Κεφ 4. Ορίζουσες - Αντίστροφος πίνακας.

Τετραγωνικοί πίνακες: Πίνακες που έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών.

π.χ. 3×3

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Όλα τα στοιχεία α_{ij} όπου $i=j$, λέμε ότι αποτελούν την κύρια διαγώνιο του πίνακα.

Πάνω τριγωνικός: Τετραγωνικός πίνακας, ο οποίος κάτω από την κύρια διαγώνιό του, περιέχει μόνο μηδενικά στοιχεία. Δηλαδή εάν $A=[\alpha_{ij}]$, όταν $i>j$, $\alpha_{ij}=0$.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Κάτω τριγωνικός: Τετραγωνικός πίνακας, ο οποίος πάνω από την κύρια διαγώνιό του, περιέχει μόνο μηδενικά στοιχεία. Δηλαδή εάν $A=[\alpha_{ij}]$, όταν $i<j$, $\alpha_{ij}=0$.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Διαγώνιος πίνακας: Τετραγωνικός πίνακας, του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται εκτός της κυρίας διαγωνίου, είναι 0. Δηλαδή εάν $A=[a_{ij}]$, όταν $i \neq j$, $a_{ij}=0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Μοναδιαίος πίνακας: Διαγώνιος πίνακας του οποίου όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία είναι ίσα με 1. Δηλαδή εάν $A=[a_{ij}]$, όταν $i \neq j$, $a_{ij}=0$

και όταν $i=j$, $a_{ij}=1$.

$$I=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI=IA=A$$

π.χ.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ορ. Έστω A τετραγωνικός πίνακας. Θα λέμε ότι ο πίνακας B είναι αντίστροφος του A, αν $A.B=B.A=I$

(Ο B θα συμβολίζεται με A^{-1})

π.χ.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο B είναι ο αντίστροφος του A, διότι

$A.B=B.A=I$.

Θεώρημα: Ο αντίστροφος πίνακας ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι μοναδικός.

Αποδ. Έστω ότι υπάρχουν πίνακες B και C τέτοιοι ώστε

$$A.B=B.A=I \quad \text{και} \quad A.C=C.A=I$$

Τότε θα έχουμε $(BA).C=I.C=C$. Όμως

$(BA)C=B(AC)=B.I=B$. Άρα $B=C$.

Αντιστρέψιμοι πίνακες: Πίνακες που έχουν αντίστροφο.

Θεώρημα: Εάν οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι και του ίδιου μεγέθους, τότε

(α) AB είναι αντιστρέψιμος

και (β) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Αποδ: Εάν αποδείξουμε ότι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = I$$

τότε έχουμε αποδείξει ταυτόχρονα και τις δύο παραπάνω προτάσεις.

Πράγματι

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$$

Ομοίως $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = I$

Θεώρημα: Για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα A

(α) Ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος

και $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) $\forall\, k \in \mathbb{R}-\{0\}$, ο kA είναι αντιστρέψιμος και $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$.

(c) ο ανάστροφος πίνακας του A είναι αντιστρέψιμος και $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Αποδ:

(α) Επειδή $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) $(kA)(\frac{1}{k}A^{-1}) = \frac{1}{k}(kA)A^{-1} = (\frac{1}{k}k)AA^{-1} =$

$$= AA^{-1} = I$$

Επίσης

$$\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right)(kA) = \frac{k}{k}(A^{-1}A) = I.$$

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα A μεγέθους $\nu \times \nu$, αντιστοιχούμε έναν αριθμό $|A|$, τον οποίο ονομάζουμε ορίζουσα του A.

