ΚΕΦ. 5: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

5.1: Ορισμός

Έστω D ένα μη-κενό υποσύνολο του xy-επιπέδου. Κάθε κανόνας f, ο οποίος αντιστοιχεί ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό $f(x,y)$ σε κάθε σημείο (x,y) του D, ονομάζεται συνάρτηση δύο μεταβλητών.

D: πεδίο ορισμού της f

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του, όλους τους $f(x,y)$, το ονομάζουμε σύνολο τιμών της f.

Παραδείγματα:

α) $f(x,y) = x^2 \cdot y$.

Πεδίο ορισμού της f είναι όλο το xy-επίπεδο.

β)

$$f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

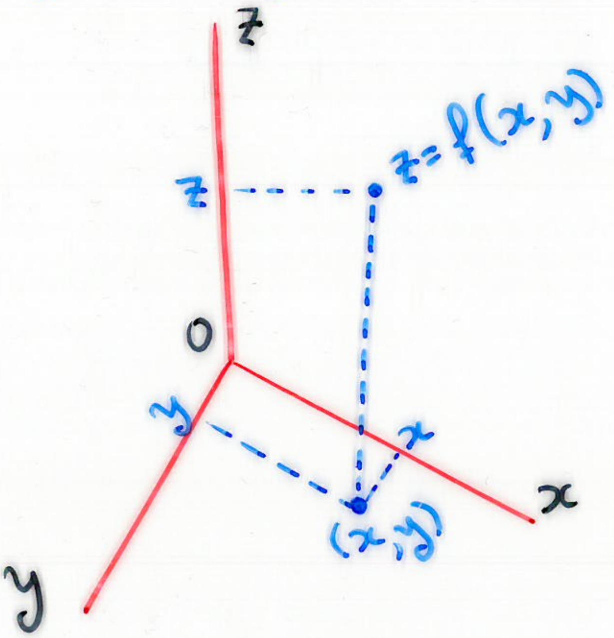
Πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο των σημείων (x,y), για τα οποία ισχύει $x^2+y^2\leq 1$ δηλ. είναι το σύνολο των σημείων ενός κλειστού δίσκου που έχει κέντρο στο $(0,0)$ και ακτίνα 1.

Εάν $z=f(x,y)$, οι μεταβλητές x και y ονομάζονται ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ η z ονομάζεται εξαρτημ. μεταβλ.

5.2 Γραφική παράσταση.

Σαν γραφική παράσταση της συνάρτησης $z=f(x,y)$, θεωρούμε το σύνολο των σημείων $(x,y,f(x,y))$, τα οποία

σχηματίζουν μια επιφάνεια στον χώρο.
(δηλαδή για να σχηματίσουμε το γράφημα της $z=f(x,y)$ παριστάνουμε τις τιμές της $f(x,y)$ ως ύψη z πάνω από τα αντίστοιχα σημεία (x,y)

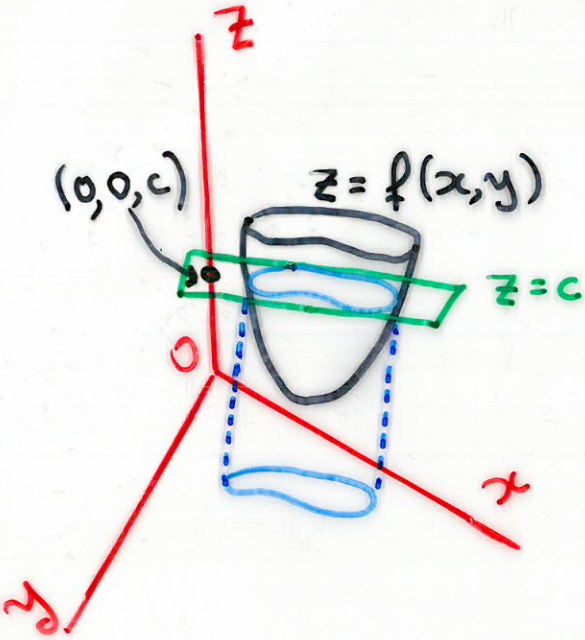


)

5.3 Ισοσταθμικές καμπύλες.

Έστω συνάρτηση $z=f(x,y)$. Θεωρούμε ένα επίπεδο Π, με εξίσωση $z=c$, το οποίο τέμνει την γραφ. παράσταση της f.

(Προφανώς το Π, θα είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο και ο αριθμός c, θα εκφράζει την απόσταση του Π απ' αυτό)



Η τομή του Π με την επιφάνεια $z=f(x,y)$ θα είναι μια καμπύλη στον χώρο, η οποία έχει για σημεία της, όλα τα σημεία (x,y,z) για τα οποία ισχύει: $z=f(x,y)$ και $z=c$

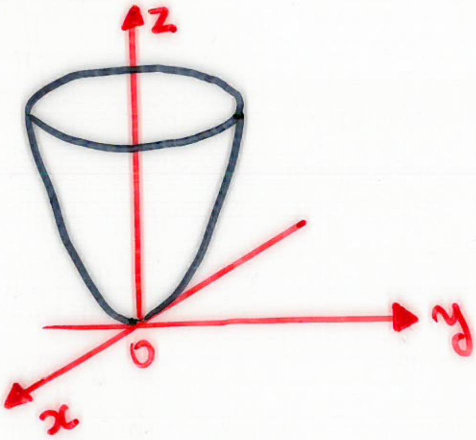
Δηλαδή θα είναι όλα τα σημεία (x,y,c) για τα οποία $f(x,y)=c$.

Προβάλλουμε την καμπύλη αυτή, πάνω στο xy-επίπεδο. Η προβολή της, θα είναι μια καμπύλη που θα έχει για σημεία της, όλα τα σημεία $(x,y,0)$, για τα οποία ισχύει $f(x,y)=c$.

Η καμπύλη αυτή ονομάζεται

ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΗ ΤΗΣ f.

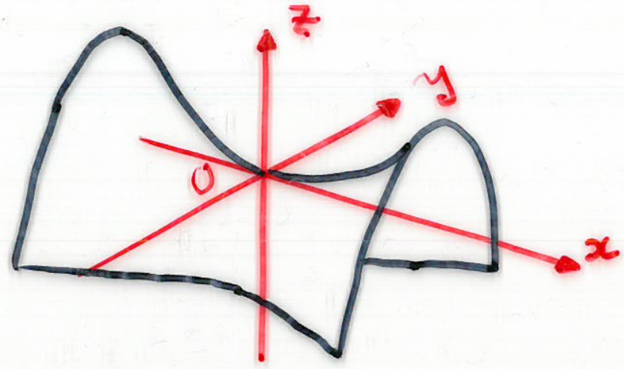
Παραδείγματα:



$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Ελλειπτικό παραβολοειδές

Οι ισοσταθμικές της καμπύλες θα είναι ελλείψεις.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

Υπερβολικό παραβολοειδές.

