Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Πληροφορικής
Μάθημα: Τεχνητή Νοημοσύνη, 2024–25
Διδάσκων: Ι. Ανδρουτσόπουλος

Ασκήσεις μελέτης της 8ης διάλεξης

8.1. (i) Έστω ότι α και β είναι δύο τύποι της προτασιακής λογικής. Αποδείξτε ότι $\alpha \models \beta$ αν και μόνο αν ο τύπος $(\alpha \Rightarrow \beta)$ είναι έγκυρος. (ii) Αποδείξτε την ορθότητα του κανόνα Modus Ponens. (iii) Αποδείξτε την ορθότητα του κανόνα Modus Tollens. (iv) Ο κανόνας της ανάλυσης είναι ορθός για k = 1 (βλ. σχετική διαφάνεια); Για n = 1; Για k = n = 1;

i) *Ο πίνακας αληθείας για τον τύπο (α => β) είναι ο παρακάτω:*

	α	β	(α=>β)
1.	T	T	T
2.	T	F	F
3.	F	T	T
4.	F	F	T

Έστω ότι ο τύπος (α=>β) είναι έγκυρος, δηλαδή ότι είναι αληθής σε κάθε μοντέλο. Τότε σε κάθε μοντέλο, οι τύποι α και β θα έχουν έναν από τους συνδυασμούς λογικών τιμών των γραμμών (1), (3) ή (4) του πίνακα, γιατί ο συνδυασμός της γραμμής (2) κάνει τον τύπο (α=>β) ψευδή, κάτι που σύμφωνα με την υπόθεσή μας είναι αδύνατον. Περιοριζόμενοι στους συνδυασμούς τιμών των γραμμών (1), (3) και (4), παρατηρούμε ότι όποτε (σε όποιο μοντέλο) αληθεύει ο α, αληθεύει και ο β. Οπότε α |= β.

Αντίστροφα, έστω ότι α|= β. Τότε, σε κάθε μοντέλο όπου αληθεύει ο α, αληθεύει και ο β. Επομένως, δεν υπάρχει μοντέλο στο οποίο οι τύποι α και β έχουν τις λογικές τιμές της περίπτωσης (2) του πίνακα αληθείας. Άρα για κάθε μοντέλο, βρισκόμαστε σε μία από τις περιπτώσεις (1), (3) ή (4), όπου ο τύπος (α=>β) είναι αληθής. Άρα ο α=>β είναι αληθής σε κάθε μοντέλο και επομένως είναι έγκυρος.

ii) *Για να δείξουμε ότι ο κανόνας Modus Ponens είναι ορθός, θα αποδείξουμε ότι ((α=>β) Λ α) |= β.*

Ο πίνακας αληθείας που προκύπτει είναι ο παρακάτω:

	α	β	(α=>β)	((α=>β) ∧ α)
1.	T	T	T	T
2.	T	F	F	F
3.	F	T	T	F
4.	F	F	T	F

Παρατηρούμε πως όταν η πρόταση ((α=>β) Λ α) είναι αληθής, τότε είναι και η πρόταση β αληθής. Άρα ((α=>β) Λ α) |= β. Συνεπώς, ο κανόνας Modus Ponens είναι ορθός.

iii) *Για να αποδείξουμε την ορθότητα του κανόνα Modus Tollens θα δείξουμε ότι αν αληθεύουν τα (α=>β) και ¬β, τότε αληθεύει και το ¬α. Ισοδύναμα, θα δείξουμε ότι αν αληθεύει το ((α=>β) Λ ¬β), τότε αληθεύει και το ¬α.*

	α	β	(α=>β)	¬β	((α=>β) Λ ¬β)	¬α
1.	T	T	T	F	F	F
2.	T	F	F	T	F	F
3.	F	T	T	F	F	T
4.	F	F	T	T	T	T

Παρατηρούμε πως όταν η πρόταση ((α=>β) Λ ¬β) αληθεύει, τότε αληθεύει και η ¬α. Άρα ((α=>β) Λ ¬β) |= ¬α. Άρα ο κανόνας Modus Tollens είναι ορθός.

iv) *Ο κανόνας της ανάλυσης για κ = 1 και υποθέτοντας ότι l_1 είναι η άρνηση του m_j (ή αντίστροφα) καταλήγει ως εξής:*

$(l_1) \land (m_1 \lor \ldots \lor m_n) \vdash (m_1 \lor \ldots \lor m_{j-1} \lor m_{j+1} \lor \ldots \lor m_n)$

Έστω λοιπόν ότι αληθεύουν τα l_1 και $(m_1 \lor \ldots \lor m_n)$. Τότε το m_j είναι ψευδές. Όμως, αφού είναι αληθές το $(m_1 \lor \ldots \lor m_n)$, κάποιο άλλο από τα m είναι αληθές. Επομένως, αληθεύει και το $(m_1 \lor \ldots \lor m_{j-1} \lor m_{j+1} \lor \ldots \lor m_n)$, οπότε ο κανόνας της ανάλυσης είναι ορθός.

