ΚΕΦ.1: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.

Γραμμική εξίσωση με ν μεταβλητές:
Κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_\nu x_\nu = b$$ όπου

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, b \in \mathbb{R}$.

Λύση της γραμμικής εξίσωσης
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_\nu x_\nu = b$: Μια ακολουθία ν αριθμών $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση εάν θέσουμε $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $\ldots$, $x_\nu = s_\nu$

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων ή γραμμικό σύστημα:
Κάθε πεπερασμένο σύνολο γραμμικών εξισώσεων με ν μεταβλητές.

Λύση γραμμικού συστήματος:
Μια ακολουθία ν αριθμών $s_1, s_2, \dots, s_\nu$, η οποία είναι λύση για κάθε εξίσωση του συστήματος.

π.χ. Το γραμμικό σύστημα

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$

$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

έχει γιά λύση του, την

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1.$$

Το γραμμικό σύστημα

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$2x_1 + 2x_2 = 6$$

δεν έχει λύσεις.

Συμβατό γραμμικό σύστημα: Γραμμικό σύστημα που έχει τουλάχιστον μια λύση.

Μη-συμβατό γραμμικό σύστημα: Γραμμικό σύστημα που δεν έχει καμμία λύση.

ΘΕΩΡΗΜΑ: ΚΑΘΕ ΣΥΜΒΑΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΧΕΙ ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΛΥΣΗ Η ΑΠΕΙΡΟ ΑΡΙΘΜΟ ΛΥΣΕΩΝ.

ΑΣΚΗΣΗ: ΑΠΟΔΕΙΞΤΕ ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 2 ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ 2 ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ.

Γενικά ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n μεταβλητές θα έχει την μορφή:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Ο πίνακας

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{bmatrix}
$$

ονομάζεται επαυξημένος πίνακας του παραπάνω γραμμικού συστήματος.

(Στοιχειώδη πράξη ή στοιχειώδη γραμμομετασχηματισμό σ' ένα πίνακα ονομάζουμε κάθε διαδικασία που ανήκει σε μια από τις 3 παρακάτω κατηγορίες:

1) ΕΝΑΛΛΑΓΗ ΔΥΟ ΓΡΑΜΜΩΝ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ.
2) ΠΟΛ/ΣΜΟΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕ ΜΗ-ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ.
3) ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΕ ΓΡΑΜΜΗ, ΠΟΛ/ΣΙΟ ΑΛΛΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ.

<u>Ορ.</u> Εάν ένας πίνακας B προκύπτει από τον πίνακα A κατόπιν κάποιων στοιχειωδών πράξεων τότε θα λέμε ότι ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος του A και θα γράφουμε $A \sim B$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

1) ΚΑΘΕ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΠΡΑΞΗ ΕΙΝΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΗ.

2) Η ΣΧΕΣΗ $\sim$ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ (ΔΗΛ. ΕΑΝ $A \sim B$ ΤΟΤΕ $B \sim A$)

Ορ. Ένας πίνακας, θα λέμε ότι βρίσκεται σε απλή κλιμακωτή μορφή (Α.Κ.Μ.) εάν έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Εάν υπάρχουν μηδενικές γραμμές, αυτές είναι οι τελευταίες γραμμές του πίνακα.

2) Εάν μια γραμμή περιέχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό στοιχείο, τότε το πρώτο της μη-μηδενικό στοιχείο είναι το 1. (ΒΑΣΙΚΟ 1)

3) Για κάθε ζεύγος γειτονικών γραμμών i και i+1 το ΒΑΣΙΚΟ 1 της i+1 θα βρίσκεται δεξιότερα του ΒΑΣΙΚΟΥ 1 της i.

4) Κάθε στήλη, η οποία περιέχει κάποιο ΒΑΣΙΚΟ 1, θα έχει σ' όλες τις άλλες θέσεις μηδενικά.

Π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ Α $\longrightarrow$ $\boxed{\text{ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ GAUSS-JORDAN}}$ $\longrightarrow$ ΠΙΝΑΚΑΣ Β ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΣΕ Α.Κ.Μ.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ GAUSS-JORDAN.

Βήμα 1ο:

Εντοπίζουμε την αριστερότερη στήλη που περιέχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό στοιχείο

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2ο:

Εάν το πρώτο στοιχείο της στήλης του Βήματος 1 είναι 0, τότε εναλλάσουμε την πρώτη γραμμή με κάποια άλλη έτσι ώστε το πρώτο στοιχείο της παραπάνω στήλης να γίνει διάφορο του 0.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Βήμα 3ο:

Εάν τώρα μετά το Βήμα 2, το πρώτο στοιχείο της στήλης του Βήματος 1 είναι το α,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

τότε πολ/ζουμε την πρώτη γραμμή με $\frac{1}{\alpha}$ (ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΜΕ ΒΑΣΙΚΟ 1).