Οι ισοσταθμικές της καμπύλες θα είναι υπερβολές.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η οικογένεια των ισοσταθμικών καμπυλών μπορεί να θεωρηθεί ως η αποτύπωση της επιφανείας στο xy-επίπεδο

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.

Οι απλούστερες συναρτήσεις δύο μεταβλητών είναι οι γραμμικές:

$z = \alpha x + \beta y + \gamma$.

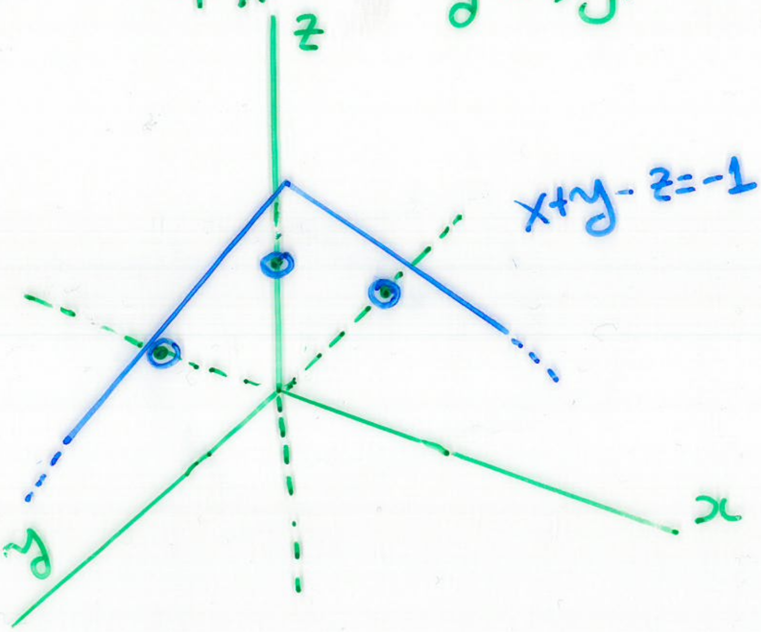
Οι γραφικές παραστάσεις τους είναι επίπεδα: $z - \alpha x - \beta y = \gamma$.

Οι ισοσταθμικές μιας τέτοιας συνάρτησης θα έχουν εξίσωση

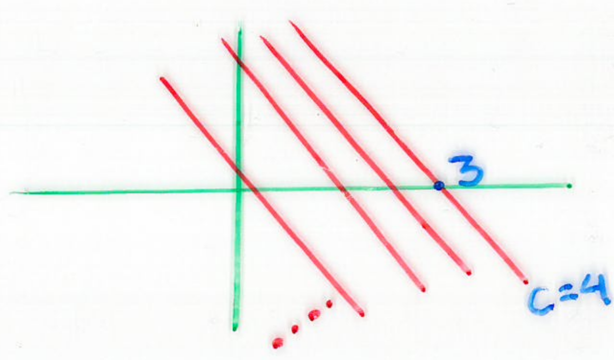
$\alpha x + \beta y + \gamma = c \Rightarrow \alpha x + \beta y = d$

και θα είναι παράλληλες ευθείες.

π.χ. $g(x,y) = x + y + 1$



Ισοσταθμικές
$x + y + 1 = c$



ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Έστω συνάρτηση f δύο μεταβλητών με τύπο $z=f(x,y)$, την οποία θεωρούμε σε κάποιο σημείο (x,y) του πεδίου ορισμού της. Κρατάμε την μεταβλητή y σταθερή και μεταβάλλουμε την x κατά Δx. Η μεταβολή στην τιμή της f θα είναι: $\Delta_x z = \Delta_x f = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$.

$\dfrac{\Delta_x f}{\Delta x}$: ρυθμός μεταβολής στις τιμές της f, ως προς x.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x f}{\Delta x}$: οριακός ρυθμός μεταβολής στις τιμές της f, ως προς x.

Ορ. Τον παραπάνω οριακό ρυθμό μεταβολής στις τιμές της f, τον ονομάζουμε μερική παράγωγο της f ως προς x, και τον συμβολίζουμε με z_x ή f_x ή $\frac{\partial z}{\partial x}$ ή $\frac{\partial f}{\partial x}$. Δηλαδή έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η μερική παράγωγος της f ως προς y. Δηλαδή έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Παρατήρηση: Επειδή στον ορισμό των μερικών παραγώγων κρατάμε πάντα την μια μεταβλητή σταθερά, αυτές μπορούν να θεωρηθούν σαν οι συνηθισμένες παράγωγοι ως προς την άλλη μεταβλητή. Έτσι ισχύουν γι' αυτές όλοι οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης.

π.χ. $f(x,y)=x^2+xy^3+e^{xy}$.

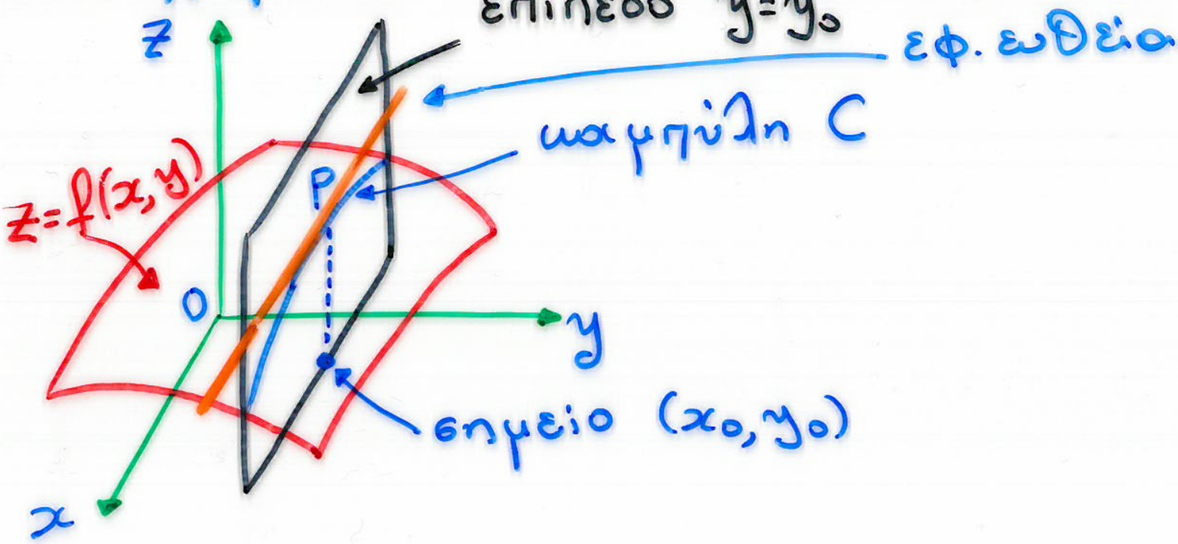
$f_x=2x+y^3+e^{xy}\cdot y \qquad f_y=3y^2x+e^{xy}\cdot x$