Ο κανόνας της ανάλυσης για n = 1 και υποθέτοντας ότι l_i είναι η άρνηση του m_1 (ή αντίστροφα) καταλήγει ως εξής:

$(l_1 \lor \ldots \lor l_k) \land (m_1) \vdash (l_1 \lor \ldots \lor l_{i-1} \lor l_{i+1} \lor \ldots \lor l_k)$

Έστω ότι αληθεύουν τα $(l_1 \lor \ldots \lor l_k)$ και m_1. Τότε το l_i θα είναι ψευδές. Οπότε, αφού αληθεύει το $(l_1 \lor \ldots \lor l_k)$, κάποιο άλλο από τα l είναι αληθές. Επομένως, αληθεύει και το $(l_1 \lor \ldots \lor l_{i-1} \lor l_{i+1} \lor \ldots \lor l_k)$, οπότε ο κανόνας της ανάλυσης είναι ορθός.

Για n = k = 1, ο κανόνας της ανάλυσης γίνεται $l_1 \land m_1 \vdash \square$, όπου το l_1 είναι η άρνηση του m_1. Για να είναι ορθός ο κανόνας σε αυτήν την περίπτωση, θα πρέπει όποτε είναι αληθή τα l_1 και m_1, να είναι ορθό και το αποτέλεσμα του κανόνα (η κενή διάζευξη). Αλλά τα l_1 και m_1 δεν είναι ποτέ αληθή μαζί, αφού το ένα είναι η άρνηση του άλλου. Άρα, ο κανόνας είναι ορθός και σε αυτήν την περίπτωση.

8.2. (α) Μετατρέψτε την ακόλουθη βάση γνώσης (ΒΓ) σε κανονική συζευκτική μορφή (CNF), δείχνοντας αναλυτικά τα βήματα της μετατροπής:

$\neg B_{1,1}$

Είναι ήδη σε μορφή CNF.

$(B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1}))$

Μετατρέπεται ως εξής:

$((B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \lor P_{2,1})) \land ((P_{1,2} \lor P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}))$

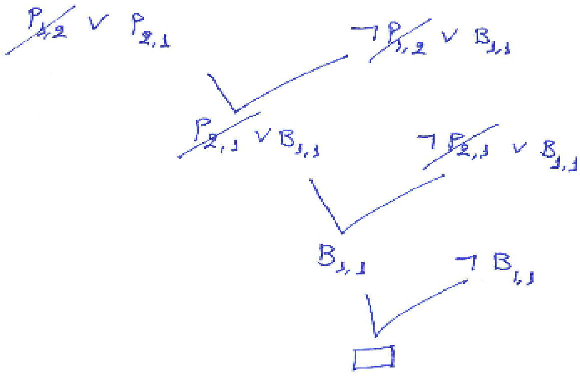
$((\neg B_{1,1} \lor P_{1,2} \lor P_{2,1}) \land (\neg(P_{1,2} \lor P_{2,1}) \lor B_{1,1}))$

$((\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge ((\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}) \vee B_{1,1}))$

$((\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \wedge (\neg P_{1,2} \vee B_{1,1}) \wedge (\neg P_{2,1} \vee B_{1,1}))$

(β) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της ανάλυσης (resolution), αποδείξτε με απαγωγή σε άτοπο ότι ΒΓ $\models$ $(\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1})$, όπου ΒΓ η βάση γνώσης του σκέλους (α) σε CNF. Σχεδιάστε το δέντρο της απόδειξης.

Εισάγουμε την άρνηση του $(\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1})$, δηλαδή το $(P_{1,2} \vee P_{2,1})$, που είναι σε CNF, στη ΒΓ και δείχνουμε ότι καταλήγουμε σε άτοπο.



8.3. Εξηγήστε πώς θα μπορούσε ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας ενός τύπου προτασιακής λογικής που βρίσκεται σε κανονική συζευκτική μορφή (CNF) να γίνει με αναζήτηση A*.

