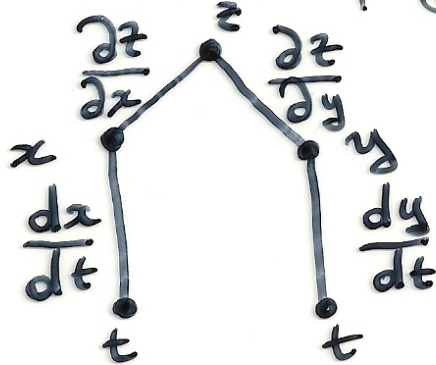


(2)

- Να βρεθεί η $\frac{dz}{dt}$ εάν
 $z = x^2 + 3xy + 5y^2$, $x = \sin t$, $y = \cos t$.

Αη. Από το δένδρο εξάρτησης των μεταβλητών και τους κανόνες αλυσωτής παραγωγής έχουμε:



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 10y + 3x,$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

Επομένως

$$\frac{dz}{dt} = (2x + 3y)(\cos t) + (10y + 3x)(-\sin t).$$

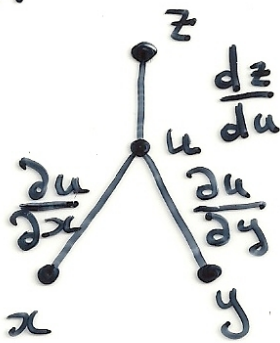
3

• Εάν $z = f\left(\frac{x-y}{y}\right)$, να αποδειχθεί
ού

$$x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + y \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0.$$

Αν. θέτουμε $u = \frac{x-y}{y}$. Από το

δένδρο εξάρτησης των μεταβλητών και τους κανόνες αλυσωτής παραχώγισης έχουμε:



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{(-x)}{y^2}$$

Επομένως

$$x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + y \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = x \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{1}{y} + y \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{(-x)}{y^2}$$

$$= x \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{1}{y} - x \frac{dz}{du} \cdot \frac{1}{y} = 0$$

• Για τη συνάρτηση $f(x,y) = x^2y + 2y^2x$ ④
 στο σημείο $P_0(1,3)$, να βρεθεί η
 κατεύθυνση γέγισης ελαττώσεως της
 της f .

Αη. Η ζητούμενη κατεύθυνση θα είναι
 αντίθετη από αυτή του διανύσματος
 κλίσης.

Για το διάνυσμα κλίσης της f
 στο σημείο $P_0(1,3)$ έχουμε:

$$\nabla f(1,3) = f_x(1,3)\hat{i} + f_y(1,3)\hat{j}.$$

Όπως

$$f_x = 2xy + 2y^2 \quad \text{και} \quad f_x(1,3) = 24$$

$$f_y = x^2 + 4yx \quad \text{και} \quad f_y(1,3) = 13$$

Επομένως

$$\nabla f(1,3) = 24\hat{i} + 13\hat{j}$$

Άρα η ζητούμενη κατεύθυνση, θα είναι
 αυτή του διανύσματος $-24\hat{i} - 13\hat{j}$.

5

• Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y)$ στο σημείο $A(2,4)$ προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\hat{i} + \hat{j}$ είναι $\sqrt{2}$ και προς την κατεύθυνση του διανύσματος $-3\hat{i}$ είναι 4. Ποια είναι η παράγωγος της f στην κατεύθυνση του διανύσματος $3\hat{i} - 4\hat{j}$;

Απ. Η παράγωγος κατά κατεύθυνση θ για συνάρτησης f σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, ισούται με το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος κλίσης της f στο παραπάνω σημείο και ενός μοναδιαίου διανύσματος που έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτήν ως προς την οποία αναφέρεται η παράγωγος. Άρα από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$(f_x(2,4)\hat{i} + f_y(2,4)\hat{j}) \cdot \left(\frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$$

$$(f_x(2,4)\hat{i} + f_y(2,4)\hat{j}) \cdot (-\hat{i}) = 4$$

Από την λύση του παραπάνω συστήματος προκύπτει:

$$f_x(2,4) = -4 \quad \text{και} \quad f_y(2,4) = 6.$$

Οπότε η παράγωγος της f στο σημείο $A(2,4)$ προς την κατεύθυνση του $3\hat{i} - 4\hat{j}$ ισούται με:

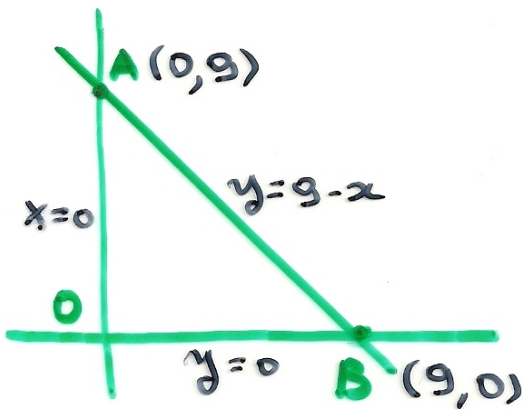
$$\begin{aligned} & (f_x(2,4)\hat{i} + f_y(2,4)\hat{j}) \cdot \left(\frac{3\hat{i} - 4\hat{j}}{5}\right) = \\ & = (-4\hat{i} + 6\hat{j}) \cdot \left(\frac{3\hat{i} - 4\hat{j}}{5}\right) = \frac{-36}{5} \end{aligned}$$

6

- Βρείτε το ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο της $f = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ στην τριγωνική πλάκα, στο πρώτο τεταρτηγώριο που περιορίζεται από τις ευθείες $x=0, y=0, y=9-x$.

Αη.

Η f είναι συνεχής στην παραπάνω συγπαχή περιοχή (κλειστή περιοχή και φραγμένη). Άρα η f έχει στην περιοχή αυτή ολικά ακρότατα σημεία. Αυτά θα αναζητηθούν στα Ε.Σ.Σ. της f , τα



Δ.Σ.Σ. του συνόρου και τις κορυφές του συνόρου.

Ε.Σ.Σ.: $f_x = 2 - 2x = 0$ } $\Rightarrow x = 1$
 $f_y = 2 - 2y = 0$ } $y = 1$

Άρα $(1,1)$ Ε.Σ.Σ.

Δ.Σ.Σ.: $x=0$, $f = 2 + 2y - y^2$, $f' = -2y + 2 = 0$

$\Rightarrow y = 1$. Άρα $(0,1)$ Δ.Σ.Σ.

Για $y=0$, $f = 2 + 2x - x^2$, $f' = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$.
 Άρα $(1,0)$ Δ.Σ.Σ.

(7)

Γιου $y=9-x$, $f=2+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2$

$$= 2+2x+18-2x-x^2-81+18x-x^2$$

$$= -2x^2+18x-61$$

$$f' = -4x+18=0 \Rightarrow x=\frac{9}{2}$$

Άρα $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$ Δ.Σ.Σ.

ΚΟΡΥΦΕΣ: $O(0,0)$, $A(0,9)$, $B(9,0)$.

Στην συνέχεια θα πρέπει να βρούμε τις
 κριτές της f , στα σημεία που έχω προκύψει
 ως Ε.Σ.Σ., Δ.Σ.Σ. και κορυφές.

$$f(1,1)=4, f(1,0)=3, f(0,1)=3, f(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})=\frac{-41}{2},$$

$$f(0,0)=2, f(9,0)=-61, f(0,9)=-61$$

Άρα η ολική μέγιστη κριτή της f
 ισούται με 4 και η ολική ελάχιστη
 κριτή της f ισούται με -61.