Στην πρώτη περίπτωση αντιμετωπίζεται το y ως σταθερά και στην δεύτερη το x.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ.

Έστω συνάρτηση f με τύπο $z=f(x,y)$. Θεωρούμε την μερική παράγωγο της f ως προς x, σε κάποιο σημείο (x_0,y_0) του πεδίου ορισμού της. Αυτή θα ισούται με $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$.

Η τομή της επιφανείας που αποτελεί την γραφική παράσταση της f και του επιπέδου $y=y_0$, θα είναι μια καμπύλη C στον τρισδιάστατο χώρο.



Η C θα περιέχει για σημεία της, όλα τα σημεία (x,y,z) για τα οποία ισχύει: $z=f(x,y)$ και $y=y_0$ δηλ. η C θα έχει για σημεία της, όλα τα σημεία (x,y_0,z) για τα οποία ισχύει $z=f(x,y_0)$.

Η σχέση $z=f(x,y_0)$ ορίζει μια συνάρτηση μιας μεταβλητής, η γραφ. παράσταση της οποίας βρίσκεται πάνω στο xz-επίπεδο. Άρα η γραφ. παράσταση της $z=f(x,y_0)$ θα αποτελεί την προβολή της C πάνω στο xz-επίπεδο.

Ορίζουμε

$$g(x) = f(x, y_0),$$

και παρατηρούμε

$$g'(x) = f_x(x, y_0).$$

Άρα $$g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$$

και επομένως ο αριθμός $f_x(x_0, y_0)$ εκφράζει την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη C στο σημείο $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

<u>Σημείωση</u>: Η γεωμ. ερμηνεία της άλλης μερικής παραγώγου είναι αντίστοιχη.

ΔΕΥΤΕΡΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ.

Οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x,y)$ είναι επίσης συναρτήσεις δύο μεταβλητών $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ και μπορούν να παραγωγιστούν εκ νέου δίνοντας τις ΔΕΥΤΕΡΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ που είναι τέσσερεις τον αριθμό:

$$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

π.χ. $f(x,y) = x^3 y - x y^2$

$f_x = 3x^2 y - y^2$ $\qquad$ $f_{xx} = 6xy$

$f_{xy} = 3x^2 - 2y$ $\qquad$ $f_y = x^3 - 2yx$

$f_{yx} = 3x^2 - 2y$ $\qquad$ $f_{yy} = -2x$

ΑΛΥΣΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ.

Οι μεταβλητές που εμφανίζονται σ' ένα πρόβλημα μπορεί να συνδέονται μεταξύ τους με περισσότερες από μια συναρτήσεις.

Για παράδειγμα μπορεί να έχουμε μια εξαρτημένη μεταβλητή z που δίνεται από την συνάρτηση $z=f(x,y)$, όπου x,y δεν είναι ανεξάρτητα, αλλά καθορίζονται από τις τιμές άλλων μεταβλητών s,t μέσων συναρτήσεων

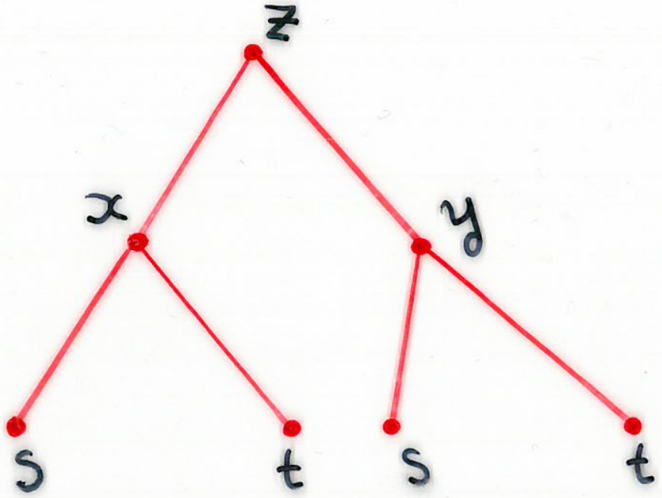
$$x=x(s,t), \quad y=y(s,t),$$

οι οποίες επίσης μπορεί να καθορίζονται ως συναρτήσεις άλλων μεταβλητών κ.ο.κ.

Μια τέτοια σύνθεση συναρτήσεων περιγράφεται από ένα γράφημα που ονομάζεται ΔΕΝΤΡΟ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

π.χ. α) $z=f(x,y)$ $\quad x=x(s,t)$ $\quad y=y(s,t)$.

ΔΕΝΤΟ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ.

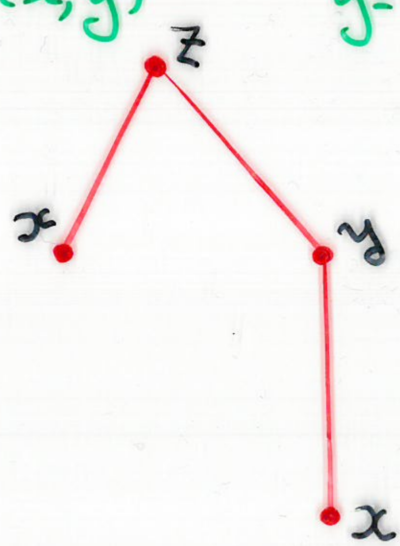


z: εξαρτημένη μεταβλητή

x, y: ενδιάμεσες μεταβλητές

s, t: ανεξάρτητες μεταβλητές.