Τι θα παρίστανε κάθε κατάσταση και πώς ακριβώς; Ποια θα ήταν η αρχική κατάσταση;

Θα παρίστανε μια ανάθεση τιμών στα σύμβολα (ατομικές προτάσεις, εκτός από τις ειδικές True, False) του τύπου. Κάθε κατάσταση θα ήταν ένα διάνυσμα με τόσες συνιστώσες όσες και τα διαφορετικά σύμβολα του τύπου. Η τιμή κάθε συνιστώσας θα ήταν T (αληθές) ή F (ψευδές). Η αρχική κατάσταση θα αντιστοιχούσε σε τυχαία ανάθεση τιμών στα σύμβολα του τύπου.

Πώς θα προέκυπταν τα παιδιά κάθε κατάστασης;

Τα παιδιά θα μπορούσαν να παριστάνουν π.χ. όλες τις νέες αναθέσεις τιμών που προκύπτουν μεταβάλλοντας σε κάθε μία νέα ανάθεση την τιμή ενός μόνο συμβόλου, σε σχέση με τις τιμές της τρέχουσας κατάστασης. Έτσι κάθε κατάσταση θα είχε πάντα τόσα παιδιά όσα και τα διαφορετικά σύμβολα του τύπου. Επομένως και ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης θα ήταν πεπερασμένος.

Ποια θα μπορούσε να ήταν η ευρετική συνάρτηση; Θα ήταν «αποδεκτή»; Ναι ή όχι και γιατί; Θεωρήστε ότι το κόστος κάθε μετάβασης είναι 1 και ότι το κόστος ενός μονοπατιού ισούται με τον αριθμό μεταβάσεών του.

Η ευρετική θα μπορούσε να ήταν ο αριθμός των διαζεύξεων (διαζευκτικών παρενθέσεων) του CNF τύπου που δεν αληθεύουν με την ανάθεση τιμών της αξιολογούμενης κατάστασης. Η ευρετική αυτή δεν είναι αποδεκτή. Μπορεί π.χ. με την ανάθεση τιμών μιας αξιολογούμενης κατάστασης να υπάρχουν δύο διαζεύξεις που δεν αληθεύουν και αλλάζοντας τιμή σε ένα μόνο σύμβολο (κάνοντας μόνο μία μετάβαση) να αληθεύουν πλέον όλες οι διαζεύξεις, δηλαδή να έχουμε φτάσει σε τελική κατάσταση. Επομένως, η τιμή (2) που είχε επιστρέψει η ευρετική στην προηγούμενη κατάσταση ήταν υπερ-εκτίμηση (όχι υπο-εκτίμηση όπως θα έπρεπε) της απόστασης (του αριθμού μεταβάσεων) ως την πλησιέστερη τελική κατάσταση.

Αν η ευρετική που προτείνατε είναι αποδεκτή, τι μας εξασφαλίζει αυτό; Αν δεν είναι, έχει αυτό κάποια σημαντική επίπτωση στον έλεγχο ικανοποιησιμότητας;

Αν η ευρετική ήταν αποδεκτή, θα ήμασταν σίγουροι ότι ο A θα έβρισκε πάντα το βέλτιστο μονοπάτι. Η ευρετική που χρησιμοποιούμε, όμως, δεν είναι αποδεκτή και έτσι δεν έχουμε εγγύηση ότι ο A* θα βρίσκει πάντα το βέλτιστο μονοπάτι. Στον έλεγχο ικανοποιησιμότητας, όμως, αυτό δεν είναι σημαντικό, γιατί δεν μας ενδιαφέρει να βρίσκει το βέλτιστο μονοπάτι· μας ενδιαφέρει μόνο αν υπάρχει ή όχι τελική κατάσταση, δηλαδή ανάθεση τιμών που ικανοποιεί τον τύπο.*

Είναι σίγουρο πως αν ο τύπος είναι ικανοποιήσιμος, ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας θα τερματίσει και θα αποκριθεί θετικά; Ναι ή όχι και γιατί;

Ναι, γιατί ο μέγιστος παράγοντας διακλάδωσης είναι πεπερασμένος (βλ. παραπάνω) και το κόστος κάθε μετάβασης είναι 1. Στην περίπτωση αυτή, γνωρίζουμε ότι ο A είναι πλήρης. Επομένως, αν ο τύπος είναι ικανοποιήσιμος, δηλαδή αν υπάρχει τελική κατάσταση (ανάθεση τιμών με την οποία αληθεύει ο τύπος), ο A* θα την βρει (σε πεπερασμένο χρόνο) και επομένως ο έλεγχος θα τερματίσει με θετική απόκριση.*

8.4. α) Κάθε τύπος **προτασιακής λογικής** μπορεί να μετατραπεί σε κανονική συζευκτική μορφή:
_X_συμφωνώ και μάλιστα ο νέος τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον αρχικό
___συμφωνώ, αλλά ο νέος τύπος δεν είναι σίγουρα ταυτολογικά ισοδύναμος με τον αρχικό
___διαφωνώ.

