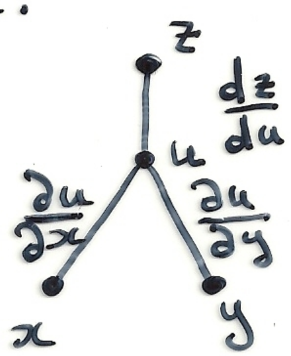
• Εάν $z=f\left(\frac{x-y}{y}\right)$, να αποδειχθεί ότι

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

Απ. Θέτουμε $u=\frac{x-y}{y}$. Από το δέντρο εξάρτησης των μεταβλητών και τους κανόνες αλυσωτής παραγώγισης έχουμε:



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{(-x)}{y^2}$$

Επομένως

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=x\cdot\frac{dz}{du}\cdot\frac{1}{y}+y\cdot\frac{dz}{du}\cdot\frac{(-x)}{y^2}$$

$$=x\cdot\frac{dz}{du}\cdot\frac{1}{y}-x\frac{dz}{du}\cdot\frac{1}{y}=0$$

④

• Για τη συνάρτηση $f(x,y)=x^2y+2y^2x$ στο σημείο $P_0(1,3)$, να βρεθεί η κατεύθυνση μέγιστης ελάττωσης στις τιμές της f.

Απ. Η ζητούμενη κατεύθυνση θα είναι αντίθετη από αυτή του διανύσματος κλίσης.

Για το διάνυσμα κλίσης της f στο σημείο $P_0(1,3)$ έχουμε:

$$\nabla f(1,3)=f_x(1,3)\hat{i}+f_y(1,3)\hat{j}.$$

Όμως

$$f_x=2xy+2y^2 \quad \text{και} \quad f_x(1,3)=24$$

$$f_y=x^2+4yx \quad \text{και} \quad f_y(1,3)=13$$

Επομένως

$$\nabla f(1,3)=24\hat{i}+13\hat{j}$$

Άρα η ζητούμενη κατεύθυνση, θα είναι αυτή του διανύσματος $-24\hat{i}-13\hat{j}$.

- Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y)$ στο σημείο $A(2,4)$ προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\hat{i}+\hat{j}$ είναι $\sqrt{2}$ και προς την κατεύθυνση του διανύσματος $-3\hat{i}$ είναι 4. Ποια είναι η παράγωγος της f στην κατεύθυνση του διανύσματος $3\hat{i}-4\hat{j}$;

Απ. Η παράγωγος κατά κατεύθυνση θ μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, ισούται με το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος κλίσης της f στο παραπάνω σημείο και ενός μοναδιαίου διανύσματος που έχει την ίδια κατεύθυνση με αυτήν ως προς την οποία αναφέρεται η παράγωγος.

Άρα από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\left(f_x(2,4)\hat{i}+f_y(2,4)\hat{j}\right)\cdot\left(\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$$

$$\left(f_x(2,4)\hat{i}+f_y(2,4)\hat{j}\right)\cdot\left(-\hat{i}\right)=4$$

Από την λύση του παραπάνω συστήματος προκύπτει:

$$f_x(2,4)=-4 \quad \text{και} \quad f_y(2,4)=6.$$

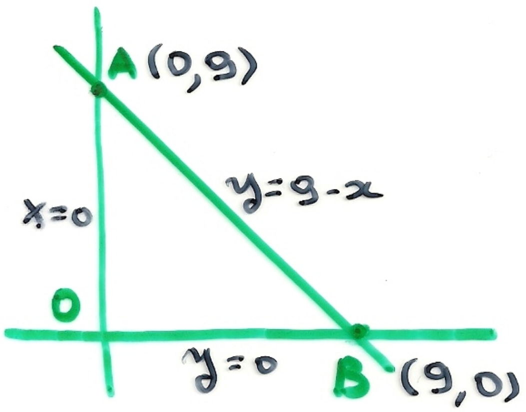
Οπότε η παράγωγος της f στο σημείο $A(2,4)$ προς την κατεύθυνση του $3\hat{i}-4\hat{j}$ ισούται με:

$$\left(f_x(2,4)\hat{i}+f_y(2,4)\hat{j}\right)\cdot\left(\frac{3\hat{i}-4\hat{j}}{5}\right)=$$

$$=\left(-4\hat{i}+6\hat{j}\right)\cdot\left(\frac{3\hat{i}-4\hat{j}}{5}\right)=\frac{-36}{5}$$

- Βρείτε το ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο της $f=2+2x+2y-x^2-y^2$ στην τριγωνική πλάκα, στο πρώτο τεταρτημόριο που περιορίζεται από τις ευθείες $x=0$, $y=0$, $y=9-x$.

Απ. Η f είναι συνεχής στην παραπάνω συμπαγή περιοχή (κλειστή περιοχή και φραγμένη). Άρα η f έχει στην περιοχή αυτή ολικά ακρότατα σημεία. Αυτά θα αναζητηθούν στα Ε.Σ.Σ. της f, τα



Δ.Σ.Σ. του συνόρου και τις κορυφές του συνόρου.

Ε.Σ.Σ: $\left.\begin{array}{l} f_x=2-2x=0 \\ f_y=2-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \end{array}$

Άρα $(1,1)$ Ε.Σ.Σ.

Δ.Σ.Σ: $x=0$, $f=2+2y-y^2$, $f'=-2y+2=0$

$\Rightarrow y=1$. Άρα $(0,1)$ Δ.Σ.Σ.

Για $y=0$, $f=2+2x-x^2$, $f'=-2x+2=0 \Rightarrow x=1$.
Άρα $(1,0)$ Δ.Σ.Σ.

Για $\underline{y=9-x}$, $f=2+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2=$

$=2+\cancel{2x}+18-\cancel{2x}-x^2-81+18x-x^2$

$=-2x^2+18x-61$

$f'=-4x+18=0 \Rightarrow x=\frac{9}{2}$

Άρα $(9/2, 9/2)$ Δ.Σ.Σ.

ΚΟΡΥΦΕΣ: $O(0,0)$, $A(0,9)$, $B(9,0)$.

Στην συνέχεια θα πρέπει να βρούμε τις τιμές της f, στα σημεία που έχουν προκύψει ως Ε.Σ.Σ., Δ.Σ.Σ. και κορυφές.

$f(1,1)=4$, $f(1,0)=3$, $f(0,1)=3$, $f(9/2,9/2)=\frac{-41}{2}$,

$f(0,0)=2$, $f(9,0)=-61$, $f(0,9)=-61$.

Άρα η ολική μέγιστη τιμή της f ισούται με 4 και η ολική ελάχιστη τιμή της f ισούται με -61.