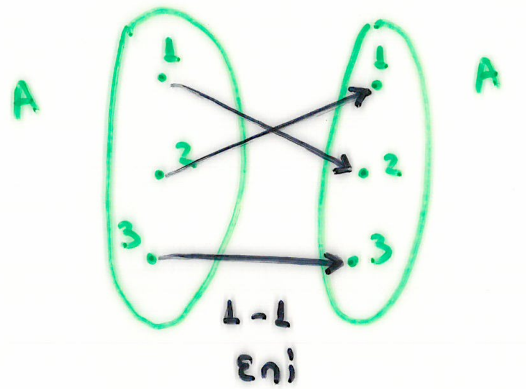
$$\left(A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} \right)$$

(Έστω σύνολο $A=\{1,2,\dots,\nu\}$. Κάθε διατεταγμένη ν-άδα $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_\nu)$ στοιχείων του A, στην οποία δεν παρατηρείται επανάληψη στοιχείων, ονομάζεται μετάθεση του A.

π.χ. $A=\{1,2,3\}$

Μεταθέσεις του A.

$(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$



Αριθμός μεταθέσεων του $A=\nu!$

Έστω $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_\nu)$ μια μετάθεση του συνόλου $A=\{1,2,\dots,\nu\}$. Θα λέμε ότι η παραπάνω μετάθεση έχει μια <u>αντιστροφή</u>, εάν κάποιος ακέραιος προηγείται στην μετάθεση, κάποιου μικρότερου του.

Μετάθεση περιττή: Ολικός αριθμός αντιστροφών περιττός

Μετάθεση άρτια: » » » άρτιος

π.χ. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\sigma=(6,1,3,4,5,2)$

Άρτια μετάθεση (Ολικός αριθμός αντιστροφών άρτιος)

Πρόσημο μιας μετάθεσης σ: $sgn(\sigma)\begin{cases} 1 & \text{εάν η σ είναι άρτια} \\ -1 & \text{εάν η σ είναι περιττή} \end{cases}$

<u>Ορ.</u> Εάν A τετραγωνικός πίνακας μεγέθους $\nu\times\nu$, όπου $A=[\alpha_{ij}]$, τότε

$$|A|=\sum_{\sigma} sgn(\sigma)\alpha_{1\sigma_1}\alpha_{2\sigma_2}\cdots\cdots\alpha_{\nu\sigma_\nu}$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σ' όλες τις μεταθέσεις $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_\nu)$ του συνόλου $\{1,2,\dots,\nu\}$.

π.χ.

α) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$\{1,2\}$

$(1,2)$ $(2,1)$

$$|A| = +a_{11}a_{22} + (-1)a_{12}a_{21}.$$

β) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\{1,2,3\}$

$(1,2,3)$ $(2,1,3)$ $(2,3,1)$

$(3,2,1)$ $(3,1,2)$

$(1,3,2)$

$$|A| = (+1)a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)a_{12}a_{21}a_{33} + (+1)a_{12}a_{23}a_{31} + (+1)a_{13}a_{21}a_{32}$$

Θεωρ. $|A| = |A^T|$

Παρατήρηση: Εάν έχουμε ένα θεώρημα, το οποίο είναι σχετικό με ορίζουσες και το οποίο αναφέρεται στις γραμμές ενός πίνακα, το ίδιο θα ισχύει και για τις στήλες (και αντίστροφα).

Θεώρημα: Αν ο A έχει μια γραμμή (στήλη) μηδενική, τότε $|A|=0$.

Αποδ. Κάθε όρος του αθροίσματος $\sum_{\sigma} sgn(\sigma) a_{1\sigma_1} \cdots\cdots a_{\nu\sigma_\nu}$ περιέχει ένα στοιχείο από κάθε γραμμή του A, επομένως θα περιέχει κι ένα στοιχείο από την μηδενική γραμμή του A.

Θεώρημα: Εάν A' είναι ο πίνακας που προκύπτει από την εναλλαγή δύο γραμμών (στηλών) του πίνακα A, τότε $|A'|=-|A|$.

Θεώρημα: Εάν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές (στήλες) ίδιες, τότε $|A|=0$.

Αποδ. Έστω ότι οι ίδιες γραμμές του A είναι η r και η s γραμμή, και έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A μέ την εναλλαγή αυτών των 2 γραμμών. Προφανώς $A=B$. Από το προηγούμενο Θεώρημα, θα έχουμε $|B|=-|A| \Rightarrow |B|+|A|=0 \Rightarrow$

$$2|A|=0 \Rightarrow |A|=0.$$

Θεώρημα: Αν ο A είναι (πάνω ή κάτω) τριγωνικός, μεγέθους $\nu\times\nu$, όπου $A=[a_{ij}]$, τότε $|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{\nu\nu}$

Αποδ. Θα το αποδείξουμε για πάνω τριγωνικούς πίνακες

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\nu} \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

όταν $i>j$, $a_{ij}=0$

Έχουμε ότι

$$|A| = \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \alpha_{1\sigma_1} \alpha_{2\sigma_2} \cdots \alpha_{\nu\sigma_\nu}$$

Τώρα εάν έχουμε μια μετάθεση $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$ του $\{1, 2, \ldots, \nu\}$, το $\alpha_{1\sigma_1} \alpha_{2\sigma_2} \cdots \alpha_{\nu\sigma_\nu} = 0$, εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο i του $\{1, 2, \ldots, \nu\}$ τέτοιο ώστε $i > \sigma_i$. Επομένως για να προσδιορίσουμε την τιμή της $|A|$, αρκεί να εξετάσουμε μόνον όλες τις μεταθέσεις $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu)$ του $\{1, 2, \ldots, \nu\}$ για τις οποίες ισχύει ότι $i \leq \sigma_i \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, \nu$

Όμως η μόνη μετάθεση που έχει την παραπάνω ιδιότητα είναι η μετάθεση $(1, 2, 3, \ldots, \nu)$.

Άρα

$$|A| = a_{11} a_{22} \cdots a_{\nu\nu} .$$

Θεώρημα: (i) Εάν πολλαπλασιάζουμε μια γραμμή (στήλη) ενός πίνακα με αριθμό, τότε η ορίζουσα του πολ/ζεται με τον ίδιον αριθμό.

(ii) Αν προσθέσουμε ένα πολλαπλάσιο μιας γραμμής (στήλης) σε μια άλλη γραμμή (στήλη) τότε η ορίζουσα παραμένει η ίδια.

Ελάσσονες ορίζουσες και Συμπαράγοντες.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i\nu} \\ \vdots & & & & \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu j} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Ελάσσων ορίζουσα του $a_{ij} = |M_{ij}|$

M_{ij}: πίνακας που προκύπτει από τον A, με την διαγραφή της i-γραμμής του και της j-στήλης του.

Συμπαράγοντας του στοιχείου α_{ij}: $A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$

π.χ. $A=\begin{bmatrix} 3 & \boxed{1} & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ \boxed{1} & 4 & 8 \end{bmatrix}$

$|M_{32}|=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=26 \qquad A_{32}=-26$

$$\left(A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \right.$$

$$|A|=\alpha_{11}\underbrace{\alpha_{22}\alpha_{33}}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{11}\underbrace{\alpha_{23}\alpha_{32}}$$
$$-\alpha_{12}\underline{\alpha_{21}}\alpha_{33}+\alpha_{12}\underline{\alpha_{23}\alpha_{31}}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}$$
$$=\alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})+\alpha_{12}(\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{21}\alpha_{33})$$
$$+\alpha_{13}(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31})$$
$$=\alpha_{11}A_{11}+\alpha_{12}A_{12}+\alpha_{13}A_{13}$$
$$=\alpha_{21}(\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33})+\alpha_{22}(\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31})$$
$$+\alpha_{23}(\alpha_{12}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32})=\alpha_{21}A_{21}+\alpha_{22}A_{22}+\alpha_{23}A_{23}$$
$$\left.=\alpha_{31}A_{31}+\alpha_{32}A_{32}+\alpha_{33}A_{33}\right)$$

Προσαρτημένος και αντίστροφος πίνακας.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Ο προσαρτημένος πίνακας του A συμβολ. με A^* και ορίζεται ως εξής:

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{\nu 1} & \cdots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}^T$$

Θεώρημα: Αν $|A|\neq 0$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\dfrac{\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{\nu 1} & \cdots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}^T}{|A|}$

π.χ. $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

$A_{11}=\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$, $A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$, $A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

$A_{11}=12$, $A_{12}=6$, $A_{13}=-16$

$$|A| = 3(12) + 2(6) + (-1)(-16) = 36 + 12 + 16 = 64 \neq 0.$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$A^{-1} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα: Έστω πίνακας $A=[a_{ij}]$ μεγέθους $\nu\times\nu$. Η ορίζουσα του A ισούται με το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων μιας γραμμής (στήλης) με τους αντίστοιχους συμπαράγοντες, δηλαδή

$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{i\nu}A_{i\nu}$ για οποιαδήποτε γραμμή i του A

($|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{\nu j}A_{\nu j}$ για οποιαδήποτε στήλη j του A)

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$|A| = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^3(1)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^4(0)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$= 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -1$$

Θεώρημα: Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A μεγέθους $\nu \times \nu$, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Ο A είναι αντιστρέψιμος.

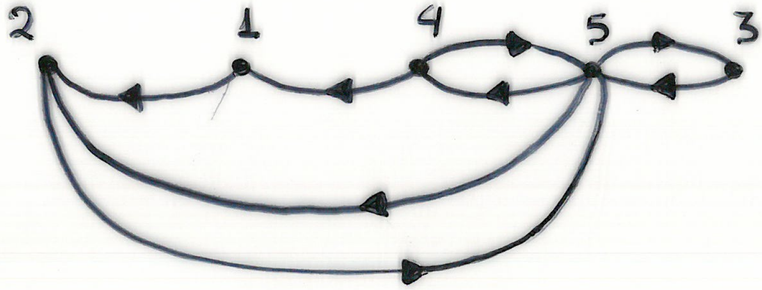
(2) Το σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει μια και μοναδική λύση για κάθε $\vec{b}$.

(3) Το ομογενές σύστημα $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει για μόνη λύση του, την μηδενική.

(4) $|A| \neq 0$

(5) Ο βαθμός του πίνακα A ισούται με ν.

Απόδειξη:



Κατ' αρχήν το γραμμικό σύστημα $A\vec{x}=\vec{b}$ μπορεί επίσης να γραφεί στην εξής μορφή:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & & \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1\nu}x_\nu \\ \vdots \\ a_{\nu 1}x_1 + \cdots + a_{\nu\nu}x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{\nu 1} \end{bmatrix} + \cdots + x_\nu \begin{bmatrix} a_{1\nu} \\ \vdots \\ a_{\nu\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix} \quad -(*)$$

$(4) \Rightarrow (1)$. Επειδή $|A| \neq 0$ από προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και συγκεκριμένα: $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

$(1) \Rightarrow (2)$. Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος,

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Άρα το $A\vec{x} = \vec{b}$ έχει μια και μοναδική λύση (την παραπάνω)

(2) $\Longleftrightarrow$ (5).

Έστω ότι ισχύει η (2). Επειδή το $A\vec{x}=\vec{b}$ είναι συμβατό για κάθε $\vec{b}\in\mathbb{R}^{\nu}$, αυτό σημαίνει ότι ο στηλοχώρος του A ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^{\nu}$. Άρα η διάσταση του στηλοχώρου του A ισούται με ν και επομένως ο βαθμός του A ισούται με ν.

Τώρα έστω ότι ισχύει η (5). Έστω δηλαδή ότι ο βαθμός του A ισούται με ν. Αυτό σημαίνει ότι ο στηλοχώρος του A ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^{\nu}$ και ότι τα διανύσματα στηλών του A αποτελούν μια βάση για το $\mathbb{R}^{\nu}$.

Σ' αυτήν την περίπτωση όμως όταν $\vec{b}\in\mathbb{R}^{\nu}$, αυτό μπορεί να εκφρασθεί ως Γ.Σ. των διανυσμάτων στηλών του A μ' έναν και μοναδικό τρόπο. Άρα το $A\vec{x}=\vec{b}$ έχει μια και μοναδική λύση.

(3)$\Longleftrightarrow$(5) Από την (*) έχουμε:

Το $A\vec{x}=\vec{0}$ έχει για μόνη λύση του την μηδενική $\Longleftrightarrow$ τα διανύσματων στηλών του A είναι Γ.Α. $\Longleftrightarrow$ ο βαθμός του A ισούται με ν.

(4)$\Longleftrightarrow$(5) Έστω B η γραμμοκανονική μορφή του A. Ο πίνακας B θα είναι ένας πάνω τριγωνικός πίνακας. Θα έχει την μορφή:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & \cdots & B_{1\nu} \\ & B_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & & B_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Τώρα

$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow |B| \neq 0 \Longleftrightarrow \beta_{11}\beta_{22}\cdots\beta_{\nu\nu} \neq 0 \Longleftrightarrow$

ο B δεν περιέχει μηδενικές γραμμές

$\Longleftrightarrow$ ο βαθμός του A ισούται με ν.

<u>Θεώρημα</u>: (Κανόνας του Cramer)

Εάν $A\vec{x}=\vec{b}$ σύστημα ν γραμμικών εξισώσεων με ν αγνώστους και $|A|\neq 0$, τότε το σύστημα έχει μια και μοναδική λύση. Αυτή η λύση είναι η εξής:

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\ \ldots\ ,x_\nu=\frac{|A_\nu|}{|A|}$$

όπου A_i πίνακας που προκύπτει από τον A εάν αντικαταστήσουμε την i-στήλη του A με την στήλη $\vec{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix}$

$(i=1,2,\ldots,\nu)$

Παράδειγμα:

$$x_1 + 2x_3 = 6$$

$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (1)A_{11} + 0A_{12} + 2A_{13}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

Άρα $\quad |A| = (1)(24) + (2)(10) = 44 \neq 0.$

Οπότε $\quad x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{-40}{44}$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}}{44} = \frac{72}{44}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{44} = \frac{152}{44}$$

(Απόδειξη του Κανόνα του Cramer).

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{|A|}(A^{*})\vec{b} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{\nu 1} \\ \vdots & & \\ A_{1\nu} & \cdots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\nu \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11}b_1 + \cdots + b_\nu A_{\nu 1} \\ \vdots \\ A_{1\nu}b_1 + \cdots + b_\nu A_{\nu\nu} \end{bmatrix}.$$ Δηλαδή θα έχου.

με: $x_i = \frac{1}{|A|}(b_1 A_{1i} + \cdots + b_\nu A_{\nu i}) \quad i = 1, 2, \ldots, \nu$

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\, i-1} & b_\nu & \cdots & a_{\nu\nu} \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Όμως $|A_i| = b_1 A_{1i} + \cdots + b_\nu A_{\nu i}$

Άρα $\forall\, i = 1, 2, \ldots, \nu$, $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$

Ορ.: Εάν $|A| \neq 0$, τότε ο πίνακας A ονομάζεται ομαλός πίνακας.

Θεώρημα: Εάν A, B τετραγωνικοί πίνακες του ίδιου μεγέθους, τότε

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Πόρισμα: Ο $A \cdot B$ είναι ομαλός $\Longleftrightarrow$ αμφότερα οι A, B είναι ομαλοί.

Κεφ. 5: Αλλαγή βάσης. Ορθογώνιοι πίνακες.

Έστω διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ και έστω $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_\nu\}$ βάση του $\mathbb{R}^\nu$. Το $\vec{x}$ μπορεί να εκφρασθεί ως γ.σ. των $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_\nu$ μ' έναν και μοναδικό τρόπο.

Έστω

$$\vec{x} = x_1' \vec{u}_1 + \cdots + x_\nu' \vec{u}_\nu$$