ΚΕΦ. 2: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ.

Θεωρούμε το σύνολο όλων των διατεταγμένων ν-άδων πραγματικών αριθμών.

Έστω $\vec{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)$ στοιχείο του παραπάνω συνόλου.

$\vec{A}$: διάνυσμα

α_i: συντεταγμένες του $\vec{A}$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$.

__Πράξεις__

$\vec{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)$ $\vec{B}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\nu)$

$\vec{A}+\vec{B}=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\ldots,\alpha_\nu+\beta_\nu)$.

$\lambda\vec{A}=\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\ldots,\lambda\alpha_\nu)$ $\lambda\in\mathbb{R}$.

__Ορ.__: Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ν-άδων πραγματικών αριθμών (που ονομάζουμε διανύσματα) εφοδιασμένο με τις δύο παραπάνω πράξεις, το ονομάζουμε ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΧΩΡΟ $\mathbb{R}^\nu$.

Ιδιότητες πράξεων.

$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{\Gamma}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{\Gamma})$

$\vec{A}+\vec{0}=\vec{A}$

$\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{0}$ όπου $-\vec{A}=(-1)\vec{A}$

$\lambda(\mu\vec{A})=(\lambda\mu)\vec{A}$ $(\lambda+\mu)\vec{A}=\lambda\vec{A}+\mu\vec{A}$

$\lambda(\vec{A}+\vec{B})=\lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$, $1\vec{A}=\vec{A}$

$0\vec{A}=\vec{0}$

Ορ. Έστω $\vec{u},\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_k\in\mathbb{R}^\nu$. Εάν $\vec{u}=\lambda_1\vec{u}_1+\cdots+\lambda_k\vec{u}_k$, όπου $\lambda_i\in\mathbb{R}$, τότε θα λέμε ότι το $\vec{u}$ είναι ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ των $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_k$ (ή ότι το $\vec{u}$ παράγεται από αυτά).

π.χ. $(5,-7,0)=(7)(1,-1,0)+(2)(1,1,0)+(-2)(2,1,0)$

Το $(5,-7,0)$ μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των $(1,-1,0),(1,1,0),(2,1,0)$.

ΥΠΟΧΩΡΟΣ..

Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^\nu$. Το V, θα ονομάζεται **υπόχωρος** του $\mathbb{R}^\nu$, εάν:

(1) όταν $\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} \in V$

(2) όταν $\vec{u} \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\vec{u} \in V$

Το V είναι κλειστό ως προς τις δύο πράξεις.

ΑΣΚΗΣΗ: Να αποδειχθεί ότι το σύνολο V των διανυσμάτων (a,b,c) του $\mathbb{R}^3$, που ικανοποιούν την σχέση $2a+b-c=0$ ορίζουν ένα υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.

Αποδ: Έστω $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$ διανύσματα που ανήκουν στο V.

Τότε έχουμε

$\vec{u}_1+\vec{u}_2=(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2)$. Όμως

$$2(a_1+a_2)+(b_1+b_2)-(c_1+c_2)=(2a_1+b_1-c_1)+(2a_2+b_2-c_2)=0+0=0$$

διότι $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V$.

Άρα $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in V.$ — (1)

Εάν $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε το διάνυσμα

$$\lambda \vec{u}_1 = \lambda(a_1, b_1, c_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1)$$

Όμως

$$2(\lambda a_1) + (\lambda b_1) - (\lambda c_1) = \lambda(2a_1 + b_1 - c_1) =$$

$$= \lambda \underbrace{0}_{\text{διότι } \vec{u}_1 \in V} = 0.$$

Άρα $\lambda \vec{u}_1 \in V.$ — (2).

Από (1) και (2), έχουμε ότι το V είναι ΥΠΟΧΩΡΟΣ του $\mathbb{R}^3$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

1) Έστω V διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^\nu$ και έστω $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in V$. Κάθε διάνυσμα $\vec{u}$, που μπορεί να εκφρασθεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ θα ανήκει επίσης στο V.

