- Ανήκει το διάνυσμα $\vec{u}=(2,1,-1)$ στον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$\vec{v}_1=(1,-1,1),\ \vec{v}_2=(3,2,-1);$$

Απ. Ορίζουμε $V=L(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$.

Το $\vec{u}\in V \Longleftrightarrow$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί k_1, k_2 τέτοιοι ώστε

$$(2,1,-1)=k_1(1,-1,1)+k_2(3,2,-1)$$

$\Longleftrightarrow$ το γραμμικό σύστημα

$$k_1+3k_2=2$$

$$-k_1+2k_2=1$$

$$k_1-k_2=-1$$

έχει λύση.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -1 & -3 & -2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 4 & 12/5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & -4 & -3 \end{array}\right] \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$0 \quad -3 \quad -9/5$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Το γραμμικό σύστημα

$$k_1 = 1/5$$
$$k_2 = 3/5$$
$$0 = 1$$

που έχει τις ίδιες λύσεις με το αρχικό, δεν είναι συμβατό.

Άρα $\vec{u} \notin V$.

- Θεωρούμε το σύνολο διανυσμάτων

$$S = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 + a_2 + a_3 = 0\}.$$

(α). Να αποδειχθεί ότι το S είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(b). Να βρεθεί μια βάση του S και στην συνέχεια μια ορθοκανονική βάση του S.

Απ.

(α). Έστω $\vec{u}_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\vec{u}_2=(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$ στοιχεία του S. Τότε

$$\vec{u}_1+\vec{u}_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')=$$
$$=(\alpha_1+\alpha_1',\alpha_2+\alpha_2',\alpha_3+\alpha_3')$$

Όμως $\alpha_1+\alpha_1'+\alpha_2+\alpha_2'+\alpha_3+\alpha_3'=$

$$=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_1'+\alpha_2'+\alpha_3')$$
$$= \underbrace{0}_{\text{διότι } \vec{u}_1\in S} + \underbrace{0}_{\text{διότι } \vec{u}_2\in S} = 0.$$

Άρα $\vec{u}_1+\vec{u}_2\in S$.

Εάν $k\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$k\vec{u}_1=k(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(k\alpha_1,k\alpha_2,k\alpha_3).$$

Όμως $k\alpha_1+k\alpha_2+k\alpha_3=k(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$

$$=k\underbrace{0}_{\text{διότι } \vec{u}_1\in S}=0.$$

Άρα $k\vec{u}_1\in S$.

Επομένως S υπόχωρος.

(b). Έστω $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in S$. Τότε

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1-\alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

διότι $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$.

Τα διανύσματα $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$ παράγουν τον S και είναι Γ.Α., επομένως αποτελούν βάση του S.

Τα διανύσματα

$$\vec{e}_1 = (1,0,-1)$$

$$\vec{e}_2 = (0,1,-1) - \left(\frac{(0,1,-1)\cdot(1,0,-1)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)}\right)(1,0,-1)$$

$$= (0,1,-1) - \left(\frac{1}{2}\right)(1,0,-1)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

που προέκυψαν από την διαδικασία ορθογωνοποίησης των Gram–Schmidt αποτελούν ορθογώνια βάση του S, ενώ τα διανύσματα

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του S.

- Έστω πίνακας A μεγέθους $m \times n$, πίνακας B μεγέθους $n \times p$ και πίνακας C μεγέθους $r \times q$. Τι συνθήκες θα πρέπει να ικανοποιούν τα p, q, r έτσι ώστε να ορίζονται τα γινόμενα ABC, ACB και $A.(B+C)$. Τι μέγεθος θα έχουν τα παραπάνω γινόμενα;

Απ.

$$\underset{m\times n}{A} . \underset{n \times p}{B} . \underset{r\times q}{C}$$

Για να ορίζεται ο πίνακας $A.B.C$ θα πρέπει $p=r$ και αυτός θα είναι μεγέθους $m \times q$.

$$\underset{m\times n}{A} . \underset{r\times q}{C} . \underset{n \times p}{B}$$

Για να ορίζεται ο πίνακας $A.C.B$ θα πρέπει $n=r=q$ και αυτός θα είναι μεγέθους $m \times p$.

$$\underset{m\times n}{A} . (\underset{n \times p}{B} + \underset{r\times q}{C})$$

Για να ορίζεται ο πίνακας $A.(B+C)$ θα πρέπει $n=r$, $p=q$ και αυτός θα είναι μεγέθους $m \times q$.

- Να κατασκευασθεί πίνακας A, του οποίου ο γραμμοχώρος περιέχει τα διανύσματα $(1,1)$, $(1,2)$ ενώ ο στηλοχώρος τα διανύσματα $(1,0,0)$, $(0,0,1)$.

Απ. Επειδή τα διανύσματα $(1,1)$, $(1,2)$ περιέχονται στο γραμμοχώρο του A, αυτός θα έχει 2 στήλες και επειδή τα διανύσματα $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ περιέχονται στο στηλοχώρο του A, αυτός θα έχει 3 γραμμές. Άρα ο A είναι μεγέθους 3×2.

Ένα παράδειγμα πίνακα A που έχει τις ιδιότητες, στις οποίες αναφέρεται η άσκηση, είναι ο εξής:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Προφανώς τα διανύσματα $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ ανήκουν στον στηλοχώρο του A, αλλά και τα διανύσματα $(1,1)$, $(1,2)$ ανήκουν στον γραμμοχώρο του A, διότι

$$(1,1)=(1)(1,0)+(0)(0,0)+(1)(0,1)$$

$$(1,2)=(1)(1,0)+(0)(0,0)+(2)(0,1)$$

- Να βρεθεί βάση για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^5$ που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{u}_1=(1,1,1,0,0)$, $\vec{u}_2=(1,-1,-1,1,1)$, $\vec{u}_3=(2,0,0,1,1)$, $\vec{u}_4=(0,-2,-2,1,1)$.

Απ. Ορίζουμε $V=L(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4)$

και πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Προφανώς, Γραμμοχώρος του $A = V$.

Επομένως αρκεί να βρούμε βάση για το γραμμοχώρο του A.

$$\begin{array}{c} -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} -2 \;\; -2 \;\; -2 \;\; 0 \;\; 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} 0 \;\; 2 \;\; 2 \;\; -1 \;\; -1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} 0 \;\; -1 \;\; -1 \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Α.Κ.Μ. που έχει προκύψει έχει τον ίδιο γραμμοχώρο με τον αρχικό πίνακα Α. Οι μη-μηδενικές γραμμές του πίνακα Α.Κ.Μ. αποτελούν βάση για τον γραμμοχώρο αυτού του πίνακα, άρα τα διανύσματα $(1,0,0,1/2,1/2)$, $(0,1,1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ θα

αποτελούν βάση και για τον γραμμοχώρο του A, δηλαδή για τον υπόχωρο V.

● Να βρεθεί βάση για τον στηλοχώρο του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Απ. Ο στηλοχώρος του A ταυτίζεται με τον γραμμοχώρο του A^T. Άρα αρκεί να βρούμε βάση για τον γραμμοχώρο του A^T.

$$A^T=\begin{array}{c} \begin{matrix} -3 & -6 & -3 & -6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} -4 & -8 & -4 & -8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} -2 & -4 & -2 & -4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 11 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$ αποτελούν βάση για τον γραμμοχώρο του A^T και επομένως και για τον στηλοχώρο του A.