 0, 0)$ η οποία είναι β.ε.λ. αφού όλες οι τιμές είναι μη αρνητικές. Συνεπώς, η λύση $x_1 = 2, x_2 = 1$ *είναι βέλτιστη*.

   (β′) **Πόσο θα μεταβληθεί η βέλτιστη τιμή εάν ο 3ος περιορισμός αλλάξει σε $x_1 - x_2 \leq 1.001$;**

   Εφόσον η μεταβολή 0.001 είναι μικρή εφαρμόζουμε το θεώρημα της ευαισθησίας. Σύμφωνα με αυτό, η μεταβολή στη βέλτιστη τιμή είναι $0.001\lambda_3^* = 0.0008$.

2. **(3 μονάδες) Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:**

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{έτσι ώστε}\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(α′) **Βρείτε τη βέλτιστη τιμή και λύση.**

Λόγω του ότι η μηδενική λύση $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ αντιστοιχεί στη β.λ. $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (0, 0, 0, 3, -2)$ η οποία δεν είναι β.ε.λ., θα χρησιμοποιήσουμε simplex2 φάσεων.
Το πρόβλημα στην 1η φάση είναι

$$
\begin{aligned}
\min\ & w \\
& 2x_1 + x_2 \leq 3 \\
& -x_2 - x_3 - w \leq -2 \\
& x_1, x_2, x_3, w \geq 0\ ,
\end{aligned}
$$

και αρχική β.ε.λ. η $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, w) = (0, 0, 0, 3, 0, 2)$.

	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	w	ΣΤΑΘ.
	0	0	0	0	0	-1	0
	1	2	-1	0	0	0	0
	2	1	0	1	0	0	3
	0	-1	-1	0	1	-1	-2
	0	1	**1**	0	-1	-1	2
	1	2	**-1**	0	0	0	0
z_1	2	1	**0**	1	0	0	3
w	**0**	**1**	**1**	**0**	**-1**	**1**	**2**
	0	0	0	0	0	-1	0
	1	**3**	0	0	-1	1	2
z_1	2	**1**	0	1	0	0	3
x_3	**0**	**1**	**1**	**0**	**-1**	**1**	**2**
	1	0	-3	0	**2**		-4
z_1	**2**	**0**	**-1**	**1**	**1**		**1**
x_2	0	1	1	0	**-1**		2
	-3	0	-1	-2	0		-6
z_2	2	0	-1	1	1		1
x_2	2	1	0	1	0		3

Η βέλτιστη τιμή είναι $-(-6) = 6$ και η βέλτιστη λύση είναι η $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (0, 3, 0, 0, 1)$.

(β′) **Πόσο θα μεταβληθεί η βέλτιστη τιμή εάν ο 1ος περιορισμός γίνει $2x_1+x_2 \leq 2.999$;**

Εφόσον η μεταβολή -0.001 είναι μικρή εφαρμόζουμε το θεώρημα της ευαισθησίας. Σύμφωνα με αυτό, η μεταβολή στη βέλτιστη τιμή είναι $-0.001\lambda_1 = -0.002$, όπου $(\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 0, 3, 0, 1)$ η συμπληρωματική β.λ. στο δυϊκό πρόβλημα, της βέλτιστης β.ε.λ. $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (0, 3, 0, 0, 1)$. (Δε χρειάστηκε να την υπολογίσουμε μιας και εμφανίζεται στην γραμμή της αντικειμενικής εξίσωσης στον τελευταίο πίνακα του simplex.

(γ′) **Βρείτε τη νέα βέλτιστη λύση μετά την αλλαγή του προηγούμενου ερωτήματος.**

Υπολογίζουμε τη συμπληρωματική β.λ. $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)$ της βέλτιστης β.ε.λ. $(\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = (2, 0, 3, 0, 1)$ του δυϊκού προβλήματος, λύνοντας τις

$$
\begin{cases}
\ \ 2x_1 + x_2 + z_1 = 2.999 \\
-x_2 - x_3 + z_2 = -2\ ,
\end{cases}
$$

μαζί με τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας (οι οποίες δίνουν $z_1 = x_1 = x_3 = 0$), έχουμε $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (0, 2.999, 0, 0, 0.999)$. Παρατηρήστε ότι όλες οι συνιστώσες είναι μη αρνητικές, άρα είναι β.ε.λ. Από το κριτήριο βέλτιστης β.ε.λ. συμπεραίνουμε ότι η $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (0, 2.999, 0, 0, 0.999)$ είναι βέλτιστη για το δυϊκό του δυϊκού, άρα και για το αρχικό πρόβλημα.

3. **(4 μονάδες) Δύο κέντρα κατάταξης αναλαμβάνουν την εκπαίδευση νεοσύλλεκτων οι οποίοι προορίζονται να στελεχώσουν τρείς στρατιωτικές μονάδες. Στο 1ο και 2ο κέντρο εκπαιδεύονται 200 και 300 νεοσύλλεκτοι αντίστοιχα, οι οποίοι μετά το τέλος της βασικής εκπαίδευσης μεταθέτονται στην 1η, 2η και 3η μονάδα, όπου οι αντίστοιχες απαιτήσεις σε προσωπικό είναι 100, 250 και 150 στρατιώτες. Το κόστος για τη μετάθεση κάθε στρατιώτη εξαρτάται από το κέντρο εκπαίδευσής του και τη μονάδα στην οποία μετατίθεται και δίδεται από τον πίνακα:**

	Μονάδα 1	**Μονάδα 2**	**Μονάδα 3**
Κέντρο 1	**1**	**2**	**2**
Κέντρο 2	**1**	**3**	**3**

