

## Ειδικά Θέματα Αλγορίθμων Ασκήσεις Φροντιστηρίου #2 Algorithms on Numbers

1. (a) Εάν  $F_0 = F_1 = 1$  και  $F_n$  είναι ο  $n$ -οστός Fibonacci αριθμός, ναδειχθεί ότι

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

(b) Ναδειχθεί ότι αρκούν  $O(\log n)$  πολλαπλασιασμοί πινάκων για να υπολογιστεί η  $n$ -οστή δύναμη του  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

(c) Να περιγραφεί αλγόριθμος που υπολογίζει τον  $n$ -οστό Fibonacci αριθμό σε χρόνο  $O(m(n) \cdot \log n)$ , όπου  $m(n)$  ο χρόνος που απαιτείται για πολλαπλασιασμό πινάκων.

2. Ναδειχθεί ότι ο υπολογισμός του  $LCM(a, b)$  (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο) μπορεί να γίνει μέσω του υπολογισμού  $GCD(a, b)$  και αντίστροφα.

3. Ναδειχθεί ότι για θετικούς ακεραίους  $n, a, b$ , αν  $n|(a \cdot b)$  και  $gcd(a, n) = 1$  τότε  $n|b$ .

4. Ναδειχθεί ότι  $gcd(a, n) = gcd(a + k \cdot n, n)$ , για ακεραίους  $n, a, k, .$