Ορ.: Εάν $|A| \neq 0$, τότε ο πίνακας A ονομάζεται ομαλός πίνακας.

Θεώρημα: Εάν A, B τετραγωνικοί πίνακες του ίδιου μεγέθους, τότε

$$|A.B| = |A|.|B|.$$

Πόρισμα: Ο $A.B$ είναι ομαλός $\Longleftrightarrow$ αμφότερα οι A, B είναι ομαλοί.

Κεφ. 5: Αλλαγή βάσης. Ορθογώνιοι πίνακες.

Έστω διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ και έστω $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_\nu\}$ βάση του $\mathbb{R}^\nu$. Το $\vec{x}$ μπορεί να εκφρασθεί ως γ.σ. των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_\nu$ μ' έναν και μοναδικό τρόπο.

Έστω

$$\vec{x} = x_1' \vec{u}_1 + \dots + x_\nu' \vec{u}_\nu$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_\nu' \end{array}\right\}$$ συντεταγμένες του $\vec{x}$ ως προς την βάση $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_\nu\}$.

Θεωρούμε την βάση $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_\nu\}$ του $\mathbb{R}^\nu$ όπου $\hat{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\hat{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots\dots, \hat{e}_\nu = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Τότε

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_\nu) = x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots\dots + x_\nu(0, \dots, 0, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{array}\right\}$$ αρχικές συντεταγμένες του $\vec{x}$.

Σχέση <u>συντεταγμένων ως προς κάποια βάση με αρχικές συντεταγμένες.</u>

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ και έστω $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_\nu\}$ βάση του $\mathbb{R}^\nu$,

όπου

$$\vec{u}_1 = (P_{11}, P_{21}, \ldots, P_{\nu 1})$$

$$\vec{u}_2 = (P_{12}, P_{22}, \ldots, P_{\nu 2})$$

$$\vdots$$

$$\vec{u}_\nu = (P_{1\nu}, P_{2\nu}, \ldots, P_{\nu\nu})$$

Τότε έχουμε

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = x_1'(P_{11}, P_{21}, \ldots, P_{\nu 1}) + \cdots \cdots$$

$$\cdots \cdots + x_\nu'(P_{1\nu}, P_{2\nu}, \ldots, P_{\nu\nu})$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{\nu 1} & \cdots & P_{\nu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ x_\nu' \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\vec{x} = P\vec{x}'$$

διάνυσμα αρχικών συντεταγμένων

διάνυσμα των συντεταγμένων του $\vec{x}$ ως προς την βάση $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_\nu\}$

πίνακας που έχει για στήλες του τα διανύσματα της βάσης $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_\nu\}$

Άρα $P^{-1}\vec{x} = \vec{x}'$ — (*)

(Προφανώς ο P είναι αντιστρέψιμος, διότι τα διανύσματα στηλών του αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^{\nu}$ και επομένως ο βαθμός του ισούται με ν)

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου η βάση $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_\nu\}$ είναι ορθοκανονική. Σ' αυτή την περίπτωση ο πίνακας P, θα ονομάζεται <u>ορθογώνιος πίνακας</u> (δηλαδή ένας πίνακας P μεγέθους ν×ν θα ονομάζεται <u>ορθογώνιος</u> εάν τα διανύσματα στηλών του, αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{\nu}$)

Ιδιότητες ορθογωνίων πινάκων.

Θεωρ: Έστω πίνακας $A=[a_{ij}]$ μεγέθους $n\times n$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Ο A είναι ορθογώνιος.

(2) $A^{-1}=A^T$

Αποδ: Αρκεί να αποδείξουμε ότι: ο A είναι ορθογώνιος $\Longleftrightarrow A.A^T=A^T.A=I$.

Έστω

$$A^T.A=B=[b_{ij}].$$

Έχουμε

$$b_{ij}=(i\text{-γραμμή του } A^T).(j\text{-στήλη του } A)$$
$$=(i\text{-στήλη του } A).(j\text{-στήλη του } A).$$

Εάν ο A είναι ορθογώνιος τότε

$$b_{ij}=\begin{cases}0 & \text{όταν } i\neq j\\ 1 & \text{όταν } i=j\end{cases}$$ δηλ. $B=I$.

