• Ανήκει το διάνυσμα $\vec{u}=(2,1,-1)$ στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$\vec{v}_1=(1,-1,1),\ \vec{v}_2=(3,2,-1);$$

Απ. Ορίζουμε $V=L(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$.

Το $\vec{u}\in V \Longleftrightarrow$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί k_1, k_2 τέτοιοι ώστε

$$(2,1,-1)=k_1(1,-1,1)+k_2(3,2,-1)$$

$\Longleftrightarrow$ το γραμμικό σύστημα

$$k_1+3k_2=2$$

$$-k_1+2k_2=1$$

$$k_1-k_2=-1$$

έχει λύση.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -1 & -3 & -2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 4 & 12/5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & -4 & -3 \end{array}\right] \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ \substack{0 \\ 0} & \substack{1 \\ -3} & \substack{3/5 \\ -9/5} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Το γραμμικό σύστημα $k_1 = 1/5$

$k_2 = 3/5$

$0 = 1$

που έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό, δεν είναι συμβατό.

Άρα $\vec{u} \notin V$.

- Θεωρούμε το σύνολο διανυσμάτων

$$S = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 + a_2 + a_3 = 0\}.$$

(α). Να αποδειχθεί ότι το S είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(b). Να βρεθεί μια βάση του S και στην συνέχεια μια ορθοκανονική βάση του S.

Απ.

(α). Έστω $\vec{u}_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\vec{u}_2=(\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_3)$ στοιχεία του S. Τότε

$$\vec{u}_1+\vec{u}_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+(\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_3)=$$
$$=(\alpha_1+\alpha'_1,\alpha_2+\alpha'_2,\alpha_3+\alpha'_3)$$

Όμως $\alpha_1+\alpha'_1+\alpha_2+\alpha'_2+\alpha_3+\alpha'_3=$

$$=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha'_1+\alpha'_2+\alpha'_3)$$
$$=\underbrace{0}_{\text{διότι } \vec{u}_1\in S}+\underbrace{0}_{\text{διότι } \vec{u}_2\in S}=0.$$

Άρα $\vec{u}_1+\vec{u}_2\in S$.

Εάν $k\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$k\vec{u}_1=k(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(k\alpha_1,k\alpha_2,k\alpha_3).$$

Όμως $k\alpha_1+k\alpha_2+k\alpha_3=k(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$

$$=k\underbrace{0}_{\text{διότι } \vec{u}_1\in S}=0.$$

Άρα $k\vec{u}_1\in S$.

Επομένως S υπόχωρος.

(b). Έστω $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in S$. Τότε

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1-\alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

διότι $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$.

Τα διανύσματα $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$ παράγουν τον S και είναι Γ.Α., επομένως αποτελούν βάση του S.

Τα διανύσματα

$$\vec{e}_1 = (1,0,-1)$$

$$\vec{e}_2 = (0,1,-1) - \left(\frac{(0,1,-1)\cdot(1,0,-1)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)} \right)(1,0,-1)$$

$$= (0,1,-1) - \left(\frac{1}{2}\right)(1,0,-1)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

που προέκυψαν από την διαδικασία ορθογωνοποίησης των Gram–Schmidt αποτελούν ορθογώνια βάση του S, ενώ τα διανύσματα

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του S.