(α′) **Βρείτε πόσοι στρατιώτες πρέπει να μετακινηθούν από κάθε κέντρο προς κάθε μονάδα έτσι ώστε να επιφέρεται το ελάχιστο δυνατό συνολικό κόστος μεταθέσεων.**

Αρχικοποίηση. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα της βορειοδυτικής γωνίας για το αρχικό δέντρο:

	Μονάδα 1	Μονάδα 2	Μονάδα 3	
Κέντρο 1	100	100		200
Κέντρο 2		150	150	300
	100	250	150	

Βήμα 1: Για κάθε μηδενική μεταβλητή x_{ij} πρέπει να ικανοποιείται $\mu_j - \lambda_i = c_{ij}$, οπότε λαμβάνουμε

$$\begin{cases} \mu_1 - \lambda_1 = 1 \\ \mu_2 - \lambda_1 = 2 \\ \mu_2 - \lambda_2 = 3 \\ \mu_3 - \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Θέτοντας $\lambda_1 = 0$ βρίσκουμε $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \lambda_2 = -1, \mu_3 = 2$. Τώρα για τις μηδενικές μεταβλητές x_{ij} ελέγχουμε εάν $-\nu_{ij} = \mu_j - \lambda_i - c_{ij} \leq 0$. Για $i = 2, j = 1$: $\mu_1 - \lambda_2 > c_{21} = 1$, άρα θα πρέπει να μεταβάλουμε τη β.ε.λ. κατά $\epsilon > 0$ ως εξής:

	Μονάδα 1	Μονάδα 2	Μονάδα 3	
Κέντρο 1	$100 - \epsilon$	$100 + \epsilon$		200
Κέντρο 2	$+\epsilon$	$150 - \epsilon$	150	300
	100	250	150	

όπου για $\epsilon = 100$ έχουμε:

	Μονάδα 1	Μονάδα 2	Μονάδα 3	
Κέντρο 1		200		200
Κέντρο 2	100	50	150	300
	100	250	150	

Βήμα 2. Οι εξισώσεις τώρα είναι: $\mu_2 - \lambda_1 = 2, \mu_1 - \lambda_2 = 1, \mu_2 - \lambda_2 = 3, \mu_3 - \lambda_2 = 3$ όπου για $\lambda_2 = 0$ λαμβάνουμε $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3, \mu_3 = 3, \lambda_1 = 1$. Εφόσον $\mu_1 - \lambda_1 = 0 \leq 1$ και $\mu_3 - \lambda_1 = 2 \leq 2$ συμπεραίνουμε ότι βρισκόμαστε στη βέλτιστη λύση, δηλαδή αυτή στην οποία όλοι οι στρατιώτες του κέντρου 1 πρέπει να μετατεθούν στη 2η μονάδα, ενώ το 2ο κέντρο πρέπει να μεταθέσει 100, 50 και 150 στρατιώτες στις μονάδες 1, 2 και 3 αντίστοιχα.

(β′) **Εάν το κόστος μετάθεσης από το 1ο κέντρο προς την 3η μονάδα αλλάξει από 2 σε 1, το πλάνο που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα εξακολουθεί να είναι βέλτιστο; Αν όχι, βρείτε το βέλτιστο πλάνο μεταθέσεων.**

Θα ελέγξουμε εάν η βέλτιστη λύση που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα εξακολουθεί να είναι βέλτιστη. Τα μ_j, λ_i που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα εξακολουθούν να ισχύουν και εδώ μιας και δεν εξαρτώνται από τα c_{ij}. Κάθε ν_{ij} εξαρτάται από το αντίστοιχο c_{ij} και εφόσον μόνο το c_{13} αλλάζει, αρκεί να ελέγξουμε το πρόσημο του ν_{13}: έχουμε $\mu_3 - \lambda_1 = 2 > 1$, άρα $\nu_{13} < 0$. Συνεπώς θα πρέπει να το 1ο κέντρο να αρχίσει να στέλνει στρατιώτες στην 3η μονάδα. Πιο συγκεκριμένα,

	Μονάδα 1	Μονάδα 2	Μονάδα 3	
Κέντρο 1		$200 - \epsilon$	$+\epsilon$	200
Κέντρο 2	100	$50 + \epsilon$	$150 - \epsilon$	300
	100	250	150	

όπου για $\epsilon = 150$ έχουμε:

	Μονάδα 1	Μονάδα 2	Μονάδα 3	
Κέντρο 1		50	150	200
Κέντρο 2	100	200		300
	100	250	150	

Οι εξισώσεις εδώ είναι: $\mu_2 - \lambda_1 = 2, \mu_3 - \lambda_1 = 1, \mu_1 - \lambda_2 = 1, \mu_2 - \lambda_2 = 3$. Θέτοντας $\lambda_1 = 0$ βρίσκουμε $\mu_2 = 2, \mu_3 = 1, \lambda_2 = -1, \mu_1 = 0$ και $\mu_1 - \lambda_1 = 0 - 0 \leq 1$, $\mu_3 - \lambda_2 = 1 - (-1) \leq 3$. Άρα βρήκαμε τη νέα βέλτιστη λύση: Το κέντρο 1 πρέπει να μεταθέσει 50 στη 2η μονάδα και 150 στην 3η, ενώ το 2ο κέντρο πρέπει να μεταθέσει 100 και 200 στην 1η και 2η μονάδα αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι η 3η μονάδα τώρα τροφοδοτείται αποκλειστικά από το 1ο κέντρο.