Βήμα 4ο:

Προσθέτουμε πολ/σια της πρώτης γραμμής

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

στις άλλες γραμμές έτσι ώστε να προηγούν μηδενικά στοιχεία κάτω από το ΒΑΣΙΚΟ 1.

Βήμα 5º:

Καλύπτουμε την πρώτη γραμμή και εφαρμόζουμε τα Βήματα 1-5 στον υποπίνακα που προκύπτει.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad -5 \quad 3 \quad 6 \quad 14} \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 7 \quad 12 \\ 0 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \quad -17 \quad -29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -\frac{7}{2} \quad -6} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Βήμα 6ο:

Ξεκινώντας από την τελευταία γραμμή που περιέχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό στοιχείο και προχωρώντας προς τα πάνω προσθέτουμε πολ/σια της κάθε γραμμής στις πιο πάνω γραμμές έτσι ώστε να προηγούν 0 πάνω από κάθε ΒΑΣΙΚΟ 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Bigg)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν οι επαυξημένοι πίνακες δύο γραμμικών συστημάτων είναι γραμμοϊσοδύναμοι, τότε αυτά έχουν τις ίδιες λύσεις

Π.χ. (από τα προηγούμενα έχουμε)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right] \overset{G-J}{\sim \cdots \sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$-2x_3+7x_5=12 \qquad\qquad x_1+2x_2+3x_4=7$$

$$2x_1+4x_2-10x_3+6x_4+12x_5=28 \qquad\qquad x_3=1$$

$$2x_1+4x_2-5x_3+6x_4-5x_5=-1 \qquad\qquad x_5=2$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Εάν ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος βρίσκεται σε Α.Κ.Μ. τότε ο προσδιορισμός των λύσεων του είναι προφανής.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΙ Η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΠΟΥ ΤΟ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΜΑΣ ΠΑΡΕΧΟΥΝ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΟ ΤΡΟΠΟ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.

π.χ. Το σύστημα

$$-2x_3+7x_5=12$$

$$2x_1+4x_2-10x_3+6x_4+12x_5=28$$

$$2x_1+4x_2-5x_3+6x_4-5x_5=-1$$

Θα έχει τις ίδιες λύσεις με το

$$x_1+2x_2+3x_4=7$$

$$x_3=1$$

$$x_5=2$$

Θέτουμε $x_2=s$, $x_4=t$, οπότε έχουμε

$$x_1=7-2s-3t\ ,\quad x_2=s$$

$$x_3=1,\quad x_4=t,\quad x_5=2$$

$$s,t\in\mathbb{R}$$

π.χ.

$$x_1+2x_2+2x_3=3$$
$$-2x_1+3x_2-x_3=9$$
$$2x_3=-4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \overset{G-J}{\sim \cdots\cdots \sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$x_1=1$$
$$x_2=3$$
$$x_3=-2$$

$$x_1+2x_2+x_3=1$$
$$x_1+2x_2+2x_3=1$$
$$x_1+2x_2+x_3=2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{G-J.}{\sim \cdots\cdots \sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$x_1+2x_2 \quad = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$0 = 1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Έστω γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n μεταβλητές, του οποίου ο επαυξημένος πίνακας βρίσκεται σε Α.Κ.Μ.

1) Θα ονομάζουμε:

α) Βασικές μεταβλητές του: Μεταβλητές που αντιστοιχούν σε βασικά 1.

β) Ελεύθερες μεταβλητές του: Οι μεταβλητές που δεν είναι βασικές.

γ) Βασικές εξισώσεις του: Εξισώσεις που έχουν μεταβλητές δ) Απαλοίφουσες εξισώσεις του: Εξισώσεις που δεν είναι βασικές.

ε) Βαθμός ή τάξη του συστήματος (ρ): Αριθμός των βασικών του εξισώσεων.

2) Το σύστημα είναι συμβατό εάν και μόνον εάν ικανοποιούνται οι απαλοίφουσες εξισώσεις του.

3) Αν το σύστημα είναι συμβατό και $\rho = n$, τότε έχει ακριβώς μια λύση.

4) Αν το σύστημα είναι συμβατό και $\rho < n$, τότε έχει άπειρο αριθμό λύσεων (παραμετρικές λύσεις).

5) Αν $m<n$ τότε το σύστημα αποκλείεται να έχει ακριβώς μια λύση.

Ομογενή γραμμικά συστήματα.

Γραμμικά συστήματα της μορφής:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0\\
&a_{21}x_1+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=0\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&a_{m1}x_1+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=0
\end{aligned}$$