2) Έστω $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^\nu$. Το σύνολο V όλων των διανυσμάτων που μπορούν να εκφρασθούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^\nu$.

<u>Αποδ.</u> Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Τότε

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{u}_k \quad \text{και} \quad \vec{v} = \lambda_1' \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k' \vec{u}_k$$

Έχουμε

$$\vec{u} + \vec{v} = (\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{u}_k) + (\lambda_1' \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k' \vec{u}_k) =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_1') \vec{u}_1 + \cdots + (\lambda_k + \lambda_k') \vec{u}_k .$$

Άρα $\vec{u} + \vec{v} \in V$.

Επίσης εάν $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda \vec{u} = \lambda(\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{u}_k) = (\lambda\lambda_1)\vec{u}_1 + \cdots + (\lambda\lambda_k)\vec{u}_k$$

Άρα $\lambda \vec{u} \in V$.

Επομένως το V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^\nu$.

3) Στην παρατήρηση ②, θα λέμε ότι ο υπόχωρος V ΠΑΡΑΓΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ και θα συμβολίζεται με $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k)$.

ΑΣΚΗΣΗ: Εάν $\vec{u}_1 = (1,-1,0)$, $\vec{u}_2 = (1,1,0)$, $\vec{u}_3 = (2,1,0)$, το διάνυσμα $\vec{A} = (5,-7,0)$ ανήκει στο $L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$;

Απ. Το $\vec{A} \in L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \Longleftrightarrow$ υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ έτσι ώστε

$$\vec{A} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 \Longleftrightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

έτσι ώστε

$$(5,-7,0) = \lambda_1 (1,-1,0) + \lambda_2 (1,1,0) + \lambda_3 (2,1,0)$$

$\Longleftrightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ που να ικανοποιούν το

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 5$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -7$$
$$0 = 0$$

$\Leftrightarrow$ το παρακάτω γραμμικό σύστημα είναι συμβατό

$$\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=5$$
$$-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-7$$
$$0=0.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots\cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 6 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\lambda_1+\lambda_3/2=6$$
$$\lambda_2+\frac{3\lambda_3}{2}=-1$$
$$0=0$$

Το γ.σ. έχει άπειρο αριθμό λύσεων.

Άρα $(5,-7,0)\in L(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$.

Γραμμική ανεξαρτησία.

Τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν ισχύει μια από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

(1) Κάποιο απ' αυτά μπορεί να εκφρασθεί σαν γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

(2) Η διανυσματική εξίσωση

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

έχει μη-μηδενική λύση.

(Απόδειξη:

$(1) \Rightarrow (2)$.

Έστω ότι το $\vec{u}_1$ μπορεί να εκφρασθεί σαν Γ.Σ. των υπόλοιπων. Δηλ.

$\exists\ t_1, t_2, \dots, t_{k-1} \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\vec{u}_1 = t_1\vec{u}_2 + \cdots + t_{k-1}\vec{u}_k$$

Οπότε

$$(-1)\vec{u}_1 + t_1\vec{u}_2 + \cdots + t_{k-1}\vec{u}_k = \vec{0}.$$

Άρα η διανυσματική εξίσωση

$\lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{u}_k = \vec{0}$, έχει και μη-μηδενικές λύσεις. Επομένως ισχύει η (2).

(2) ⇒ (1) Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $t_1, \dots, t_k$, όχι όλοι μηδέν, έτσι ώστε

$$t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \cdots + t_k\vec{u}_k = \vec{0}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $t_1 \neq 0$. Τότε έχουμε

$$\vec{u}_1 = \left(-\frac{t_2}{t_1}\right)\vec{u}_2 + \cdots + \left(-\frac{t_k}{t_1}\right)\vec{u}_k$$

δηλ. το $\vec{u}_1$ μπορεί να εκφρασθεί σαν Γ.Σ. των υπόλοιπων, και άρα ισχύει η (1).)

