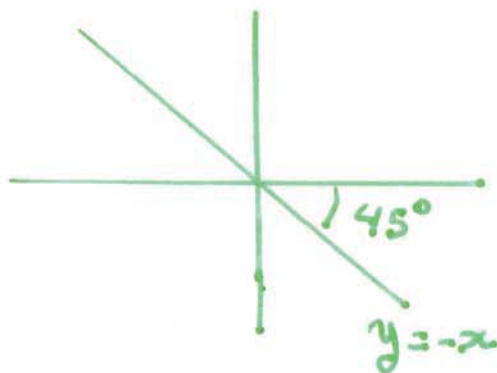
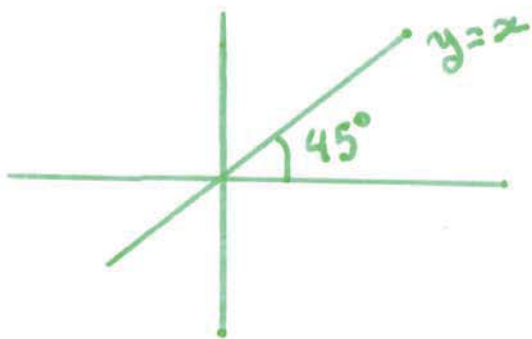


- Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$.

Αη. Τα x και y μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή εκτός από ευθείες για τις οποίες $x^2 - y^2 = 0$ ή $x^2 = y^2$.
Επομένως το πεδίο ορισμού της f απορρέει από όλα τα σημεία (x,y) του επιπέδου εκτός από εκείνα των ευθειών $y=x$ και $y=-x$.



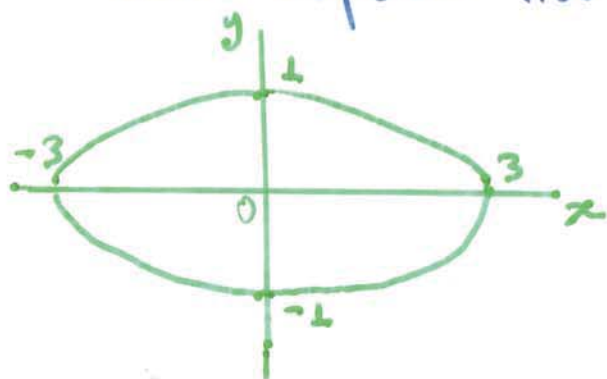
- Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

Αη. Η f ορίζεται σε κάθε σημείο (x,y) του επιπέδου, για το οποίο ισχύει $9 - x^2 - 9y^2 > 0$ δηλαδή $\frac{x^2}{9} + y^2 < 1$. Επομένως το πεδίο

ορισμού της f είναι το σύνολο

των εστιών που βρίσκονται στο

εσωτερικό της
ελλείψης $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$



- Σχεδιάστε τις ισοσταθμικές καμπύλες της $f(x,y) = -(x-1)^2 - y^2 + 1$ για

$$f(x,y) = 1, 0, -3.$$

Αν. Κάθε ισοσταθμική καμπύλη της f θα έχει εξίσωση $f(x,y) = c$.

Όταν $c = 1$

η εξίσωσή της, θα είναι $-(x-1)^2 - y^2 + 1 = 1$ δηλαδή $(x-1)^2 + y^2 = 0$.

Επομένως θα είναι σύνολο με κέντρο το σημείο $(1,0)$ και ακτίνα 0.

Όταν $c = 0$

η εξίσωσή της, θα είναι

$$-(x-1)^2 - y^2 + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

δηλαδή κύκλος με κέντρο το σημείο $(1,0)$ και ακτίνα 1

Όταν $c = -3$

η εξίσωσή της, θα είναι

$$-(x^2-1)^2 - y^2 + 1 = -3 \quad \text{ή} \quad (x^2-1)^2 + y^2 = 4$$

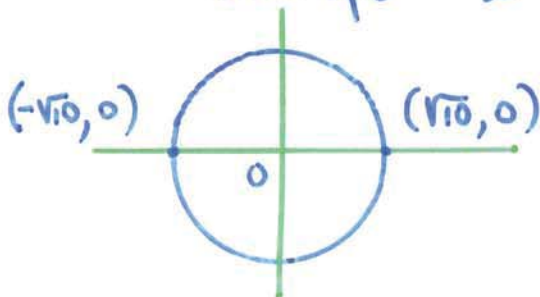
δηλαδή κύκλος με κέντρο το σημείο $(1,0)$ και ακτίνα 2.

- Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσαθρικής καμπύλης της $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$ που περιέχει το σημείο $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Αν. Κάθε ισοσαθρική καμπύλη της f έχει εξίσωση $f(x,y) = c$ δηλαδή $16 - x^2 - y^2 = c$. Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση εκείνης της ισοσαθρικής καμπύλης που "περνάει" από το σημείο $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} 16 - (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 &= c \\ 16 - 4 \cdot 2 - 2 &= c \\ 6 &= c \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση είναι $x^2 + y^2 = 10$, δηλαδή αυτή περιγράφει κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{10}$.



- Να βρεθούν οι καρτέλες που προκύπτουν από την τμή των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τα επίπεδα συντεταγμένων.

$$(i) z = 2x^2 + y^2 + 1, \quad (ii) z = x^2 - y, \quad (iii) z = 1 - x - y^2$$

Αν. Σε όλες τις περιπτώσεις οι τριγώνυφες καρτέλες που προκύπτουν (εάν το αντίστοιχο επίπεδο τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης) βρίσκονται επάνω στο επίπεδο που τέμνει την γραφική παράσταση.

Οι τμήες βρίσκονται εάν θέσουμε $z=0$ για το xy -επίπεδο, $x=0$ για το yz -επίπεδο και $y=0$ για το zx -επίπεδο

(i) Το xy -επίπεδο δεν τέμνει την επιφάνεια που αποκλείει την γραφική παράσταση της συνάρτησης διότι για $z=0$ έχουμε $2x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Το $x=0$ δίνει την παραβολή $z = y^2 + 1$. Το $y=0$ δίνει την παραβολή $z = 2x^2 + 1$.

(ii) Για $z=0$ έχουμε την παραβολή $y = x^2$. Για $x=0$ έχουμε την ευθεία $z = -y$. Για $y=0$ έχουμε την παραβολή $z = x^2$.

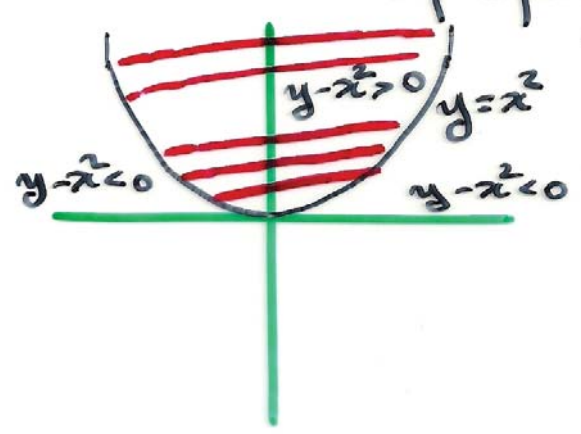
(iii) Για $z=0$ έχουμε την παραβολή $x=1-y^2$ στο xy -επίπεδο. Για $x=0$ έχουμε την παραβολή $z=1-y^2$ στο yz -επίπεδο. Για $y=0$ έχουμε την ευθεία $z=1-x$ στο xz -επίπεδο.

(1)

• Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$

Αν.

Το πεδίο ορισμού D της f είναι το σύνολο σημείων (x,y) του επιπέδου, για τα οποία το $\sqrt{y-x^2}$ είναι πραγματικός αριθμός. Δηλαδή το D περιέ-



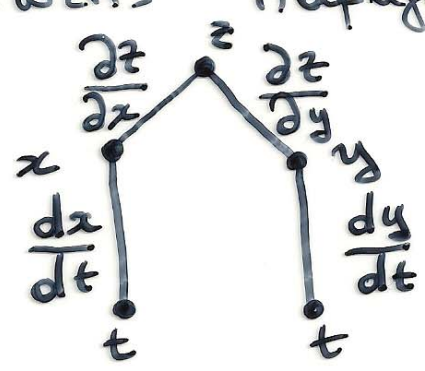
χει ως στοιχεία του, όλα τα σημεία (x,y) , για τα οποία $y \geq x^2$. Άρα το D είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται πάνω και μέσα στην παραβολή $y = x^2$ (βλέπε ομοίως την περιοχή)

2

• Να βρεθεί η $\frac{dz}{dt}$ εάν

$$z = x^2 + 3xy + 5y^2, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t.$$

Αη. Από το δένδρο εξάρτησης των μεταβλητών και τους κανόνες αλυσωτής παραγωγής έχουμε:



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 10y + 3x,$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

Επομένως

$$\frac{dz}{dt} = (2x + 3y)(\cos t) + (10y + 3x)(-\sin t).$$