(Η απόδειξη του αντίστροφου προκύπτει με παρόμοιο τρόπο).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Εάν η νέα βάση είναι ορθοκανονική, τότε από την (*) έχουμε

$$\vec{x}\,' = P^T \vec{x}$$

διάνυσμα των συντεταγ. του $\vec{x}$ ως προς την νέα βάση.

πίνακας που έχει για γραμμές του, τα διανύσματα της νέας ορθοκανονικής βάσης.

διάνυσμα αρχικών συντεταγμένων.

Ασκήσεις.

1) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{v}=(2,-1,3)$, $\vec{v}_1=(1,0,0)$, $\vec{v}_2=(2,2,0)$, $\vec{v}_3=(3,3,3)$.

Το σύνολο $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$. Να προσδιορισθούν οι συντεταγμένες του $\vec{v}$ ως προς την παραπάνω βάση.

<u>Απάντηση</u>: Θα έχουμε

$$\vec{x}\,'=P^{-1}\vec{x}$$

όπου

$\vec{x}$: διάνυσμα αρχικών συντεταγμένων (προφανώς $\vec{x}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$)

$\vec{x}\,'$: διάνυσμα ζητούμενων συντεταγμένων

P: πίνακας που έχει για στήλες του τα διανύσματα $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$.

Αρκεί να προσδιορίσουμε τον πίνακα P^{-1}.

Έχουμε

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} P^*$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad |P| = 6$$

$$P^* = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Άρα $$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Πράγματι

$(2,-1,3) = (3)(1,0,0) + (-2)(2,2,0) + (1)(3,3,3)$)

2) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u}=(3,7)$, $\vec{u}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{u}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Το σύνολο $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

Να προσδιορισθούν οι συντεταγμένες του $\vec{u}$ ως προς την παραπάνω βάση.

Απάντηση: Θα έχουμε

$$\vec{x}\,'=P^T\vec{x}$$

όπου $\vec{x}=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

Άρα

$$\vec{x}\,'=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{\sqrt{2}}\\ \frac{10}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

(Πράγματι

$$(3,7)=\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

)

Κάποιες άλλες ιδιότητες των ορθογώνιων πινάκων.

1) Εάν ο P είναι ορθογώνιος τότε και οι πίνακες P^T και P^{-1} είναι επίσης ορθογώνιοι.

Αποδ: Όπως είδαμε προηγουμένως, ο P είναι ορθογώνιος $\Longleftrightarrow P^T = P^{-1}$.

Έχουμε λοιπόν

$$(P^T)^T = P = (P^{-1})^{-1} = (P^T)^{-1}$$

$$(P^{-1})^T = (P^T)^T = P = (P^{-1})^{-1}$$

2) Εάν ο P είναι ορθογώνιος, τότε $|P| = \begin{cases} 1 \\ \text{ή} \\ -1 \end{cases}$

Αποδ: Έχουμε

$$I = P^{-1} \cdot P = P^T \cdot P.$$

Άρα $1 = |I| = |P^{-1} \cdot P| = |P^T| \, |P| = |P| . |P| = (|P|)^2$

Επομένως $|P| = \begin{cases} 1 \\ \text{ή} \\ -1 \end{cases}$

3) Εάν A, B είναι ορθογώνιοι πίνακες τότε ορθογώνιος πίνακας, θα είναι και ο $A.B$.

Αποδ: $(A.B)^T = B^T . A^T = B^{-1} . A^{-1} = (A.B)^{-1}$.