β) Αν διαθέτουμε αλγόριθμο που αποκρίνεται πάντα αν ένας τύπος προτασιακής λογικής είναι ή δεν είναι ικανοποιήσιμος, μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε για να απαντήσουμε (i) αν ένας τύπος β **έπεται** ταυτολογικά από έναν άλλο τύπο α ($\alpha \models \beta$), καθώς και (ii) για να απαντήσουμε αν ο τύπος β **δεν έπεται** ταυτολογικά από τον α ($\alpha \not\models \beta$):

_X_συμφωνώ και με τα δύο (i και ii)
___συμφωνώ μόνο με το ένα (i ή ii, αλλά όχι και τα δύο)
___διαφωνώ και με τα δύο (τα i και ii είναι και τα δύο λάθος).

Ξέρουμε ότι $\alpha \models \beta$ ανν ($\alpha \wedge \neg \beta$) μη ικανοποιήσιμος· άρα και $\alpha \not\models \beta$ ανν ($\alpha \wedge \neg \beta$) ικανοποιήσιμος. Επομένως, μπορούμε να ελέγξουμε με τον αλγόριθμο που διαθέτουμε αν ο ($\alpha \wedge \neg\beta$) είναι ικανοποιήσιμος ή όχι· αν είναι ικανοποιήσιμος, τότε απαντάμε αρνητικά στο (i) και καταφατικά στο (ii)· αν δεν είναι ικανοποιήσιμος, απαντάμε καταφατικά στο (i) και αρνητικά στο (ii).

γ) Εξηγήστε πώς θα μπορούσε να γίνει ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας ενός τύπου προτασιακής λογικής που βρίσκεται σε κανονική συζευκτική μορφή χρησιμοποιώντας αναρρίχηση λόφου.

γ1) Τι θα παρίστανε κάθε κατάσταση και πώς ακριβώς;

Θα παρίστανε μια ανάθεση τιμών στα σύμβολα (ατομικές προτάσεις, εκτός από τις ειδικές True, False) του τύπου. Κάθε κατάσταση θα ήταν ένα διάνυσμα με τόσες συνιστώσες όσες και τα διαφορετικά σύμβολα του τύπου. Η τιμή κάθε συνιστώσας θα ήταν true ή false.

γ2) Ποια θα ήταν η αρχική κατάσταση;

Μια τυχαία ανάθεση τιμών στα σύμβολα του τύπου.

γ3) Πώς θα προέκυπταν τα παιδιά κάθε κατάστασης;

Τα παιδιά θα μπορούσαν να παριστάνουν π.χ. όλες τις νέες αναθέσεις τιμών που προκύπτουν μεταβάλλοντας σε κάθε μία νέα ανάθεση την τιμή ενός μόνο συμβόλου, σε σχέση με τις τιμές της τρέχουσας κατάστασης. Έτσι κάθε κατάσταση θα είχε πάντα τόσα παιδιά όσα και τα διαφορετικά σύμβολα του τύπου.

γ4) Ποια θα ήταν η συνάρτηση αξιολόγησης των παιδιών;

Ο αριθμός των διαζεύξεων (διαζευκτικών παρενθέσεων) του CNF τύπου που αληθεύουν με την ανάθεση τιμών του αξιολογούμενου παιδιού.

γ5) Αν η αναζήτηση αναρρίχησης λόφου τελειώσει χωρίς να βρεθεί μοντέλο που ικανοποιεί τον τύπο, είναι σίγουρο ότι ο τύπος είναι μη ικανοποιήσιμος; Γιατί;

Όχι, γιατί μπορεί στην πραγματικότητα να υπάρχει ανάθεση τιμών (μοντέλο) που ικανοποιεί τον τύπο, αλλά η αναρρίχηση λόφου να μην το βρήκε επειδή παγιδεύτηκε σε τοπικό μέγιστο.