β) $z=z(x,y)$ $\quad y=y(x)$



Εδώ η ανεξάρτηση μεταβλητή x εμφανίζεται και ως ενδιάμεση.

Στους διάφορους τύπους αλυσωτής παραγώγισης εκφράζουμε την παράγωγο της εξαρτημένης μεταβλητής ως προς κάποια από τις τελικά ανεξάρτητες μεταβλητές μέσω των ενδιάμεσων σταδίων εξάρτησης.

Για να προσδιορίσουμε έναν τέτοιο τύπο αλυσωτής παραγώγισης, εργαζόμαστε ως εξής:

1) Κατασκευάζουμε το δένδρο εξάρτησης των μεταβλητών.

2) Σε κάθε ακμή του, αντιστοιχούμε την παράγωγο της μεταβλητής που βρίσκεται στην πάνω κορυφή, ως προς την μεταβλητή που βρίσκεται στην κάτω κορυφή.

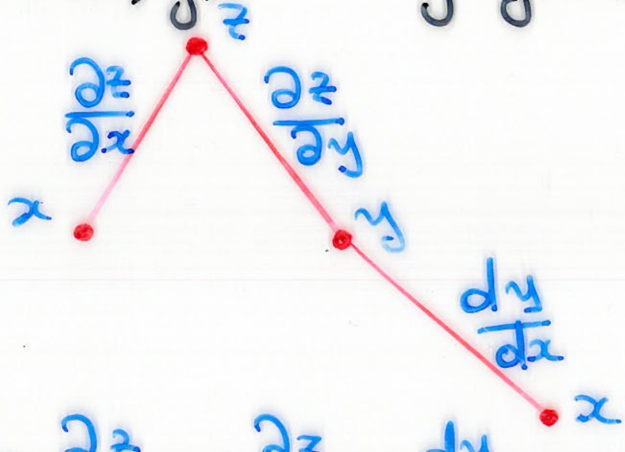
3) Βρίσκουμε τα "μονοπάτια" που συνδέουν την εξαρτημένη μεταβλητή με την μεταβλητή ως προς την οποία παραγωγίζουμε.

4) Σε κάθε μονοπάτι του Βήματος 3, αντιστοιχούμε το γινόμενο των παραγώγων που συναντάμε.

5) Το άθροισμα των γινομένων του Βήματος 4, θα μας δώσει την ζητούμενη παράγωγο.

Παραδείγματα:

α) $z = z(x,y) \qquad y = y(x)$



$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

π.χ.

$$z = e^{x+y} \qquad y = \ln x.$$

Άρα $z = e^{x+\ln x} = e^{x} \cdot e^{\ln x} = e^{x} \cdot x$

$$\frac{dz}{dx} = e^{x} + x e^{x}$$

Επίσης

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Άρα

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^{x+y} + e^{x+y} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= e^{y}\left(e^{x} + e^{x} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

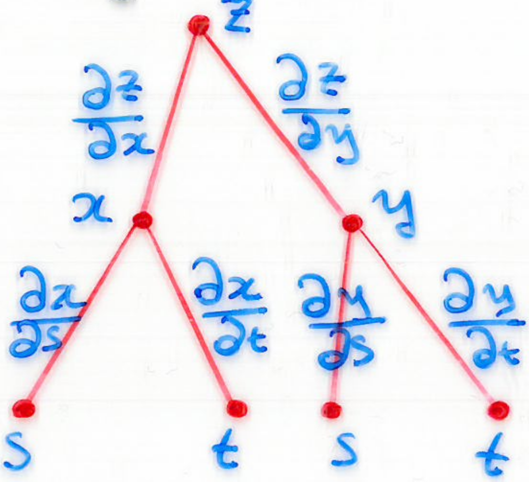
$$= e^{\ln x}\left(e^{x} + e^{x} \frac{1}{x}\right)$$

$$= x\left(e^{x} + e^{x} \frac{1}{x}\right)$$

$$= x e^{x} + e^{x}$$

$$= \frac{dz}{dx}.$$

β) $z=z(x,y)$ όπου $x=x(s,t)$ και $y=y(s,t)$



$$z=z(x,y)=z(x(s,t),y(s,t))$$

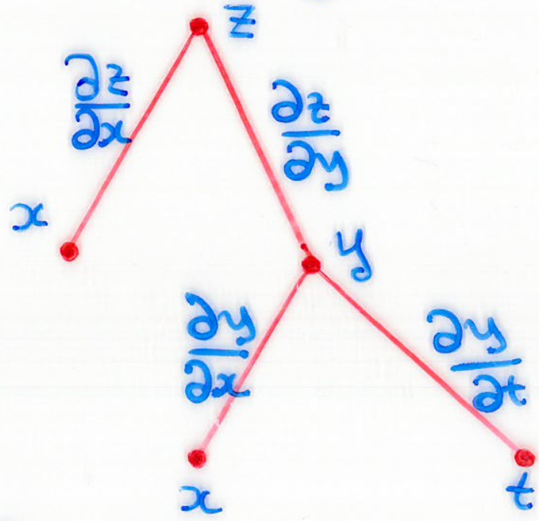
Άρα

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

γ) $z=z(x,y)$ $y=y(x,t)$

$$z=z(x,y(x,t))$$



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

Εδω παρατηρούμε ότι τα $\frac{\partial z}{\partial x}$ που εμφανίζονται στο αριστερό και δεξιό μέρος αυτής της σχέσης είναι τελείως διαφορετικά μεγέθη.

Στο αριστερό μέρος έχουμε την τελική εξάρτηση του z από τα x και t ενώ στο δεξιό μέρος την ενδιάμεση εξάρτηση του z από τα x και y.

Δηλ. έχουμε

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_t = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_t$$

Εδώ οι δείκτες αναφέρουν τις μεταβλητές που κρατάμε σταθερές στην παραγώγιση.

π.χ.

$$z = z(x,y) = x \cdot y.$$

$$y = y(x,t) = x + x \cdot t$$

δηλ. $z = z(x, y(x,t)) = x\,(x + x t) = x^2 + x^2 \cdot t.$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_t = 2x + 2x \cdot t = 2x(1+t)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y = y \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x = x$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_t = 1 + t.$$

Παρατηρούμε ότι πράγματι επαληθεύεται ο προηγούμενος τύπος.