Διανύσματα που δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα, θα τα ονομάζουμε ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ.

δηλ.

Τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ είναι ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ εάν η διανυσματική εξίσωση

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

έχει για μόνη λύση, την μηδενική.

<u>Άσκηση</u>: Τα διανύσματα

$\vec{v}_1 = (1,-2,3)$, $\vec{v}_2 = (5,6,-1)$, $\vec{v}_3 = (3,2,1)$

είναι ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ή ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ;

<u>Απ</u>. Θα εξετάσουμε τι είδους λύσεις έχει η διανυσματική εξίσωση,

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\lambda_1(1,-2,3) + \lambda_2(5,6,-1) + \lambda_3(3,2,1) = (0,0,0)$$

δηλ. Θα εξετάσουμε τις λύσεις του γραμμικού συστήματος

$$\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$$

$$-2\lambda_1 + 6\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

$$3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots\cdots \overset{G-J}{} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\lambda_1 + \lambda_3/2 = 0$$

$$\lambda_2 + \lambda_3/2 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\lambda_3 = t, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3/2 = -\frac{t}{2} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Το γραμμικό σύστημα έχει και μη-μηδενικές λύσεις. Άρα τα $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ είναι Γ.Ε.

Παρατηρήσεις:

1) Το $\vec{0}$ δεν μπορεί να ανήκει σε μια συλλογή ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

Απ. Έστω $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ συλλογή Γ.Α διανυσμάτων και έστω $\vec{u}_1 = \vec{0}$.

Η διανυσματική εξίσωση

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

έχει και μη-μηδενικές λύσεις. ┐

π.χ. την $\lambda_1 = t$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_k = 0$, ΑΤΟΠΟ

όπου $t \neq 0$.

2) Κάθε υποσύνολο ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ θα αποτελείται από ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

Απ. Έστω $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ σύνολο Γ.Α. διανυσμάτων, και έστω ότι τα διαν.

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ (όπου $m<k$) είναι Γ.Ε.

Αυτό σημαίνει ότι $\exists\, t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$, όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε

$$t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + \cdots + t_m\vec{u}_m = \vec{0}$$

Όμως σ'αυτήν την περίπτωση και η διανυσματική εξίσωση

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_m\vec{u}_m + \lambda_{m+1}\vec{u}_{m+1} + \cdots + \lambda_k\vec{u}_k = \vec{0}$$

θα έχει μη-μηδενικές λύσεις

(π.χ. την (ΑΤΟΠΟ)

$\lambda_1 = t_1, \ldots, \lambda_m = t_m, \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_k = 0$)

3) Κάθε υπερσύνολο ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ, αποτελείται επίσης από ΓΡΑΜΜΙΚΩΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

Απ. Άσκηση.

Βάση.

Έστω V υπόχωρος του $\mathbb{R}^\nu$ και έστω $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in V$. Τα παραπάνω διανύσματα θα λέμε ότι αποτελούν βάση για το V, εάν

(i) Τα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ είναι Γ.Α.

και (ii) $V = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$

π.χ. Βάσεις του $\mathbb{R}^2$

α) $\hat{e}_1 = (1,0)$, $\hat{e}_2 = (0,1)$

$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0)$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0$

$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$

β) $\vec{u}_1 = (3,0)$, $\vec{u}_2 = (1,1)$

$\lambda_1(3,0) + \lambda_2(1,1) = (0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{3}(3,0) + x_2(1,1)$$

Θεώρημα: Κάθε διανυσματικός υπόχωρος V του $\mathbb{R}^\nu$ έχει βάση.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω V υπόχωρος του $\mathbb{R}^\nu$ και έστω ότι το σύνολο $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ αποτελεί βάση για το V. Τότε κάθε συλλογή m διανυσμάτων, όπου $m>k$, θα είναι συλλογή Γ.Ε. διανυσμάτων.

