Κεφ. 7: Γραμμικές απεικονίσεις.

Έστω V και W διανυσματικοί υπόχωροι. Θεωρούμε μια συνάρτηση $F: V \to W$ για την οποία ισχύει ότι:

(i) $F(\vec{u}+\vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v})$ για όλα τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

και (ii) $F(k\vec{u}) = kF(\vec{u})$ για κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ του V και για κάθε πραγματικό αριθμό k.

Η F ονομάζεται γραμμική απεικόνιση.

Παράδειγμα: Έστω συνάρτηση $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $F(x,y) = (x, x+y, x-y)$.

Η F είναι γραμμική απεικόνιση:

Έστω $\vec{u_1} = (x_1, y_1)$, $\vec{u_2} = (x_2, y_2)$

Τότε $F(\vec{u_1}+\vec{u_2}) = F(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2, x_1+x_2+y_1+y_2,$
$x_1+x_2-y_1-y_2) = (x_1, x_1+y_1, x_1-y_1) + (x_2, x_2+y_2, x_2-y_2)$

$= F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) = F(\vec{u_1}) + F(\vec{u_2})$

Έστω $k \in \mathbb{R}$ και $\vec{u_1} = (x_1, y_1)$

Τότε

$F(k\vec{u_1}) = F(kx_1, ky_1) = (kx_1, kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1)$

$= k(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) = kF(x_1, y_1) =$

$= kF(\vec{u_1})$.

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω γραμμική απεικόνιση $F: V \to W$.

Εάν $\vec{u_1}, \vec{u_2} \in V$ και $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$F(k_1\vec{u_1} + k_2\vec{u_2}) = F(k_1\vec{u_1}) + F(k_2\vec{u_2}) = k_1 F(\vec{u_1}) + k_2 F(\vec{u_2})$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γενικευθεί για παραπάνω από δύο διανύσματα:

Έτσι εάν $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_m} \in V$ και $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$

τότε $F(k_1\vec{u_1} + k_2\vec{u_2} + \dots + k_m\vec{u_m}) = k_1 F(\vec{u_1}) + \dots \dots + k_m F(\vec{u_m})$.

Παράδειγμα συνάρτησης που δεν είναι γραμμική απεικόνιση.

- $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $F(x,y) = (x, y+1)$

Αποδ. Έστω $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Τότε

$$F(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2+1) = (x_1, y_1+1) + (x_2, y_2) = F(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \neq F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)$$

- $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $F(x,y,z) = (1,1)$

Αποδ. Έστω $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ και $k \in \mathbb{R} - \{1\}$

Τότε $F(kx_1, kx_2, kx_3) = (1,1) \neq kF(x_1, x_2, x_3) =$

$$= k(1,1) = (k,k).$$

Παρατηρήσεις:

1) Μια γραμμική απεικόνιση $F: V \to W$ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές των διανυσμάτων μιας βάσης του V.

Αποδ.: Έστω $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ βάση του V και έστω $\vec{u} \in V$. Τότε προφανώς $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ έτσι ώστε $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k$.

Όμως $F(\vec{u}) = F(\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k) = \lambda_1 F(\vec{u}_1) + \dots + \lambda_k F(\vec{u}_k)$

Εάν λοιπόν γνωρίζουμε τις τιμές των διανυσμάτων κάποιας βάσης του V, τότε γνωρίζουμε τις τιμές όλων των στοιχείων του V, μέσω της F.

2) Μια γραμμική απεικόνιση $F: V \to W$ απεικονίζει το μηδενικό διάνυσμα του V στο μηδενικό διάνυσμα του W.

Αποδ: Έστω $\vec{u} \in V$. Τότε $0\vec{u} = \vec{0}$. Άρα

$$F(\vec{0}) = F(0\vec{u}) = 0 F(\vec{u}) = \vec{0}$$

3) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $F: V \to W$, το σύνολο των τιμών της αποτελεί υπόχωρο του W.

(Ο υπόχωρος αυτός ονομάζεται και εικόνα της F και συμβολίζεται με $\mathrm{Im} F$. Επίσης εάν $F(\vec{v}) = \vec{w}$, λέμε ότι το $\vec{w}$ αποτελεί την εικόνα του $\vec{v}$ μέσω της F.)

Αποδ. Έστω $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathrm{Im} F$. Αυτό σημαίνει ότι $\exists$ $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V$ έτσι ώστε $F(\vec{u}_1) = \vec{w}_1$, $F(\vec{u}_2) = \vec{w}_2$.

Ορίζουμε $\vec{a} := \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Οπότε έχουμε

$$F(\vec{a}) = F(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = F(\vec{u}_1) + F(\vec{u}_2) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

Άρα $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in \mathrm{Im} F$ (Προφανώς $\vec{a} \in V$, διότι V υπόχωρος).

Έστω $\vec{w}_1 \in ImF$ και $k \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει

ότι $\exists\ \vec{u}_1 \in V$ έτσι ώστε $F(\vec{u}_1) = \vec{w}_1$.

Ορίζουμε $\vec{b} = k\vec{u}_1$. Οπότε έχουμε

$F(\vec{b}) = F(k\vec{u}_1) = kF(\vec{u}_1) = k\vec{w}_1$. Άρα $k\vec{w}_1 \in ImF$.

(Προφανώς $\vec{b} \in V$, διότι ο V είναι υπόχωρος).

4) Έστω γραμμική απεικόνιση $F: V \to W$.

Πυρήνα της F ονομάζουμε το σύνολο

των διανυσμάτων που ανήκουν στο V

και τα οποία έχουν για εικόνα τους

μέσω της F, το $\vec{0}$. Ο πυρήνας της

F συμβολίζεται με $KerF$.

