ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
SCHOOL OF INFORMATION SCIENCES & TECHNOLOGY
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
DEPARTMENT OF INFORMATICS

Ειδικά Θέματα Αλγορίθμων

Ασκήσεις Φροντιστηρίου #2

Algorithms on Numbers

1. (a) Εάν $F_0 = F_1 = 1$ και F_n είναι ο n-οστός Fibonacci αριθμός, να δειχθεί ότι

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

(b) Να δειχθεί ότι αρκούν $O(logn)$ πολλαπλασιασμοί πινάκων για να υπολογιστεί η n-οστή δύναμη του $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
(c) Να περιγραφεί αλγόριθμος που υπολογίζει τον n-οστό Fibonacci αριθμό σε χρόνο $O(m(n) \cdot \log n)$, όπου $m(n)$ ο χρόνος που απαιτείται για πολλαπλασιασμό πινάκων.

2. Να δειχθεί ότι ο υπολογισμός του $LCM(a, b)$ (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο) μπορεί να γίνει μέσω του υπολογισμού $GCD(a, b)$ και αντίστροφα.

3. Να δειχθεί ότι για θετικούς ακεραίους n, a, b, αν $n|(a \cdot b)$ και $gcd(a, n) = 1$ τότε $n|b$.

4. Να δειχθεί ότι $gcd(a, n) = gcd(a + k \cdot n, n)$, για ακεραίους $n, a, k,$.

5. (a) Νδο υπάρχει αντίστροφος του a, modulo m, αν και μόνο αν οι αριθμοί a και m είναι μεταξύ τους πρώτοι.
(b) Να δοθεί αλγόριθμος υπολογισμού του αντίστροφου ενός αριθμού a, modulo m.

6. (a) Να δειχθεί ότι αν $a \equiv_n b$ και για κάποιον αριθμό m, ο m διαιρεί τον n, τότε $a \equiv_m b$.
(b) Να δειχθεί ότι $gcd(a, b) = gcd(a, a + b)$, χρησιμοποιώντας τη σχέση $(d|a) \wedge (d|b) \Rightarrow d|gcd(a, b)$.
(c) Να δειχθεί ότι για $n \geq 2$ ισχύει η σχέση $gcd(f_n, f_{n+1}) = 1$, όπου f_n είναι ο n-οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci.