ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Ειδικά Θέματα Αλγορίθμων
Διδάσκων: Ε. Μαρκάκης, Φθινοπωρινό εξάμηνο 2023

2η σειρά ασκήσεων **Προθεσμία παράδοσης: 23/2/2024**

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες)

Θεωρήστε την εξής ειδική περίπτωση του προβλήματος Weighted Vertex Cover, όπου το βάρος κάθε κορυφής $v \in V$, δίνεται από την σχέση $w(v) = c \cdot d(v)$, με $d(v)$ τον βαθμό της κορυφής v (δηλαδή ο αριθμός των γειτόνων της) και c είναι μια θετική σταθερά. Να δείξετε ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος που επιστρέφει πάντα ένα έγκυρο vertex cover, επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης ίσο με το πολύ 2 για αυτή την περίπτωση.

Πρόβλημα 2. (12 μονάδες) Το πρόβλημα MINIMUM STEINER TREE ορίζεται ως εξης:

Input: Ένας πλήρης μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$, ένα βάρος d_{uv}, για κάθε ζεύγος κορυφών $(u, v) \in E$, και ένα διακεκριμένο υποσύνολο των κορυφών $R \subseteq V$.
Output: Θέλουμε να βρούμε ένα δέντρο που συνδέει όλους τους κόμβους του συνόλου R. Το δέντρο επιτρέπεται να χρησιμοποιήσει και τους υπόλοιπους κόμβους του γράφου (χωρίς να είναι απαραίτητο πάντα), αν αυτό δημιουργεί μια φτηνότερη λύση.

Όταν $R = V$, τότε το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το Minimum Spanning Tree. Στην γενική περίπτωση όμως το Minimum Steiner Tree είναι NP-complete.

Υποθέτοντας ότι τα βάρη ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, σχεδιάστε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο, με λόγο προσέγγισης ίσο με 2. **Hint**: Ξεκινήστε με ένα minimum spanning tree στο V, και εκμεταλλευθείτε την τεχνική που χρησιμοποιήσαμε στο TSP.

Πρόβλημα 3. (18 μονάδες) Η ερώτηση αυτή αφορά το εξής πρόβλημα:
ΜΕΓΙΣΤΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ: Δίνεται γράφος $G = (V, E)$, με $n = |V|$ κόμβους. Ζητείται να βρεθεί το μέγιστο σε πληθικό αριθμό υποσύνολο κόμβων που είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, δηλαδή ένα υποσύνολο $S \subseteq V$, τέτοιο ώστε για κάθε ζευγάρι κόμβων $u, v \in S$ ισχύει ότι $(u, v) \notin E$ και ο πληθικός αριθμός $|S|$ είναι μέγιστος.

(i) (6 μονάδες) Να γράψετε ένα ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα που να εκφράζει το παραπάνω πρόβλημα. Εξηγήστε αναλυτικά τις μεταβλητές, τους περιορισμούς και την αντικειμενική συνάρτηση της διατύπωσής σας.

(ii) (12 μονάδες) Έστω ο εξής αλγόριθμος για την εύρεση του μέγιστου ανεξάρτητου υποσυνόλου, S, ενός γράφου $G = (V, E)$:

RANDOM(G);
Choose a permutation π of V uniformly at random;
Construct a subset $S(\pi) \subseteq V$ as follows:
  For each vertex $u \in V$:
    Add u to $S(\pi)$ if and only if no neighbor of u precedes u in the permutation π.
Return $S(\pi)$;

Για το υποσύνολο $S(\pi)$, αποδείξτε ότι *(i)* είναι ανεξάρτητο υποσύνολο, και *(ii)* η αναμενόμενη τιμή του πληθικού αριθμού του είναι $E[|S(\pi)|] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i+1}$, όπου d_i ο βαθμός της κορυφής i.

Πρόβλημα 4. (13 μονάδες) Στις διαλέξεις αναφέρθηκε σύντομα το πρόβλημα BIN-PACKING (Ενότητα 11), που μπορεί να οριστεί ως εξής: Δίνονται n αντικείμενα με θετικά βάρη w_i, με $0 < w_i \leq 1$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Ο στόχος είναι να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός κάδων χωρητικότητας 1, στους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν τα αντικείμενα. Θεωρήστε τώρα τον αλγόριθμο Next-Fit που είναι μια παραλλαγή του αλγορίθμου των διαφανειών.

Next-Fit
$m = 1$; (αριθμός κάδων);
Θεωρήστε την διάταξη των ακτικειμένων από το 1 ως το n;
For $i = 1$ to n do
    Αν το αντικείμενο i χωράει στον κάδο m:
        Τοποθέτησε το αντικείμενο αυτό στον κάδο m.
    Αλλιώς
        { $m = m + 1$; (άνοιξε ένα νέο κάδο)
        τοποθέτησε το αντικείμενο i στο νέο κάδο}
Return m;

(i) (8 μονάδες) Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμος αυτός έχει λόγο προσέγγισης 2, δηλαδή, αν OPT είναι ο βέλτιστος αριθμός κάδων, τότε $\frac{m}{OPT} \leq 2$.

(ii) (5 μονάδες) Δείξτε ότι ο παραπάνω λόγος είναι σφιχτός (tight). **Hint**: Χρησιμοποιήστε κατάλληλο αριθμό αντικειμένων με βάρη $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2n}$.

Πρόβλημα 5. (12 μονάδες) Έστω ότι έχετε γράψει ένα ακέραιο πρόγραμμα για κάποιο πρόβλημα βελτιστοποίησης, στο οποίο έχετε χρησιμοποιήσει 5 ακέραιες μεταβλητές, συγκεκριμένα τις $x_1, x_2, \ldots, x_5$, με $x_i \in \{0, 1\}$ για κάθε $i = 1, \ldots, 5$. Περιγράψτε πώς θα προσθέτατε έναν γραμμικό περιορισμό στο ακέραιο πρόγραμμά σας για να επιβάλετε καθεμια από τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το πολύ μιά από τις μεταβλητές x_1, x_2 να ισούται με 1.
2. Μεταξύ των μεταβλητών x_3, x_4 ακριβώς μία να ισούται με 1.
3. Αν σε μια εφικτή λύση έχουμε $x_4 = 1$, τότε και η x_5 να είναι επίσης ίση με 1.
4. Το πολύ 3 μεταβλητές να ισούνται με 1.

Πρόβλημα 6. (10 μονάδες) Κατασκευάστε ένα tight example για τον αλγόριθμο που χρησιμοποιεί LP-rounding για το πρόβλημα Weighted Vertex Cover, που είδαμε στο μάθημα. Θα πρέπει δηλαδή να φτιάξετε ένα παράδειγμα όπου ο εν λόγω αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης ίσο με 2. **Hint**: Υπάρχουν τέτοια παραδείγματα με μικρό αριθμό κορυφών.