διότι

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_t = 2x(1+t)$$

και

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_x \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_t =$$

$$= y + x \cdot (1+t)$$

$$= x\,(1+t) + x\,(1+t)$$

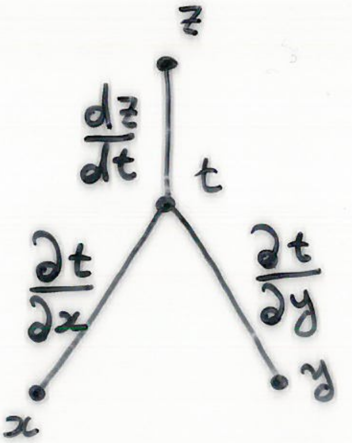
$$= 2x(1+t).$$

Ιουν. 2010

Έστω $z=f(t)$, $t=\frac{(x+y)}{x \cdot y}$. Να αποδειχθεί

ότι $$x^2\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Απ.



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{xy-y(x+y)}{(xy)^2}=$$

$$=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{xy-x(x+y)}{(xy)^2}=\frac{-1}{y^2}\cdot\frac{dz}{dt}$$

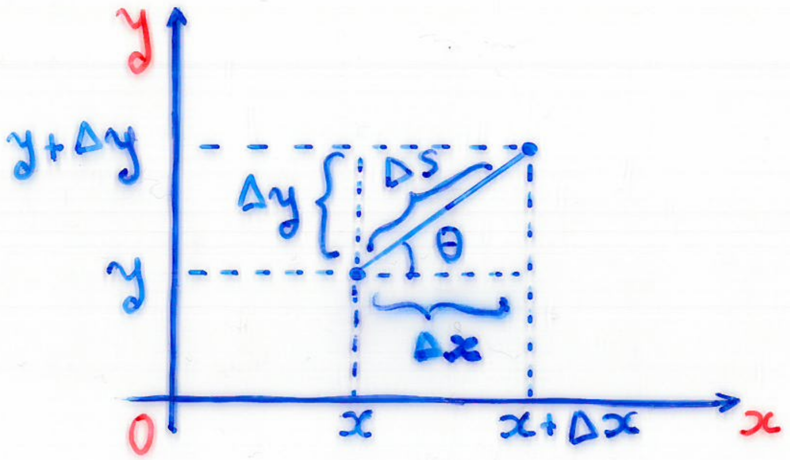
Άρα

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}=x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{dz}{dt}=-\frac{dz}{dt}$$

και

$$y^2\frac{\partial z}{\partial y}=y^2\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{dz}{dt}=-\frac{dz}{dt}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟ ΚΑΤΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ.



$$\Delta x = \Delta s \cos\theta, \quad \Delta y = \Delta s \sin\theta$$

Ορ. Η παράγωγος της f κατά κατεύθυνση θ, στο σημείο (x,y) συμβολίζεται με $D_\theta f(x,y)$ και ορίζεται ως το μέγεθος

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta s}$$

(Θεώρημα: Έστω $z = f(x,y)$ συνεχής συνάρτηση της οποίας οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y είναι επίσης συνεχείς. Έστω ότι μεταβολές δx και δy ως προς τις μεταβλητές x και y επιφέρουν μεταβολή δz ως ως προς την μεταβλητή z. Τότε

$$\delta z = f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x,y) = f_x(x,y)\delta x + f_y(x,y)\delta y +$$

$$+ \eta_1 \delta x + \eta_2 \delta y$$ όπου $\eta_1, \eta_2 \to 0$ όταν

$\delta x, \delta y \to 0.$)

Θεωρούμε το πηλίκο

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta s}$$, το οποίο ισούται

με $f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta + \eta_1\cos\theta + \eta_2\sin\theta$

όπου $\eta_1, \eta_2 \to 0$ όταν $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Άρα

$$D_\theta f(x,y) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta s} =$$

$$= f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta.$$

(διότι όταν $\Delta s \to 0$, $\Delta x, \Delta y \to 0$

και άρα $\eta_1, \eta_2 \to 0$)

Παρατηρήσεις:

(1). $D_0 f(x,y) = f_x(x,y)$ $\quad D_{\frac{\pi}{2}} f(x,y) = f_y(x,y)$.

(2). Το διάνυσμα $\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\hat{i} + f_y(x,y)\hat{j}$ ονομάζεται διάνυσμα κλίσης της f στο σημείο (x,y).

(3). Παρατηρούμε ότι

$$\left(f_x(x,y)\hat{i} + f_y(x,y)\hat{j}\right)\cdot\left(\underbrace{\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}}_{\text{μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση } \theta}\right) =$$

$$= f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta =$$

$$= D_\theta f(x,y)$$

Όμως

$$\left(f_x(x,y)\hat{i} + f_y(x,y)\hat{j}\right)\cdot\left(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}\right) =$$

$$= |\nabla f(x,y)|\cdot\cos\phi$$

όπου ϕ η γωνία που σχηματίζει το $\nabla f(x,y)$ με την κατεύθυνση θ.

Άρα

$$D_\theta f(x,y) = |\nabla f(x,y)| . \cos\phi$$

και επομένως

$$-|\nabla f(x,y)| \leq D_\theta f(x,y) \leq |\nabla f(x,y)|$$

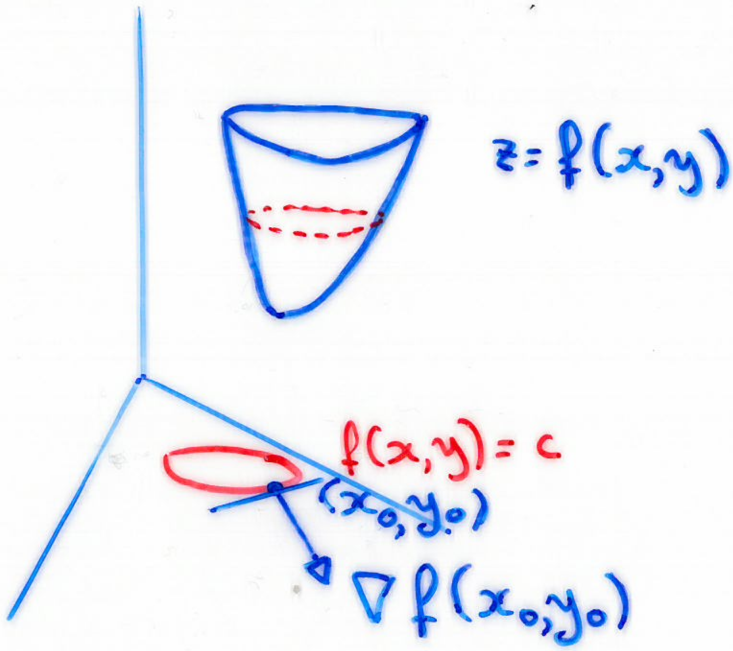
Εάν $\phi = 0$ $D_\theta f(x,y) = |\nabla f(x,y)|$

Εάν $\phi = \pi$ $D_\theta f(x,y) = -|\nabla f(x,y)|$

- Άρα η f αυξάνεται περισσότερο προς την κατεύθυνση του διανύσματος κλίσης της, ενώ μειώνεται περισσότερο προς την κατεύθυνση που είναι αντίθετη του $\nabla f(x,y)$.