<u>Θεώρημα</u>: Όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού υπόχωρου V του $\mathbb{R}^\nu$ έχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων (Ο αριθμός αυτός ονομάζεται διάσταση του V και συμβολίζεται με $\dim V$)

<u>Αποδ</u>: Έστω $S=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ και $S'=\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ δύο βάσεις του V.
Επειδή το S αποτελεί βάση του V και επειδή τα $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$ είναι Γ.Α.

Θα έχουμε από το προηγούμενο Θεώρημα,

$$m \leq k \qquad -(1)$$

Τώρα επειδή το S' είναι βάση του V και επειδή τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ είναι Γ.Α. θα έχουμε πάλι από το προηγούμενο Θεώρημα

$$k \leq m \qquad -(2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει $k = m$.

Θεώρημα: Έστω V υπόχωρος του $\mathbb{R}^\nu$ και έστω $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ βάση του V. Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha} \in V$ μπορεί να εκφρασθεί σαν Γ.Σ. των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ με ένα και μοναδικό τρόπο.

Αποδ: Έστω ότι

$$\vec{\alpha} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_k \vec{u}_k = \lambda_1' \vec{u}_1 + \lambda_2' \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_k' \vec{u}_k$$

Άρα

$$(\lambda_1-\lambda_1')\vec{u}_1+(\lambda_2-\lambda_2')\vec{u}_2+\dots\dots+(\lambda_k-\lambda_k')\vec{u}_k=\vec{0}$$

Όμως τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ είναι Γ.Α. και επομένως η παραπάνω διανυσματική εξίσωση, θα πρέπει να έχει για μόνη λύση την μηδενική.

Άρα $\lambda_1=\lambda_1'$
$\lambda_2=\lambda_2'$
$\vdots$
$\lambda_k=\lambda_k'$

Θ<u>εώρη</u>μα: Εάν ένας υπόχωρος V περιέχεται σ' έναν άλλο υπόχωρο W, τότε $\dim V \leq \dim W$.

Ισότητα ισχύει μόνον εάν $V=W$.

Άσκηση.

Τα διανύσματα $(3,1,-4)$, $(2,5,6)$, $(1,4,8)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$;

Λύση:

$$\lambda_1(3,1,-4)+\lambda_2(2,5,6)+\lambda_3(1,4,8)=(0,0,0)$$

$$3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0$$

$$\lambda_1+5\lambda_2+4\lambda_3=0$$

$$-4\lambda_1+6\lambda_2+8\lambda_3=0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ -4 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right] \overset{G-J}{\sim \cdots\cdots \sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\lambda_1=0$$

$$\lambda_2=0$$

$$\lambda_3=0$$

Άρα τα διανύσματα είναι Γ.Α.

Για να αποδείξουμε ότι τα

αποτελούν Βάση του $\mathbb{R}^3$

$(3,1,-4), (2,5,6), (1,4,8)$, θα πρέπει να

αποδείξουμε επίσης ότι

$\mathbb{R}^3 = L((3,1,-4),(2,5,6),(1,4,8)) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ Κάθε διάνυσμα $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{R}^3$

μπορεί να εκφρασθεί σαν Γ.Σ. των

$(3,1,-4), (2,5,6), (1,4,8) \Longleftrightarrow$

$\exists \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = t_1(3,1,-4) + t_2(2,5,6) + t_3(1,4,8)$

$\Longleftrightarrow \exists \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ που να ικανοποιούν

το σύστημα

$$3t_1 + 2t_2 + t_3 = \alpha_1$$

$$t_1 + 5t_2 + 4t_3 = \alpha_2$$

$$-4t_1 + 6t_2 + 8t_3 = \alpha_3$$

$\forall \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

.... κ.τ.λ.π.

$$\vec{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$$

$$\vec{B} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu) \cdot (\beta_1, \ldots, \beta_\nu) = \alpha_1 \beta_1 + \cdots + \alpha_\nu \beta_\nu$$

εσωτερικό γινόμενο των $\vec{A}, \vec{B}$.

$$|\vec{A}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_\nu^2}$$

Μέτρο του $\vec{A}$

Εάν $|\vec{A}| = 1$, το $\vec{A}$ ονομάζεται μοναδιαίο διάνυσμα. (Συνήθως συμβολίζεται με $\hat{A}$)

Παρατηρήσεις.