Κεφ. 6: Τετραγωνικές μορφές. Συμμετρικοί πίνακες

Τετραγωνική μορφή: $Q = \sum_{i,j=1}^{\nu} a_{ij} x_i x_j =$

$$= (x_1 \; x_2 \ldots x_\nu) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix} =$$

$$= X^T A X.$$

Πράγματι εάν $\nu = 2$ $\{1, 2\}$

$$Q = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2$$

$$= a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2.$$

δηλ.

$$Q=(x_1\ \ x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=$$

$$=(a_{11}x_1+a_{21}x_2\ \ \ a_{12}x_1+a_{22}x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{21}x_2x_1+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2.$$

Ορισμός: Έστω τετραγωνική μορφή

$$Q=\underset{1\times\nu}{X^T}\ \underset{\nu\times\nu}{A}\ \underset{\nu\times 1}{X}$$

(1) Εάν $Q=X^TAX\geq 0$ $(Q=X^TAX\leq 0)$ για όλα τα X τότε η τ.μ. ονομάζεται θετικά ημιορισμένη (αρνητικά ημιορισμένη).

(2) Εάν $Q=X^TAX\geq 0$ $(Q=X^TAX\leq 0)$ και $Q=X^TAX=0$ μόνον όταν $X=0$ τότε η τ.μ. ονομάζεται θετικά ορισμένη. (αρνητικά ορισμένη).

(3) Αν $Q = X^T A X > 0$ για κάποια X και $Q < 0$ για κάποια άλλα τότε η τ.μ. ονομάζεται αόριστη.

Σημείωση: Οι ίδιες ονομασίες χρησιμοποιούνται και για τον πίνακα A, που ορίζει την τ.μ. Q.

Διαγώνιες τετραγωνικές μορφές:

$$Q = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_\nu)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_\nu x_\nu^2 .$$

Παρατηρήσεις: (1) Αν $\lambda_i \geq 0$ ($\lambda_i \leq 0$) $\forall i = 1, 2, \ldots, \nu$ τότε η δ.τ.μ. Q είναι θετικά ημιορισμένη (αρνητικά ημιορισμένη).

(2) Αν $\lambda_i > 0$ ($\lambda_i < 0$) $\forall i = 1, \ldots, \nu$ τότε η δ.τ.μ. Q είναι θετικά ορισμένη (αρνητικά ορισμένη)

(3) Αν υπάρχουν και θετικά και αρνητικά λ_i τότε η δ.τ.μ. Q είναι αόριστη.

Παρατήρηση: Έστω τετραγωνική μορφή $Q = X^T A X$. Εάν P ομαλός πίνακας, θεωρούμε την αλλαγή συντεταγμένων $X = PX'$. Οπότε έχουμε $Q = X^T A X = (PX')^T A (PX') = X'^T (P^T A P) X'$.

Δηλαδή ως προς το νέο σύστημα συντεταγμένων η τ.μ. ορίζεται από τον $P^T A P$.

Συμμετρικοί πίνακες

Ένας τετραγωνικός πίνακας $S = [s_{ij}]$ λέμε ότι είναι συμμετρικός εάν $s_{ij} = s_{ji}$

η ισοδύναμα εάν $S^T = S$.

Ιδιότητες.

① Εάν S και S' είναι συμμετρικοί πίνακες τότε συμμετρικοί θα είναι και οι πίνακες $S+S'$ και λS. $(\lambda \in \mathbb{R})$

Απόδειξη: Προφανής.

② Έστω S και S' συμμετρικοί πίνακες. Ο $S.S'$ θα είναι συμμετρικός $\Longleftrightarrow SS' = S'S$

Απόδειξη: $(SS')^T = S'^T S^T = S'S$

Άρα ο SS' είναι συμμετρικός $\Longleftrightarrow SS' = S'S$.

③ Για οποιοδήποτε πίνακα A τα γινόμενα $A^T.A$, $A.A^T$ ορίζονται, είναι τετραγωνικοί πίνακες και επίσης είναι συμμετρικοί.