Ο ρυθμός μεταβολής είναι μηδενικός όταν $\phi = \frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}$.

4) Σε κάθε σημείο (x,y) το $\nabla f(x,y)$ είναι κάθετο στην ισοσταθμική που διέρχεται από αυτό το σημείο.



Ασκήσεις: 1) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y)=xy+y^2$ στο σημείο $P_0(2,5)$. Προς ποιές κατευθύνσεις η παράγωγος της f θα είναι μηδέν;

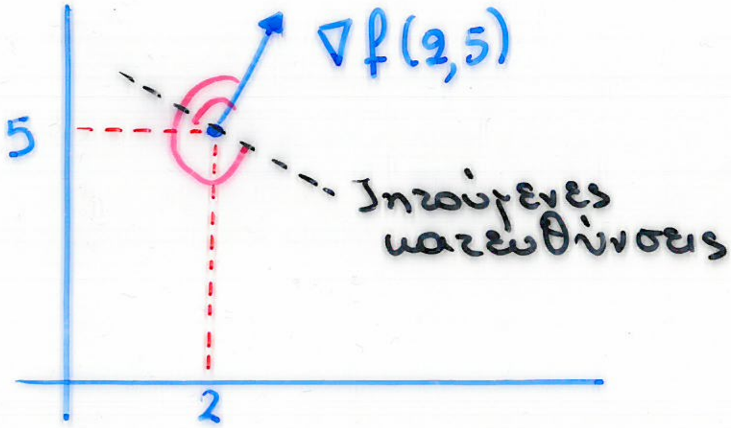
Απ.

$f_x(x,y)=y \qquad f_y(x,y)=x+2y$

$f_x(2,5)=5 \qquad f_y(2,5)=12$

Άρα

$$\nabla f(2,5) = 5\hat{i} + 12\hat{j}$$



Είναι οι κατευθύνσεις δύο διανυσμάτων κάθετων στο $\nabla f(2,5) = 5\hat{i} + 12\hat{j}$

(Αυτά τα διανύσματα είναι τα

$-12\hat{i} + 5\hat{j}$ και $12\hat{i} - 5\hat{j}$)

2) Έστω $h(x,y) = 3e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ το ύψος ενός βουνού στη θέση (x,y). Ξεκινώντας από το $(1,0)$, σε ποιά κατεύθυνση πρέπει να αρχίσει να προχωράει κάποιος για να σκαρφαλώσει γρηγορότερα;

<u>Απ.</u>

$h_x'(x,y)=3e^{-x^2}(-2x)$ $\qquad$ $h_y'(x,y)=e^{-3y^2}(-6y)$

$h_x'(1,0)=-6e^{-1}$ $\qquad$ $h_y'(1,0)=0$

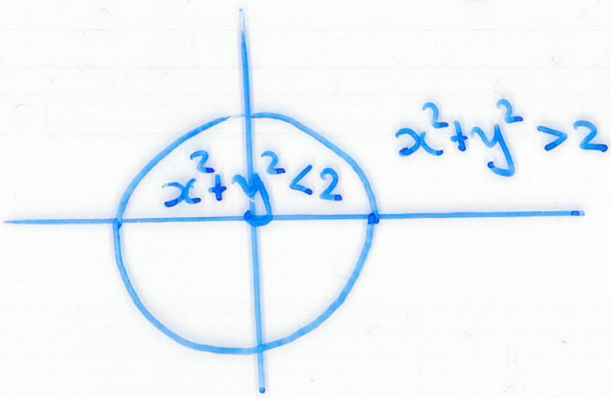
Η ζητούμενη κατεύθυνση είναι αυτή του διανύσματος $-6e^{-1}\hat{i}$.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Περιοχές του επιπέδου:

Η εξίσωση $g(x,y)=c$ ορίζει μια καμπύλη. Η καμπύλη χωρίζει το επίπεδο σε δύο υποπεριοχές

π.χ. $\quad x^2+y^2=2$



Εάν η g είναι συνεχής

$$\left.\begin{array}{ll} g(x,y)<c & g(x,y)>c \end{array}\right\} \text{ ανοικτές περιοχές}$$

$$\left.\begin{array}{ll} g(x,y)\le c & g(x,y)\ge c \end{array}\right\} \text{ κλειστές περιοχές}$$

Καμπύλη: σύνορο της περιοχής.

Περιοχή φραγμένη: Περιοχή που περιέχεται σε κάποιο κύκλο.

Περιοχή συμπαγής: Κλειστή φραγμένη περιοχή.

Γειτονιά σημείου: Περιοχή που το σημείο αυτό βρίσκεται στο εσωτερικό της.

κυκλική

τετραγωνική

Τοπικά ακρότατα σημεία.

<u>Ορ.</u> Έστω f συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία ορίζεται σε κάποιο σύνολο S. Το σημείο (x_0, y_0) θα αποτελεί ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ (ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ), για την f, εάν υπάρχει γειτονιά N του (x_0, y_0) τέτοια ώστε

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \qquad \left(f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \right)$$

για όλα τα $(x, y) \in N \cap S$.

- Τα τοπικά μέγιστα (ελάχιστα) σημεία της f, ονομάζονται και τοπικά ακρότατα σημεία της.
- Εάν το (x_0, y_0) είναι τοπικό ακρότατο σημείο, ο αριθμός $z_0 = f(x_0, y_0)$ ονομάζεται τοπική ακρότατη τιμή της f.

Θεώρημα: Εάν το (x_0, y_0) αποτελεί τοπικό ακρότατο σημείο για την f, τότε μια από τις παρακάτω προτάσεις πρέπει να ισχύει:

(i) $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$

ή

(ii) τουλάχιστον μια από τις $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ δεν υπάρχει.

- Εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f, στα οποία μηδενίζονται οι δύο μερικές της παράγωγοι, θα τα ονομάζουμε ελεύθερα στάσιμα σημεία της f.

Παραδείγματα: α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = -x^2 - y^2$. Το σημείο $(0,0)$ αποτελεί προφανώς τοπικό μέγιστο σημείο της.

Παρατηρούμε ότι

$$f_x(0,0) = 0 \quad \text{και} \quad f_y(0,0) = 0.$$

δηλ. ικανοποιείται η συνθήκη (i) του Θεωρήματος.

β) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x,y)=3+2\sqrt{x^2+y^2}.$$

Το σημείο $(0,0)$ αποτελεί προφανώς τοπικό ελάχιστο σημείο για την f. Παρατηρούμε ότι σ' αυτό το σημείο οι δύο μερικές παράγωγοι της f,

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_y(x,y)=\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

δεν ορίζονται. (Δηλαδή ισχύει η συνθήκη (ii) του Θεωρήματος).

Παρατήρηση: Το Θεώρημα μας δίνει μια αναγκαία συνθήκη για να αποτελεί ένα σημείο (x_0, y_0) ακρότατο σημείο της f. Η συνθήκη αυτή δεν είναι και ικανή.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y)=y^2-x^2$. Έχουμε ότι

$$f_x(x,y)=-2x \quad , \quad f_y(x,y)=2y,$$

οι οποίες ορίζονται σε κάθε σημείο του xy-επιπέδου.

Παρατηρούμε ότι

$$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0 \quad \text{μόνον} \quad \text{όταν}$$

$(x,y)=(0,0)$. Όμως

το $(0,0)$ δεν αποτελεί τοπικό ακρότατο της f.

Αποδ.

Έστω ότι το $(0,0)$ αποτελεί τοπικό μέγιστο για την f. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει γειτονιά N του $(0,0)$, για την οποία ισχύει ότι

$$f(0,0) \geq f(x,y) \qquad - (*)$$

για όλα τα $(x,y) \in N$.

Θεωρούμε ένα σημείο $(0,k)$, το οποίο είναι διάφορο του $(0,0)$ και το οποίο ανήκει στην γειτονιά N.

Από την $(*)$, έχουμε ότι $f(0,0) \geq f(0,k)$

δηλ. $0 \geq k^2$ — ΑΤΟΠΟ.

Άρα στο $(0,0)$ η f δεν μπορεί να "παίρνει" τοπική μέγιστη τιμή.

ΜΕ ΠΑΡΟΜΟΙΟ ΤΡΟΠΟ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΞΟΥΜΕ ΟΤΙ ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΠΑΙΡΝΕΙ ΚΑΙ ΤΟΠΙΚΗ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ.

- Ελεύθερα στάσιμα σημεία της f, στα οποία δεν έχουμε τοπική ακρότατη τιμή τα ονομάζουμε ΣΑΓΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ της f.

Θεώρημα: Έστω f συνάρτηση δύο μεταβλητών της οποίας οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς σε κάποια γειτονιά του σημείου (x_0, y_0). Έστω επίσης $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Θέτουμε

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad \Gamma = f_{yy}(x_0, y_0)$$

και $\Delta = B^2 - A\Gamma$

Τότε

α) Εάν $\Delta < 0$ και $A < 0$, το (x_0, y_0) είναι ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ.

β) Εάν $\Delta < 0$ και $A > 0$, το (x_0, y_0) είναι ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ.

γ) Εάν $\Delta > 0$, το (x_0, y_0) είναι ΣΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ.

δ) Εάν $\Delta = 0$, δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την συγκεκριμένη περίπτωση.

<u>Παράδειγμα:</u>

$$f(x,y) = \frac{4}{3}x^3 + 4xy^2 - 4x^2 - 4y^2 + 1.$$

$$f_x(x,y) = 4x^2 + 4y^2 - 8x \qquad f_y(x,y) = 8xy - 8y.$$

Στα σημεία $(0,0), (2,0), (1,-1), (1,1)$ μηδενίζονται και οι δύο μερικές παράγωγοι της f.

Επίσης έχουμε ότι

$$f_{xx}(x,y) = 8x - 8, \quad f_{yy}(x,y) = 8x - 8,$$

$$f_{xy}(x,y) = 8y.$$

Άρα

$$= (8y)^2 - (8x-8)(8x-8) = 64[y^2 - (x-1)^2].$$

$(0,0)$: $\Delta=-64<0$ και $A=-8<0 \Rightarrow$ ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ.

$(2,0)$: $\Delta=-64<0$ και $A=8>0 \Rightarrow$ ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ.

$(1,-1)$: $\Delta=64>0 \Rightarrow$ ΣΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ.

$(1,1)$: $\Delta=64>0 \Rightarrow$ ΣΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ. ΠΟΛ/ΣΤΕΣ LAGRANGE.

Έστω f συνάρτηση με τύπο $z=f(x,y)$. Συχνά θέλουμε να συγκρίνουμε μεταξύ τους, τις τιμές της f όχι σε μία ολόκληρη περιοχή αλλά μόνον στα σημεία μιας καμπύλης στο xy-επίπεδο, με εξίσωση $g(x,y)=c$

Τα τοπικά ακρότατα σημεία της f, που υπόκεινται σ'ένα τέτοιο περιορισμό, τα ονομάζουμε ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ.

Για τον εντοπισμό τους, εργαζόμαστε ως εξής:

- Εάν ο περιορισμός $g(x,y)=c$ μπορεί να λυθεί στην μορφή συνάρτησης $y=y(x)$ (ή $x=x(y)$) τότε αυτά θα αναζητηθούν μεταξύ των στάσιμων σημείων της συνάρτησης $f(x,y(x))$ (ή $f(x(y),y)$), η οποία είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Τα σημεία αυτά ονομάζονται <u>Δεσμευμένα στάσιμα</u> σημεία της f με τον περιορισμό $g(x,y)=c$.

<u>Παράδειγμα:</u> Θέλουμε να βρούμε τις τοπικές ακρότατες τιμές της $f(x,y)=x^2-xy$ που υπόκειται στον περιορισμό $g(x,y)=x-2y=1$.

