

Ειδικά Θέματα Επιχειρησιακής Έρευνας

Τελική εξέταση

Παρασκευή 26/6/09

1. (3 μονάδες.) Θεωρήστε το γραμμικό πρόγραμμα:

$$A: \min_{x_1, x_2} x_1 + x_2$$

$$\text{έτσι ώστε } x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$2x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

(α') Γράψτε το δυικό πρόβλημα του προγράμματος A.

(β') Λύστε το δυικό πρόβλημα.

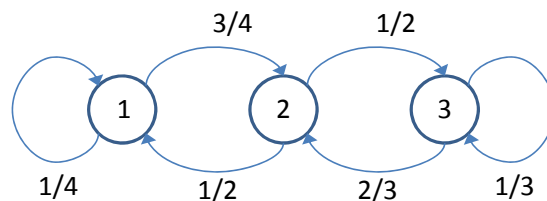
(γ') Στη βέλτιστη λύση του A, ποιοί από τους περιορισμούς του A ικανοποιούνται με ισότητα;

(δ') Ποιά είναι η βέλτιστη τιμή και λύση του A;

(ε') Εάν σας επιτρεπόταν να μειώσετε τα δεξιά μέλη των ανισοτικών περιορισμών (δηλ. το 4 και 1) συνολικά κατά ϵ για μικρό $\epsilon \geq 0$, τότε πόσο θα μειώνατε το καθένα έτσι ώστε η βέλτιστη τιμή του A να γίνει όσο το δυνατόν μικρότερη;

(ϕ') Γενικότερα, γιατί είναι χρήσιμη η μελέτη του δυικού ενός γραμμικού προγράμματος;

2. (2 μονάδες.) Θεωρήστε την αλυσίδα Markov του σχήματος:



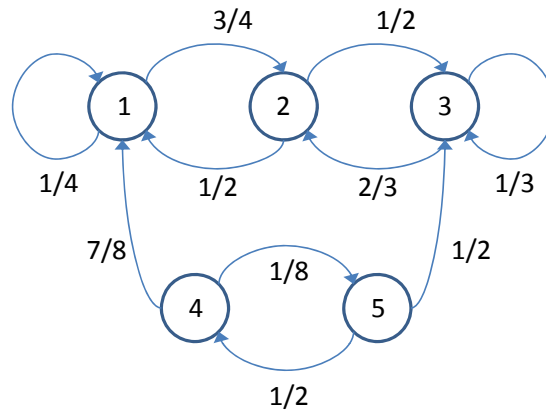
(α') Ποιά είναι τα ποσοστά του χρόνου που η αλυσίδα ξοδεύει σε κάθε κατάσταση;

(β') Θεωρήστε ότι η αλυσίδα περιγράφει πως την τυχαία καθημερινή μεταβολή της θερμοκρασία, όπου η αντιστοιχία μεταξύ κατάστασης και θερμοκρασίας είναι:

κατάσταση	θερμοκρασία
1	-2
2	18
3	20

Ποιά είναι η μέση θερμοκρασία, π.χ. στη διάρκεια πολλών ημερών;

(γ') Θεωρήστε την αλυσίδα:



Χωρίς να υπολογίσετε τη στάσιμη κατανομή, ποιά περιμένετε να είναι και γιατί;

3. (3 μονάδες.) Κάθε στιγμή, ο υπολογιστής σας βρίσκεται σε μια από δύο καταστάσεις: στην κατάσταση 1 όπου λειτουργεί κανονικά (γρήγορα) ή στην κατάσταση 2 όπου είναι πολύ αργός. Η κατάσταση αλλάζει με έναν τυχαίο τρόπο και εξαρτάται από τις ενέργειές σας. Πιο συγκεκριμένα, κάθε στιγμή αποφασίζετε είτε να συνεχίσετε τη λειτουργία χωρίς να επέμβετε (απόφαση Λ), είτε να επανεκκινήσετε τον υπολογιστή σας (απόφαση Ε). Όταν αποφασίζετε Λ, ο υπολογιστής αλλάζει κατάσταση με πιθανότητα 3/4 ενώ με πιθανότητα 1/4 παραμένει στην ίδια. Όταν αποφασίζετε Ε, κάθε κατάσταση είναι ισοπίθανη την επόμενη στιγμή. Τέλος, η συνάρτηση κόστους είναι $c(1, E) = c(2, E) = 3, c(1, \Lambda) = -10, c(2, \Lambda) = 5$.

- (α') Ποιός είναι το πλήθος όλων των πολιτικών; Δώστε το γράφημα πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας Markov που προκύπτει από κάθε πολιτική.
- (β') Γράψτε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για το κριτήριο του σταθμισμένου κόστους, με συντελεστή στάθμισης $\beta = 1/2$.
- (γ') Βρείτε το σταθμισμένο κόστος της πολιτικής που υπαγορεύει να μην επανεκκινήτε τον υπολογιστή σας σε καμμία κατάσταση.
- (δ') Η παραπάνω πολιτική είναι η καλύτερη σύμφωνα με το κριτήριο του σταθμισμένου κόστους; Αν όχι, βρείτε τη βέλτιστη πολιτική.
- (ε') Βρείτε την πολιτική που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος.

4. (2 μονάδες.) Βρείτε το όριο της ακολουθίας $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ όπου

$$\alpha_{n+1} = \min \left(1 + \frac{\alpha_n + 2\beta_n}{6}, -1 + \frac{\beta_n}{2} \right)$$

$$\beta_{n+1} = \min \left(-1 + \frac{3\alpha_n + \beta_n}{8}, 1 + \frac{\alpha_n}{2} \right)$$

για κάθε $n = 0, 1, \dots$ και $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.