Αποδ.

$$\underset{k\times\lambda}{A} \qquad \underset{\lambda\times k}{A^T} \qquad \underset{k\times k}{\underset{(k\times\lambda)(\lambda\times k)}{AA^T}} \qquad \underset{\lambda\times\lambda.}{\underset{(\lambda\times k)(k\times\lambda)}{A^TA}}$$

$$(A.A^T)^T = (A^T)^T.A^T = A.A^T$$

$$(A^T.A)^T = A^T.(A^T)^T = A^T.A.$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας $T=[t_{ij}]$ ονομάζεται αντισυμμετρικός εάν $t_{ij}=-t_{ji}$, δηλαδή $T^T=-T$

(Αναγκαστικά $t_{ij}=0$ όταν $i=j$)

Ερώτηση: Υπάρχει πίνακας που είναι συμμετρικός και αντισυμμετρικός ταυτόχρονα;

Μόνον ο μηδενικός πίνακας.

Θεώρημα: Κάθε τετραγωνικός πίνακας A γράφεται κατά τρόπο μοναδικό ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα, $A = S + T$ όπου $S = \frac{A + A^T}{2}$ και $T = \frac{A - A^T}{2}$.

Αποδ: $$S^T = \left(\frac{A + A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T + (A^T)^T}{2} = \frac{A^T + A}{2} = \frac{A + A^T}{2} = S$$

$$T^T = \left(\frac{A - A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T - (A^T)^T}{2} = \frac{A^T - A}{2} = -\frac{A - A^T}{2} = -T$$

Προφανώς $A = S + T$.

Επίσης η παραπάνω έκφραση είναι μοναδική διότι:

έστω $A = S + T = S' + T' \Rightarrow \underbrace{S - S'}_{\text{συμμετρικός}} = \underbrace{T' - T}_{\text{αντισυμμετρικός}}$

Άρα $S - S' = T' - T = 0 \Rightarrow S = S'$ και $T' = T$.

$$A = \underbrace{S}_{\text{συμμετρικό μέρος του } A} + \underbrace{T}_{\text{αντισυμμετρικό μέρος του } A}$$

Θεώρημα: Αν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας και $S = \frac{A+A^T}{2}$ είναι το συμμετρικό μέρος του A τότε ο A και ο S ορίζουν την ίδια τετραγωνική μορφή, δηλαδή $Q = X^T A X = X^T S X$.

Αποδ.

$$Q = X^T A X = X^T (S+T) X = X^T S X + X^T T X.$$

Όμως $X^T T X = 0$

(π.χ.

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-2y \quad 2x)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= -2yx + 2xy = 0. \quad)$$

Άρα $Q = X^T S X$

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει πως κάθε τετραγωνική μορφή μπορεί να οριστεί από έναν συμμετρικό πίνακα.

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα.

Ορ. Έστω τετραγωνικός πίνακας A μεγέθους $\nu \times \nu$. Ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbb{R}^\nu$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα του A, εάν υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Το λ ονομάζεται ιδιοτιμή του A.

Επίσης λέμε ότι το ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}$ αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

π.χ. το $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, το οποίο αντιστοιχεί στην

ιδιοτιμή $\lambda = 3$. Πράγματι

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\vec{x}$$

Προσδιορισμός ιδιοτιμών ενός πίνακα $A^{\nu\times\nu}$.

Ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbb{R}^{\nu}$ θα είναι ιδιοδιάνυσμα του $A \Leftrightarrow \exists\, \lambda$ τέτοιο ώστε $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $(A\vec{x} = \lambda I \vec{x}) \Leftrightarrow$ $\exists\, \lambda$ τέτοιο ώστε $(A-\lambda I)\vec{x} = 0$

Δηλαδή θέλουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα $(A-\lambda I)\vec{x} = 0$ να έχει μη-μηδενικές λύσεις. Κάτι τέτοιο θα ισχύει εάν και μόνον εάν $|A-\lambda I| = 0$.

Άρα για να βρούμε τις ιδιοτιμές του A, αρκεί να βρούμε όλα εκείνα τα λ για τα οποία $|A-\lambda I| = 0$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$|A-\lambda I| = \lambda^{\nu} + c_1\lambda^{\nu-1} + \cdots + c_{\nu}.$$

Άρα ο A $(\nu\times\nu)$ θα έχει το πολύ ν διαφορετικές ιδιοτιμές.