Αντικαθιστώντας $x=1+2y$ στην f, βρίσκουμε

$$f = f(x(y),y) = (1+2y)^2 - (1+2y)y =$$
$$= 2y^2+3y+1.$$

Οπότε

$$f'(y) = 4y+3=0 \Rightarrow y=-3/4.$$

Άρα στο σημείο $\left(-\frac{2}{4}, \frac{-3}{4}\right)$ ενδέχεται η f να παρουσιάζει τοπική ακρότατη τιμή σε σχέση με τις τιμές στα σημεία (x,y) που ικανοποιούν επίσης την συνθήκη

$$x-2y=1$$

• Στην γενικότερη περίπτωση που ο περιορισμός δίνεται σε πλεγμένη μορφή, το επόμενο Θεώρημα είναι πολύ χρήσιμο στην αναζήτηση των τοπικών ακροτάτων <u>υπό</u> περιορισμό, της f.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω f, g συναρτήσεις δύο μεταβλητών, οι οποίες έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάποια γειτονιά του σημείου (x_0, y_0). Εάν το (x_0, y_0) αποτελεί τοπικό ακρότατο σημείο της f, όταν οι μεταβλητές της υπόκεινται στον περιορισμό $g(x,y)=c$, και εάν $\nabla g(x_0,y_0) \neq \vec{0}$, τότε

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$$

για κάποιο πραγματικό αριθμό λ.

(Κάθε σημείο (x_0,y_0) της καμπύλης $g(x,y)=c$ που ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη ονομάζεται Δ.Σ.Σ. της f)

λ: πολλ/στης Lagrange.

Παράδειγμα:

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y)=2x+y$ με τον περιορισμό $g(x,y)=x-y^2=2$.

Έχουμε

$f_x(x_0,y_0)=2$ $\quad$ $g_x(x_0,y_0)=1$

$f_y(x_0,y_0)=1$ $\quad$ $g_y(x_0,y_0)=-2y_0$.

Εάν το σημείο (x_0,y_0) αποτελεί Τ.Α.Σ. υπο περιορισμο, βάσει του προηγούμενου Θεωρήματος, $\exists\, \lambda \in R$ έτσι ώστε $2\hat{i}+\hat{j}=\lambda(\hat{i}+(-2y_0)\hat{j})$

Επιπλέον επειδή το (x_0,y_0) είναι σημείο της καμπύλης $x-y^2=2$, θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωσή της.

Έχουμε δηλαδή,

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=2\\ -2\lambda y_0=1\\ x_0-y_0^2=2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda=2\\ y_0=-1/4\\ x_0=33/16\end{array}$$

Άρα το $(33/16,-1/4)$ ενδέχεται να είναι τοπικό ακρότατο σημείο υπό περιορισμό.

ΟΛΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ.

Συχνά μας ενδιαφέρουν οι ακρότατες τιμές μιας συνάρτησης $f(x,y)$ σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της, δηλαδή η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της. Οι τιμές αυτές ονομάζονται ολικές ή απόλυτες ακρότατες τιμές, σε αντίθεση με τις τοπικές που εξετάσαμε προηγουμένως.

Θεώρημα: Μια συνάρτηση $f(x,y)$ που είναι συνεχής σε συμπαγή περιοχή έχει ολικά ακρότατα σ' αυτή την περιοχή.

Θεώρημα: Έστω συνάρτηση $f(x,y)$, η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάποια περιοχή του επιπέδου.

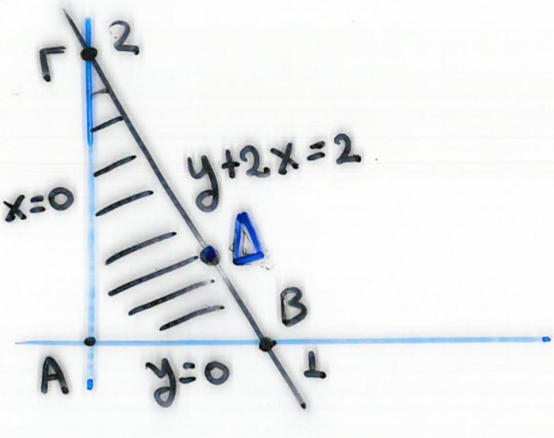
Κάθε σημείο ολικού ακρότατου της f, αν υπάρχει, θα είναι είτε α) ελεύθερο στάσιμο σημείο στην περιοχή.

είτε β) δεσμευμένο στάσιμο σημείο του συνόρου.

είτε γ) κορυφή όπου τέμνονται δύο καμπύλες του συνόρου

Άσκηση: Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα σημεία της $f(x,y)=x^2+y^2$ στην τριγωνική περιοχή που περιβάλλεται από τους άξονες $x=0$, $y=0$ και την ευθεία $y+2x=2$, συμπεριλαμβανομένου ολόκληρου του συνόρου.

Απάντηση:



Η περιοχή είναι συμπαγής και η συνάρτηση συνεχής, επομένως υπάρχουν ολικά ακρότατα σημεία

Έχουμε:

1. Ελεύθερα στάσιμα

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x = 0 \\ f_y(x,y) &= 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=0,\ y=0$$

Το (0,0) είναι η κορυφή Α.

Άρα δεν έχουμε Ε.Σ.Σ.

2. Δεσμευμένα στάσιμα.

ΑΒ: $y=0 \Rightarrow f(x,0)=x^2,\quad f'=2x=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

Το σημείο (0,0), το οποίο είναι και κορυφή

ΑΓ: $x=0 \Rightarrow f=f(0,y)=y^2 \Rightarrow f'=2y=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

Όπως και προηγουμένως το σημείο (0,0), το οποίο είναι και κορυφή

ΒΓ: $y=2-2x \Rightarrow f=f(x,2-2x)=x^2+(2-2x)^2=$

$= 5x^2-8x+4,\ f'=10x-8=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=4/5 \\ y=2/5 \end{matrix}$

Το σημείο $\Delta(4/5, 2/5)$

Το σημείο Δ ανήκει στο ευθ. τμήμα ΑΒ.

3. Κορυφές Α, Β, Γ

$A(0,0)$, $B(1,0)$, $\Gamma(0,2)$.

Οι τιμές της f, σ' αυτά τα σημεία θα είναι:

$f(0,0)=0$ $\qquad$ $f(0,2)=4$

$f(1,0)=1$ $\qquad$ $f(4/5, 2/5) = 4/5$

Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι οι ολικές ακρότατες τιμές, θα πρέπει να αναζητηθούν μεταξύ αυτών των αριθμών.

Άρα η μέγιστη τιμή είναι 4 και παρατηρείται στο σημείο $(0,2)$, ενώ η ελάχιστη είναι 0 και παρατηρείται στο $(0,0)$.