Έστω γραμμική απεικόνιση $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ (1)

όπου $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους $\mathrm{Im}F$, $\ker F$.

Απ. Ο υπόχωρος $\mathrm{Im}F$ ταυτίζεται με τον στηλοχώρο του A, άρα για να βρούμε βάση του $\mathrm{Im}F$, αρκεί να βρούμε βάση για τον στηλοχώρο του A.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα μια βάση του υπόχωρου $\mathrm{Im}F$ είναι η $\{(1,2,0)\}$.

Ο υπόχωρος $\ker F$ είναι ο υπόχωρος των λύσεων του $A\vec{x} = \vec{0}$

δηλαδή του $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix}2&0&-1\\4&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}-4&0&2\end{array}\\\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\4&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Το αρχικό ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ θα έχει τις ίδιες λύσεις με το $x_1+0x_2-\frac{x_3}{2}=0$. Εάν θέσουμε $x_2=s$, $x_3=t$, τότε οι λύσεις του, θα είναι τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που έχουν την μορφή $\begin{pmatrix}t/2\\s\\t\end{pmatrix}$.

Όμως

$$\begin{pmatrix}t/2\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}$$

και άρα μια βάση του KerF είναι η $\{(0,1,0),(1/2,0,1)\}$.

• Έστω γραμμική απεικόνιση $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $F(\vec{x}) = A\vec{x}$

όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί βάση για τον υπόχωρο $\operatorname{Im}F$ και για τον υπόχωρο $\ker F$.

Απ. Ξέρουμε ότι,

$\operatorname{Im}F$ = στηλοχώρος του A.

Άρα για να βρούμε μια βάση για τον υπόχωρο $\operatorname{Im}F$, αρκεί να βρούμε βάση για τον στηλοχώρο του A.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \overset{G-J}{\cdots} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως τα διανύσματα $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ αποτελούν βάση του $\operatorname{Im}F$ (δηλ. $\operatorname{Im}F = \mathbb{R}^3$)

Ο πυρήνας της F είναι ο υπόχωρος των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $A\vec{x} = \vec{0}$.

Άρα για να βρούμε μια βάση για τον πυρήνα της F, αρκεί να βρούμε μια βάση για τον παραπάνω υπόχωρο.

Έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \overset{G-J}{\cdots} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 = 0$$

$$0x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 = 0$$

Άρα

$$\ker F : \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως μια βάση του kerF θα αποτελείται από το διάνυσμα

$(-1, 1, 0, 1)$

- Έστω γραμμική απεικόνιση $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ για την οποία ισχύει ότι

$$F(1,0,0,0)=(1,2,1),\ F(0,0,1,0)=(0,1,0),$$
$$F(0,1,0,0)=(1,3,0),\ F(0,0,0,1)=(1,1,1).$$

Να βρεθούν βάσεις για τους υπόχωρους $\mathrm{Im}F$ και $\mathrm{Ker}F$.

Απ. Ο τύπος της F μπορεί να εκφρασθεί στην μορφή $F(\vec{x})=A\vec{x}$ όπου ο A είναι πίνακας μεγέθους 3×4 και για τον οποίο ισχύει

$$A=[\,F(\hat{e}_1)\ \ F(\hat{e}_2)\ \ F(\hat{e}_3)\ \ F(\hat{e}_4)\,]$$

δηλαδή
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για να βρούμε βάση για τον $\mathrm{Im}F$, αρκεί να βρούμε βάση για τον στηλοχώρο του A.

$$A^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \overset{G-J}{\cdots\cdots} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα μια βάση του $Im F$ είναι η $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Ο υπόχωρος $Ker F$ ταυτίζεται με τον υπόχωρο των λύσεων του $A\vec{x}=\vec{0}$. Όμως

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\2&3&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}\sim\cdots\cdots\overset{G-J}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}.$$

Επομένως το αρχικό ομογενές γραμμικό σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ θα έχει τις ίδιες λύσεις με το

$$\begin{aligned}x_1+x_4&=0\\x_2&=0\\x_3-x_4&=0\end{aligned}$$

Οπότε οι λύσεις του συστήματος θα είναι όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ που έχουν την μορφή

$$\begin{pmatrix}-t\\0\\t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Άρα μια βάση του $Ker F$ αποτελεί το διάνυσμα $(-1,0,1,1)$.

• Να δοθεί παράδειγμα γραμμικής απεικόνισης $F:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\dim \operatorname{Im} F = \dim \operatorname{Ker} F.$$

Απ. Για την γραμμική απεικόνιση F του παραδείγματός μας, θα πρέπει να ισχύει:

$$\dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

και επειδή $\dim \operatorname{Im} F = \dim \operatorname{Ker} F$,

θα πρέπει να έχουμε ότι

$$\dim \operatorname{Im} F = \dim \operatorname{Ker} F = 2$$

Ο τύπος της F μπορεί να εκφρασθεί στην μορφή $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ όπου A πίνακας μεγέθους 4×4 και επειδή ο στηλοχώρος του A ταυτίζεται με τον $\operatorname{Im} F$, θέλουμε ο στηλοχώρος του A να έχει διάσταση 2. Ένας τέτοιος πίνακας μπορεί να είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$