1) $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$

2) $\dfrac{1}{|\vec{A}|} \vec{A} = \left(\dfrac{\alpha_1}{|\vec{A}|}, \dfrac{\alpha_2}{|\vec{A}|}, \ldots, \dfrac{\alpha_\nu}{|\vec{A}|} \right) = \hat{A}$

$$pr_{\vec{p}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{p}}{\vec{p}\cdot\vec{p}}\right)\cdot\vec{p}$$

Προβολή του διανύσματος $\vec{u}$ πάνω στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{p}$.

Ορθοκανονικές βάσεις.

Ορ. Μια βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ ενός υπόχωρου V, θα λέμε ότι είναι ορθογώνια βάση αν τα διανύσματά της είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους εαν δηλ.

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ όταν $i \neq j$, όπου $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$

Εάν τα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k$ είναι επιπλέον μοναδιαία τότε η βάση ονομάζεται ορθοκανονική.

Διαδικασία ορθογωνοποίησης Gramm-Schmidt.

Ξεκινώντας από μια οποιαδήποτε βάση $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ του V κατασκευάζουμε μια ορθοκανονική βάση του V.

Θεώρημα: Έστω V υπόχωρος του $\mathbb{R}^\nu$ και $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ βάση του V. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1$$

$$\vec{e}_j = \vec{u}_j - \sum_{i=1}^{j-1} pr_{\vec{e}_i} \vec{u}_j \quad (j = 2, 3, \dots, k)$$

Το σύνολο $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\}$ αποτελεί ορθογώνια βάση του V.

Θεώρημα: Εάν το σύνολο $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k\} = S$ είναι ορθογώνια βάση του υπόχωρου V, τότε το σύνολο $S' = \left\{ \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}, \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}, \dots, \frac{\vec{e}_k}{|\vec{e}_k|} \right\}$ είναι ορθοκανονική βάση του.

π.χ.

Βάση: $\vec{u}_1=(1,1,1)$, $\vec{u}_2=(0,1,1)$, $\vec{u}_3=(0,0,1)$

του $\mathbb{R}^3$

$$\vec{e}_1=\vec{u}_1=(1,1,1)$$

$$\vec{e}_2=\vec{u}_2-pr_{\vec{e}_1}\vec{u}_2=\vec{u}_2-\left(\frac{\vec{u}_2\cdot\vec{e}_1}{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1}\right)\cdot\vec{e}_1=$$

$$=(0,1,1)-\left(\frac{2}{3}\right)(1,1,1)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

$$\vec{e}_3=\vec{u}_3-(pr_{\vec{e}_1}\vec{u}_3+pr_{\vec{e}_2}\vec{u}_3)=\vec{u}_3-\left(\left(\frac{\vec{u}_3\cdot\vec{e}_1}{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1}\right)\vec{e}_1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\vec{u}_3\cdot\vec{e}_2}{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2}\right)\vec{e}_2\right)=\ldots\ldots=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Άρα $\hat{e}_1=\dfrac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\hat{e}_2=\frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\hat{e}_3=\frac{\vec{e}_3}{|\vec{e}_3|}=\ldots\ldots$$

Αποδ: Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το S' αποτελεί βάση του V.

