Επανάληψη / Υπενθύμιση

Π.χ. Έστω μια Τ.Μ $X \sim Εκθ(1)$ Δηλ. είναι συνεχής κ' έχει πυκνότητα $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{για } x \geq 0 \\ 0 & \text{για } x<0 \end{cases}$ και έστω ότι δεδομένης της $X=x$ η Y έχει κατανομή $N(x,1)$ δηλ. έχει πυκνότητα $f(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2}$ για $y \in \mathbb{R}$.

Η <u>από κοινού πυκνότητά τους</u> είναι η $f(x,y) = f(x) \cdot f(y/x) = \begin{cases} e^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2} & x \geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2}$ όπου η σταθερά κανονικοποίησης είναι $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} dy = \sqrt{2\pi\sigma^2}$

Επιπλέον: Η δεσμευμένη πυκνότητα του X δεδομένου του $Y=y$ είναι

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{f(y/x) f(x)}{f(y)} = \frac{e^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2}}{f(y)} \quad \text{για } x \geq 0.$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}}(2x+y^2-2xy+x^2) = e^{-\frac{1}{2}\left[x^2-2(y-1)x+(y-1)^2\right]} e^{-\frac{1}{2}(2y-1)} \propto e^{-\frac{1}{2}(x-(y-1))^2}$$

$\Rightarrow$ Η $X/Y=y$ ~~$N(y-1,1)$~~ έχει πυκνότητα $f(x/y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-(y-1))^2}}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-(y-1))^2} dz} & x \geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-(y-1))^2}}{\sqrt{\pi/2}} & x \geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

Γενικά ο (κανόνας) Νόμος του Bayes ισχύει και για συνεχείς τ.μ.

$$f(x/y) = \frac{f(y/x) \cdot f(x)}{f(y)} \propto f(y/x) f(x)$$

<u>Στη στατιστική κατά Bayes</u>

1) Δεδομένα ή παρατηρήσεις $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^n$

2) Μοντέλο $f(x/\theta)$ όπου $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)$ είναι οι <u>άγνωστες παράμετροι</u>
Περιγράφεται από τη συνάρτηση "πιθανοφάνειας" $f(x/\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n/\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta)$ Δηλ. θεωρούμε ότι οι παρατ. x_i είναι (δεσμευμένα) ανεξ. δεδομένου του θ.

3) <u>A priori κατανομή</u> $\pi(\theta)$ η οποία συνοψίζει το τι ξέρουμε αρχικά για τη κατανομή του θ.