π.χ.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=(3-\lambda)(-\lambda)-(2)(-1)=-3\lambda+\lambda^2+2=0$$

$$\lambda_1=1 \qquad \lambda_2=2$$

Προσδιορισμός ιδιοδιανυσμάτων

Ένα ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, θα είναι ένα μη-μηδενικό διάνυσμα το οποίο ικανοποιεί την σχέση

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x} \Longleftrightarrow (A-\lambda I)\vec{x}=0.$$

δηλ. το $\vec{x}$ θα είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \Longleftrightarrow$ είναι μη-μηδενική λύση του $(A-\lambda I)\vec{x}=0$.

Οι λύσεις του παραπάνω συστήματος αποτελούν υπόχωρο του $\mathbb{R}^\nu$ (συμβ. με X_λ)

και άρα κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{x}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, θα ανήκει σ'αυτό τον υπόχωρο

π.χ.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A-\lambda I=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=(1-\lambda)^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=1$$

$$(A-\lambda I)\vec{x}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2=0$$

$$X_1: \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

όλα τα μη-μηδενικά διανύσματα που ανήκουν στον υπόχωρο X_1 είναι όλα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda=1$.

Παράδειγμα:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \dots \Rightarrow (-\lambda+1)(\lambda-5)^2=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1,\ \lambda=5$$

Εάν $\lambda=1$

$$(A-\lambda I)X=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1=x_2 \\ x_3=0 \end{matrix}$$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda=1$: $\begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Διάσταση του $X_1 = 1$

Εάν $\lambda=5$, $(A-\lambda I)X=0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \quad x_1 = -x_2$$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 5$: $\begin{bmatrix} s \\ -s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Διάσταση του $X_5 = 2$.

Θεώρημα: Έστω S συμμετρικός πίνακας μεγέθους $\nu \times \nu$. Τότε

(1) Όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές

(2) Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους

(3) Ο υπόχωρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή είναι διάστασης ίσης με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

Θεώρημα: Εάν ο A είναι συμμετρικός πίνακας τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^T A P$ να είναι διαγώνιος

Αλγόριθμος διαγωνοποίησης ενός συμμετρικού πίνακα A.

Βήμα 1: Βρίσκουμε βάση για κάθε υπόχωρο ιδιοδιανυσμάτων του A.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow (\lambda-2)^2(-\lambda+8) = 0$$

Άρα $\lambda = 2$, $\lambda = 8$

πολ/τητα ιδιομής 2.

Για $\lambda=2$

$$(A-\lambda I)X=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda=2$: $\begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Βάση του X_2

Για $\lambda=8$

$$(A-\lambda I)X=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \cdots\cdots$$

$$\cdots \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1-x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=x_3 \\ x_2=x_3 \end{matrix}$$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda=8$: $\begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Βάση του X_8

Βήμα 2: Κάνουμε τις βάσεις αυτές ορθοκανονικές χρησιμοποιώντας την διαδικασία των Gram-Schmidt.

$$\Big(\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\} \to \underbrace{\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}}_{\text{ορθογώνια βάση}}$$

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1 \qquad \vec{e}_j = \vec{u}_j - \sum_{i=1}^{j-1} pr_{\vec{e}_i}\vec{u}_j \qquad j=2,\dots,n$$

$$pr_{\vec{e}_i}\vec{u}_j = \left(\frac{\vec{u}_j \cdot \vec{e}_i}{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i}\right) \cdot \vec{e}_i \Big)$$

Πρώτη βάση:

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = (-1, 1, 0) \qquad \vec{e}_2 = \vec{u}_2 - \left(\frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}\right) \cdot \vec{e}_1 =$$

$$= (-1, 0, 1) - \left(\frac{1}{2}\right)(-1, 1, 0)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

ορθοκανονική βάση του X_2

Δεύτερη βάση.

$$\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{e}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{ορθοκανονική βάση του } X_8$$

Βήμα 3: Ο πίνακας P που έχει για στήλες του, όλα τα διανύσματα των ορθοκανονικών βάσεων του Βημ. 2, είναι ο ζητούμενος πίνακας, δηλ. ο πίνακας που διαγωνοποιεί τον A.