Θεωρούμε την διανυσματική εξίσωση

$$\lambda_1 \frac{\vec{e_1}}{|\vec{e_1}|} + \cdots\cdots + \lambda_k \frac{\vec{e_k}}{|\vec{e_k}|} = \vec{0}$$

Ας υποθέσουμε ότι έχει μη-μηδενική λύση, π.χ. την $\lambda_1 = t_1, \ldots\ldots, \lambda_k = t_k$

Όμως σ' αυτή την περίπτωση η δ.ε.

$$\lambda_1 \vec{e_1} + \cdots\cdots + \lambda_k \vec{e_k} = \vec{0}$$

θα έχει επίσης μη-μηδενική λύση·

την $\lambda_1 = \dfrac{t_1}{|\vec{e_1}|}, \ldots\ldots, \lambda_k = \dfrac{t_k}{|\vec{e_k}|}$ ΑΤΟΠΟ διότι το S είναι βάση

Άρα το S' αποτελείται από Γ.Α. διανύσματα.

Έστω $\vec{x} \in V$. Επειδή το S είναι βάση, θα έχουμε ότι $\exists\, t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$

τ.ω.

$$\vec{x} = t_1\vec{e_1} + \cdots + t_k\vec{e_k}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = (t_1)\left(\frac{|\vec{e_1}|}{|\vec{e_1}|}\right)\vec{e_1} + \cdots + (t_k)\left(\frac{|\vec{e_k}|}{|\vec{e_k}|}\right)\vec{e_k}$$

$$\Rightarrow (t_1)(|\vec{e_1}|)\frac{\vec{e_1}}{|\vec{e_1}|} + \cdots + t_k(|\vec{e_k}|)\frac{\vec{e_k}}{|\vec{e_k}|} = \vec{x}$$

Επομένως κάθε στοιχείο $\vec{x}$ του V μπορεί να εκφρασθεί σαν Γ.Σ. των στοιχείων του S'.

Άρα το S' αποτελεί βάση του V.

Η βάση αυτή είναι ορθογώνια διότι,

$\forall\, i, j = 1, 2, \ldots, k$ όπου $i \neq j$, $\dfrac{\vec{e_i}}{|\vec{e_i}|} \cdot \dfrac{\vec{e_j}}{|\vec{e_j}|} = \dfrac{1}{|\vec{e_i}||\vec{e_j}|}(\vec{e_i} \cdot \vec{e_j}) = 0$

Προφανώς το S' είναι ορθοκανονική, διότι κάθε στοιχείο του S' είναι μοναδιαίο διάνυσμα.

Συμπληρωματικοί υπόχωροι.

Έστω V και W υπόχωροι του $\mathbb{R}^\nu$. Θεωρούμε το σύνολο

$$K = \{ \vec{u} \mid \vec{u} = \vec{v} + \vec{w},\ \vec{v} \in V \text{ και } \vec{w} \in W \}$$

Το K είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^\nu$.

Αποδ: Έστω $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ στοιχεία του K.

Αυτό σημαίνει ότι, $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{w}_1$ και $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \vec{w}_2$, όπου $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ και $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$. Τότε

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (\vec{v}_1 + \vec{w}_1) + (\vec{v}_2 + \vec{w}_2) = (\underbrace{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}_{\in V}) + (\underbrace{\vec{w}_1 + \vec{w}_2}_{\in W})$$

Άρα $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in K$.

Επίσης εάν $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\lambda \vec{u}_1 = \lambda(\vec{v}_1 + \vec{w}_1) = \underbrace{\lambda \vec{v}_1}_{\in V} + \underbrace{\lambda \vec{w}_1}_{\in W}$$

Άρα $\lambda \vec{u}_1 \in K$.

Επομένως το K είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^\nu$.

Ο υπόχωρος K ονομάζεται άθροισμα των V και W (Συμβολίζεται με $K = V + W$.)

