

Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Επαναληπτική εξέταση

Δευτέρα 28/9/09

1. (4 μονάδες.) Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:

$$A: \max_{x_1, x_2} 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{έτσι ώστε } x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(α') Γράψτε το δυικό πρόγραμμα Δ , του προγράμματος A.

(β') Βρείτε όλες τις βασικές λύσεις (εφικτές και μη εφικτές) του Δ . Ποιές από τις λύσεις αυτές είναι εφικτές;

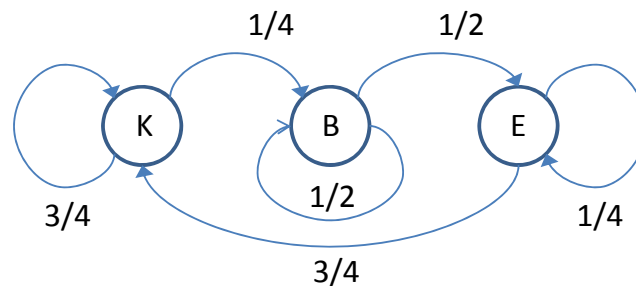
(γ') Ποιά είναι η βέλτιστη τιμή του A;

(δ') Βρείτε τα x_1, x_2 που βελτιστοποιούν το πρόγραμμα A, δηλαδή μια βέλτιστη λύση του A.

(ε') Πόσο θα αλλάξει η βέλτιστη τιμή που βρήκατε στο υποερώτημα 1γ' εάν η ανισότητα $x_1 + x_2 \leq 3$ αλλάξει σε $x_1 + x_2 \leq 3 + \epsilon$, ως συνάρτηση του ϵ ; (Υποθέστε ότι το ϵ είναι πολύ μικρός αριθμός.)

(ς') Βρείτε τη βέλτιστη τιμή του A εάν οι περιορισμοί $x_1 + x_2 \leq 3, x_2 \leq 1$ αλλάξουν σε $x_1 + x_2 \leq 4, x_2 \leq 3$.

2. (2 μονάδες.) Ένα μηχάνημα παραγωγής μπορεί να βρίσκεται σε 3 δυνατές καταστάσεις: κανονική λειτουργία (K), λειτουργία με βλάβη (B) και σε επιδιόρθωση (E). Η ακολουθία καταστάσεων εξελίσσεται στο χρόνο σύμφωνα με την αλυσίδα Markov:



(α') Βρείτε τα ποσοστά του χρόνου που το μηχάνημα βρίσκεται σε κάθε κατάσταση.

(β') Θεωρήστε ότι κάθε κατάσταση λειτουργίας έχει κόστος και όφελος ως εξής:

κατάσταση	κόστος	ώφελος
K	1	α
B	2	$\alpha/2$
E	3	0

όπου $\alpha > 0$.

Για ποιές τιμές του α αξίζει να λειτουργήσετε το μηχάνημα αυτό; (Θεωρήστε ότι η μη λειτουργία του μηχανήματος έχει μηδενικό κόστος και όφελος.)

3. (4 μονάδες.) Θεωρήστε την παρακάτω Μαρκοβιανή διαδικασία απόφασης:

Υπάρχουν 3 δυνατές καταστάσεις, 1 έως 3 και έχετε στη διάθεσή σας 2 αποφάσεις: την 'τολμηρή' (Τ) και 'συντηρητική' (Σ) απόφαση. Οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης είναι

$$P_T = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_\Sigma = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

για τις αποφάσεις Τ και Σ αντίστοιχα.

Η απόφαση Τ επιφέρει άμεσο κόστος 1 όταν η κατάσταση είναι η 1, ενώ στην κατάσταση 2 επιφέρει κόστος -2. Η απόφαση Σ στην κατάσταση 1 επιφέρει μηδενικό κόστος, ενώ στην κατάσταση 2 επιφέρει κόστος -1. Στην κατάσταση 3 όλες οι αποφάσεις επιφέρουν κόστος 1. (Η απόφαση Τ είναι 'τολμηρή' γιατί στην κατάσταση 2 μπορεί να επιφέρει μεγάλη ελάττωση του κόστους αλλά με το ρίσκο να εγκλωβιστεί στην κατάσταση 3 για πάντα, όπου το κόστος είναι σταθερά ίσο με 1. Αντίθετα η Σ είναι 'συντηρητική' γιατί στην κατάσταση 2 επιφέρει μικρότερη μείωση του κόστους από ότι η Τ, όμως δεν υπάρχει κίνδυνος εγκλωβισμού στην κατάσταση 3.)

- (α') Γράψτε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για το κριτήριο του σταθμισμένου κόστους, με συντελεστή στάθμισης $\beta = 1/2$.
- (β') Λύστε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού που βρήκατε στο προηγούμενο υποερώτημα και βρείτε τη βέλτιστη πολιτική (σύμφωνα με το κριτήριο σταθμισμένου κόστους).
- (γ') Θεωρήστε ότι το άμεσο κόστος κάθε ενέργειας στην κατάσταση 3 είναι $\alpha > 0$. Για ποιές τιμές του α η βέλτιστη πολιτική σύμφωνα με το κριτήριο του (μη σταθμισμένου) μέσου κόστους είναι να λαμβάνουμε την 'τολμηρή' απόφαση σε κάθε κατάσταση;