Δηλαδή
$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Πράγματι
$$P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 8 \end{bmatrix}$$

Θεωρ. Ο πίνακας $P^T A P$ είναι διαγώνιος και στην κύρια διαγώνιο του έχει για στοιχεία του, τις ιδιοτιμές του A. Κάθε ιδιοτιμή εμφανίζεται αριθμό φορών ίσο με την πολ/τητά της.

$\nu \times \nu$

Έστω τετραγωνική μορφή $Q = X^T A X$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο A είναι συμμετρικός πίνακας (διότι κάθε τετραγωνική μορφή μπορεί να ορισθεί από έναν συμμετρικό πίνακα).

Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο πίνακα P για τον οποίο ισχύει ότι:

$$P^T A P = A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_\nu \end{bmatrix}$$

όπου λ_i είναι οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A και όπου κάθε ιδιοτιμή εμφανίζεται τόσες φορές, όσες και η πολλαπλότητά της.

Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητών $X = PX'$. Επομένως έχουμε $Q = (PX')^T A (PX') =$

$$= x'^T (P^T A P) x' = x'^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_\nu \end{bmatrix} x' =$$

$$= (x_1' \; x_2' \; \ldots \; x_\nu') \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_\nu' \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 x_1'^2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu'^2$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Εάν για όλα τα λ_i ισχύει ότι $\lambda_i \geq 0$ $(\lambda_i \leq 0)$ τότε η Q θα είναι θετικά ημιορισμένη. (αρνητικά ημιορισμένη)
- Εάν για όλα τα λ_i ισχύει ότι $\lambda_i > 0$ $(\lambda_i < 0)$ τότε η Q θα είναι θετικά ορισμένη. (αρνητικά ορισμένη).
- Εάν υπάρχουν και θετικά και αρνητικά λ_i, τότε η Q θα είναι αόριστη.

Η αλλαγή μεταβλητών $X=PX'$, λέμε ότι διαγωνοποιεί την τετραγωνική μορφή Q.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $Q=X^TAX$ όπου

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(i) Να προσδιορισθεί το είδος της.

(ii) Να προσδιορισθεί η αλλαγή μεταβλητών που διαγωνοποιεί την Q.

Απάντηση:

(i) $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)^2-4=0$

$$\Rightarrow 1-2\lambda+\lambda^2-4=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda-3=0 \Rightarrow \begin{matrix}\lambda=-1 \\ \lambda=3\end{matrix}$$

Άρα η Q είναι αόριστη.

(ii) Για να προσδιορίσουμε την αλλαγή μεταβλητών $X=PX'$ που διαγωνοποιεί την

Q εργαζόμαστε ως εξής:

Για $\lambda=-1$

$$(A-\lambda I)X=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$x_1+x_2=0$$

$$X_{-1}: \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda=3$

$$(A-\lambda I)X=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow x_1=x_2$$

$$X_3: \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας P θα έχει την μορφή:

$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Άρα η ζητούμενη

αλλαγή μεταβλητών θα είναι:

$X=PX'$ δηλ. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$

Πράγματι

$$Q=(x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}= x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$$

Εάν θέσουμε $\quad x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2'$

$$x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2'$$

έχουμε

$$Q=\frac{1}{2}x_1'^2+\frac{1}{2}x_2'^2+\frac{2}{2}x_1'x_2'+4\left(\frac{1}{2}x_2'^2-\frac{1}{2}x_1'^2\right)+$$

$$\frac{1}{2}x_1'^2+\frac{1}{2}x_2'^2-\frac{2}{2}x_1'x_2'=$$

$$=-x_1'^2+3x_2'^2$$