Τώρα εάν $\mathbb{R}^{\nu} = V + W$ και $V \cap W = \{\vec{0}\}$ τότε λέμε ότι οι V, W είναι συμπληρωματικοί υπόχωροι και επίσης ότι ο διαν. χώρος $\mathbb{R}^{\nu}$ είναι το ευθύ άθροισμα των V, W. Αυτό συμβολίζεται με $\mathbb{R}^{\nu} = V \oplus W$.

Θεώρημα: Ο $\mathbb{R}^{\nu}$ αποτελεί το ευθύ άθροισμα των V και W $\Longleftrightarrow$ κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathbb{R}^{\nu}$ μπορεί να εκφρασθεί μ' έναν και μοναδικό τρόπο στην μορφή $\vec{x} = \vec{v} + \vec{w}$, όπου $\vec{v} \in V$ και $\vec{w} \in W$.

Αποδ.

$\Longrightarrow$

Έστω ότι

$$\vec{x} = \vec{v}+\vec{w} = \vec{v}'+\vec{w}' \qquad \vec{v},\vec{v}' \in V, \quad \vec{w},\vec{w}' \in W$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{v}-\vec{v}' = \vec{w}'-\vec{w}$$

Όμως $\vec{v}-\vec{v}' \in V$ και $\vec{w}'-\vec{w} \in W$. Άρα $\vec{v}-\vec{v}' = \vec{w}'-\vec{w} \in V\cap W$ και επειδή $V\cap W=\{\vec{0}\}$, $\vec{v}-\vec{v}'=\vec{w}'-\vec{w}=\vec{0}$ δηλ. $\vec{v}=\vec{v}'$ και $\vec{w}=\vec{w}'$.

$\Longleftarrow$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $V\cap W=\{\vec{0}\}$.

Έστω $\vec{x}\in V\cap W$. Έχουμε $\underbrace{\vec{x}}_{\in V}+\underbrace{\vec{0}}_{\in W}=\underbrace{\vec{0}}_{\in V}+\underbrace{\vec{x}}_{\in W}$.

Άρα $\vec{x}=\vec{0}$ από την μοναδικότητα της έκφρασης $\vec{x}=\vec{v}+\vec{w}$.

1

- Να βρεθεί ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με λύση τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{u}_1=(1,0,-1,0)$, $\vec{u}_2=(-1,2,0,1)$, $\vec{u}_3=(1,2,-2,1)$.

Απ.

$$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in L(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\Leftrightarrow$$

$\exists\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+\lambda_3\vec{u}_3 \Leftrightarrow$

το σύστημα
$$\begin{aligned}\lambda_1+(-\lambda_2)+\lambda_3&=x_1\\ 0\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3&=x_2\\ -\lambda_1+0\lambda_2+(-2\lambda_3)&=x_3\\ 0\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=x_4\end{aligned}$$
έχει

λύση.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&x_1\\0&2&2&x_2\\-1&0&-2&x_3\\0&1&1&x_4\end{array}\right]\overset{G-J}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&x_1\\0&2&2&x_2\\0&-1&-1&x_1+x_3\\0&1&1&x_4\end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2/2 \\ 0 & -1 & -1 & x_1+x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1+x_3+x_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4-x_2/2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1+\frac{x_2}{2} \\ 0 & 1 & 1 & x_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & x_1+x_3+x_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4-x_2/2 \end{array}\right]$$

Το γραμμικό σύστημα που έχει ως επαυξημένο πίνακά του, τον παραπάνω πίνακα Α.Κ.Μ. θα έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό. Επίσης αυτό θα είναι συμβατό $\Longleftrightarrow$ ικανοποιούνται οι απαλοίφουσες εξισώσεις του $\Longleftrightarrow$

το γ.σ. $\begin{array}{l} x_1+x_3+x_2/2=0 \\ x_4-x_2/2=0 \end{array}$ ικανοποιείται.