Το $KerF$ είναι υπόχωρος του V.

Αποδ: Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in KerF$. Τότε

$$F(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = F(\vec{v}_1) + F(\vec{v}_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Άρα $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in KerF$.

Έστω $\vec{v}_1 \in KerF$ και $k \in \mathbb{R}$. Τότε

$$F(k\vec{v}_1) = kF(\vec{v}_1) = k\vec{0} = \vec{0}$$

Άρα $k\vec{v}_1 \in KerF$.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω γραμμική απεικόνιση $F: V \to W$. Τότε $\dim(KerF) + \dim(ImF) = \dim(V)$

Έστω γραμμική απεικόνιση $F: \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}^k$

(1) Εάν $KerF = \{\vec{0}\}$ τότε η F ονομάζεται ενδομορφισμός

(2) Εάν $ImF = \mathbb{R}^k$ τότε η F ονομάζεται επιμορφισμός

(3) Εάν η F είναι 1-1 και επί τότε η F ονομάζεται ισομορφισμός.

(Εάν η F είναι ισομορφισμός τότε προφανώς είναι ενδομορφισμός και επιμορφισμός)

Έστω ότι έχουμε ένα πίνακα A μεγέθους $m\times n$. Ορίζουμε μια αντιστοιχία $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με τύπο $F(\vec{x}) = \underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times 1)}{\vec{x}}$

Η F είναι γραμμική απεικόνιση.

Αποδ: Έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ και έστω $k\in\mathbb{R}$.

Τότε $F(\vec{x}_1+\vec{x}_2) = A(\vec{x}_1+\vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = F(\vec{x}_1)+F(\vec{x}_2)$.

$F(k\vec{x}_1) = A(k\vec{x}_1) = kA\vec{x}_1 = kF(\vec{x}_1)$.

Άρα η F είναι γραμμική απεικόνιση.

Έστω γραμμική απεικόνιση $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ που ορίζεται από ένα πίνακα A μεγέθους $m\times n$ δηλαδή έχουμε $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ $\forall\, \vec{x}\in\mathbb{R}^n$.

① Το $\mathrm{Im}F$ θα αποτελείται από όλα εκείνα τα διανύσματα $\vec{y}\in\mathbb{R}^m$ για τα οποία $\exists\, \vec{x}\in\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $F(\vec{x})=\vec{y}$.

Δηλαδή το ImF θα περιέχει για στοιχεία του όλα τα $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$, για τα οποία το $A\vec{x}=\vec{y}$ είναι συμβατό. Επομένως το ImF ταυτίζεται με τον στηλοχώρο του A.

② Ο πυρήνας KerF θα αποτελείται από όλα εκείνα τα διανύσματα $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία ισχύει $F(\vec{x})=A\vec{x}=\vec{0}$. Δηλαδή το KerF ταυτίζεται με το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $A\vec{x}=\vec{0}$.

(διάσταση των λύσεων του $A\vec{x}=\vec{0}$) $= \dim \mathrm{Ker}F = n - \dim \mathrm{Im}F = n -$ (βαθμός του πίνακα A).

Άσκηση: Έστω γραμμική απεικόνιση $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

με τύπο $F(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Να βρεθούν

(1) οι διαστάσεις των υπόχωρων Ker F και Im F.

(2) βάσεις για τους παραπάνω υπόχωρους.

Απάντηση: (1) Από προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $\dim(\ker F) + \dim(\operatorname{Im} F) = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Άρα $\dim(\ker F) + \varrho(A) = 3$ ← βαθμός του A

διότι $\operatorname{Im} F$ = στηλοχώρο του A

και $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Επομένως θα πρέπει να βρούμε τον βαθμό του A.

Έχουμε

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \cdots \overset{G-J}{\cdots\cdots} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $\rho(A)=2$ και επομένως $\dim(\ker F)=1$

(2). Από το (1) έχουμε ότι τα διανύσματα $(1,0,1,1)$ και $(0,1,1,-1)$ αποτελούν βάση του στηλοχώρου του A και επομένως του ImF.

Τώρα ένα διάνυσμα $\vec{x} \in \ker F \Leftrightarrow$

$$F(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Εάν επιλύσουμε το σύστημα έχουμε:

$$x_1 = 2/3\, x_3 \quad \text{και} \quad x_2 = -1/3\, x_3$$

Οπότε $\ker F: \begin{bmatrix} (2/3)t \\ (-1/3)t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ βάση του kerF.

Θα αποδείξουμε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μπορεί να ορισθεί από κάποιο πίνακα A (μεγέθους $m \times n$)

Έστω $\hat{e}_1=(1,0,\dots,0)$, $\hat{e}_2=(0,1,0,\dots,0)$, ..., $\hat{e}_n=(0,0,\dots,0,1)$ η standard ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας, ο οποίος έχει για στήλες του τα διανύσματα $F(\hat{e}_1)=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, $F(\hat{e}_2)=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$, ..., $F(\hat{e}_n)=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$.

Δηλαδή

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ F(\hat{e}_1) & F(\hat{e}_2) & \dots & F(\hat{e}_n) \end{matrix}$$

Έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ και έστω

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots\cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \hat{e}_1 + \cdots + x_n \hat{e}_n \, .$$

Οπότε έχουμε

$$F(\vec{x}) = x_1 F(\hat{e}_1) + \cdots\cdots + x_n F(\hat{e}_n) = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\vec{x}$$

A: πίνακας που ορίζει την F ως προς την standard ορθοκανονική βάση $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$.