Να λυθεί το παρακάτω γραμμικό σύστημα χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gauss-Jordan:

$$x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5=1$$

$$2x_1-x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2$$

$$3x_1+2x_2-4x_3-3x_4-9x_5=3$$

Απ.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} -2 & -2 & 4 & -2 & -6 & -2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right] \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} -3 & -3 & 6 & -3 & -9 & -3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Το γραμμικό σύστημα που έχει ως επαυξημένο πίνακά του, το πίνακα Α.Κ.Μ. που έχει προκύψει είναι το εξής:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_4 + 3x_5 = 0$$

Θέτουμε $x_3 = \alpha$ και $x_5 = b$ όπου $\alpha, b \in \mathbb{R}$.
Επομένως οι λύσεις θα είναι:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2\alpha,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = -3b,\ x_5 = b,$$

όπου $\alpha, b \in \mathbb{R}$.
Όμως αυτό το γραμμικό σύστημα έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό, διότι οι επαυξημένοι πίνακές τους είναι γραμμοϊσοδύναμοι.
Άρα οι παραπάνω (άπειρες) λύσεις θα είναι λύσεις και του αρχικού συστήματος

- Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$x+y+2z=a$$

$$x+z=b$$

$$2x+y+3z=c$$

Να αποδειχθεί ότι για να είναι το παραπάνω σύστημα συμβατό, θα πρέπει $c=a+b$.

Απ.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix}-1 & -1 & -2 & -a\end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right] \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix}-2 & -2 & -4 & -2a\end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 2 & 1 & 3 & c \end{array}\right] \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & -1 & c-2a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & -1 & -1 & c-2a \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix}0 & -1 & -1 & b-a\end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right] \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array}\right]$$

Το γραμμικό σύστημα που έχει ως επαυξημένο πίνακα του, τον παραπάνω πίνακα Α.Κ.Μ., είναι το

$$x+z=b$$

$$y+z=a-b$$

$$0=c-a-b$$

Για να είναι συμβατό, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι απαλοίφουσες εξισώσεις του, δηλαδή θα πρέπει

$$b+a=c$$

Όμως αυτό, έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό γραμμικό σύστημα, άρα και το αρχικό γραμμικό σύστημα για να είναι συμβατό θα πρέπει

$$b+a=c.$$

- Έστω V το σύνολο των διανυσμάτων (x_1, x_2, x_3, x_4) του $\mathbb{R}^4$, για τα οποία ισχύει

$$x_1 = x_2 \;, \; x_3 = 2x_4$$

(i) Να αποδειχθεί ότι το V είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

(ii) Ποιά είναι η διάσταση του υπόχωρου V;

Απ. (i) Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in V$, όπου

$$\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \;, \; \vec{v} = (x_1', x_2', x_3', x_4')$$

Οπότε

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3', x_4 + x_4')$$

Επειδή $\vec{u}, \vec{v} \in V$

$$x_1 = x_2 \qquad x_3 = 2x_4$$

$$x_1' = x_2' \qquad x_3' = 2x_4'$$

Επομένως

$$x_1+x_1' = x_2+x_2' \quad \text{και} \quad x_3+x_3' = 2(x_4+x_4')$$

και άρα $\vec{u}+\vec{v} \in V$.

Έστω τώρα ότι $\lambda \in \mathbb{R}$. Οπότε

$$\lambda\vec{u} = \lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$$

Επειδή $\vec{u} \in V$,

$$x_1 = x_2 \quad , \quad x_3 = 2x_4$$

Επομένως $\lambda x_1 = \lambda x_2$, $\lambda x_3 = 2\lambda x_4$ και

άρα $\lambda\vec{u} \in V$.

Από όλα αυτά συμπεραίνουμε ότι το V είναι κλειστό ως προς τις δύο πράξεις και επομένως είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

(ii) Έστω $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6

Τα διανύσματα $(1,1,0,0)$, $(0,0,2,1)$ του V, είναι Γ.Α. και παράγουν τον V, άρα αποτελούν βάση του V και επομένως $\dim V = 2$.

- Να δοθεί παράδειγμα υποσυνόλου του $\mathbb{R}^3$, που δεν αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.

Απ. Θεωρούμε το σύνολο V που περιέχει ως στοιχεία του, όλα τα διανύσματα (a,b,c) του $\mathbb{R}^3$, για τα οποία ισχύει $b = a + c + 1$

Το V δεν μπορεί να είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, διότι πρώτα από όλα δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη της πρόσθεσης μεταξύ διανυσμάτων.
Για να αποδείξουμε το παραπάνω,

έχουμε τα εξής:

Έστω $\vec{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$ στοιχεία του V. Οπότε

$$\vec{u}_1+\vec{u}_2=(a_1+a_2,\, b_1+b_2,\, c_1+c_2).$$

Όμως επειδή $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V$,

$$b_1=a_1+c_1+1 \quad , \quad b_2=a_2+c_2+1$$

και επομένως

$$b_1+b_2=a_1+a_2+c_1+c_2+2 \neq a_1+a_2+c_1+c_2+1 .$$

Άρα $\vec{u}_1+\vec{u}_2 \notin V$.

- Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $(1,2,3)$, $(3,2,9)$, $(5,2,-1)$ του $\mathbb{R}^3$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η διανυσματική εξίσωση

$$\lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(3,2,9)+\lambda_3(5,2,-1)=(0,0,0)$$

έχει ως μόνη λύση, την μηδενική.

δηλαδή, αρκεί να αποδείξουμε ότι το παρακάτω γραμμικό σύστημα έχει ως μόνη λύση, την μηδενική.

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$$

$$2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

$$3\lambda_1 + 9\lambda_2 + (-1)\lambda_3 = 0.$$

$$\begin{array}{cccc} -2 & -6 & -10 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} -3 & -9 & -15 & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 3 & 9 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Το γραμμικό σύστημα που έχει ως επαυξημένο πίνακά του, το πίνακα Α.Κ.Μ. που προέκυψε είναι το

$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 0$
$\lambda_3 = 0$

Επομένως και το αρχικό γραμμικό σύστημα έχει ως μόνη λύση, την μηδενική.

Άρα τα διανύσματα $(1,2,3)$, $(3,2,9)$, και $(5,2,-1)$ είναι Γ.Α.