Άρα

$$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in L(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3) \Longleftrightarrow \begin{matrix} x_1+\frac{x_2}{2}+x_3=0 \\ x_4-\frac{x_2}{2}=0 \end{matrix}$$

- Θεωρούμε τα διανύσματα (a,b,c,d) του $\mathbb{R}^4$ για τα οποία ισχύει $d=a+b$ και $c=a-b$. Να αποδειχθεί ότι αποτελούν υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ και να βρεθεί η διάστασή του.

Απ. Έστω V το σύνολο των διανυσμάτων που εξετάζουμε και έστω $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1,d_1)$ $\vec{u}_2=(a_2,b_2,c_2,d_2)$ διανύσματα που ανήκουν στο V. Έχουμε

$$\vec{u}_1+\vec{u}_2=(a_1,b_1,c_1,d_1)+(a_2,b_2,c_2,d_2)=$$

$$=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2)$$

Όμως $d_1+d_2=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)$ διότι $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in V$

$$=(a_1+a_2)+(b_1+b_2) \quad -(1)$$

και

$$c_1 + c_2 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \quad \text{διότι } \vec{u_1}, \vec{u_2} \in V$$

$$= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \quad -(2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\vec{u_1} + \vec{u_2} \in V$.

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{u_1} = (a_1, b_1, c_1, d_1) \in V$

Έχουμε

$$\lambda \vec{u_1} = \lambda (a_1, b_1, c_1, d_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1)$$

Όμως $\lambda d_1 = \lambda (a_1 + b_1)$ διότι $\vec{u_1} \in V$

$$= \lambda a_1 + \lambda b_1 \quad -(3)$$

και

$$\lambda c_1 = \lambda (a_1 - b_1) \quad \text{διότι } \vec{u_1} \in V$$

$$= \lambda a_1 - \lambda b_1 \quad -(4)$$

Από (3) και (4) έχουμε

$\lambda \vec{u_1} \in V$.

Άρα V υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

Έστω $\vec{u} = (a, b, c, d)$ τυχαίο διάνυσμα του V. Έχουμε

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Τα διανύσματα $(1,0,1,1)$, $(0,1,-1,1)$ παράγουν τον υπόχωρο V και προφανώς είναι Γ.Α.

(

$$\lambda_1(1,0,1,1)+\lambda_2(0,1,-1,1)=(0,0,0,0)$$

$$\lambda_1=0$$

$$\lambda_2=0$$

$$\lambda_1-\lambda_2=0$$

$$\lambda_1+\lambda_2=0$$

)

Άρα αποτελούν βάση του V και επομένως $\dim(V)=2$.

- Αποτελούν τα διανύσματα $(3,1,-4)$, $(2,5,6)$ και $(1,4,8)$ βάση του $\mathbb{R}^3$;

<u>Απ.</u> Θα εξετάσουμε πρώτα εάν τα διανύσματα είναι Γ.Α.

Θεωρούμε την δ.ε.

$$\lambda_1(3,1,-4)+\lambda_2(2,5,6)+\lambda_3(1,4,8)=(0,0,0)$$

Από την δ.ε. προκύπτει το παρακάτω ομογενές γραμμικό σύστημα που έχει τη ίδια λύση με την δ.ε.

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$$

$$-4\lambda_1 + 6\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ -4 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \overset{G.-J.}{\cdots\cdots} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Άρα το αρχικό ομογενές γραμμικό σύστημα έχει ως μόνη λύση τη μηδενική. Επομένως τα $(3,1,-4)$, $(2,5,6)$, $(1,4,8)$ είναι Γ.Α. Ορίζουμε

$$V = L\left((3,1,-4), (2,5,6), (1,4,8)\right)$$

Προφανώς $\dim V = 3$ και V υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Ο μόνος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που έχει διάσταση 3, είναι ο ίδιος ο $\mathbb{R}^3$. Άρα $L((3,1,-4),(2,5,6),(1,4,8)) = \mathbb{R}^3$ και άρα τα διανύσματα $(3,1,-4),(2,5,6),(1,4,8)$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.