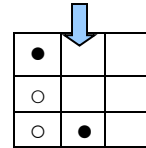
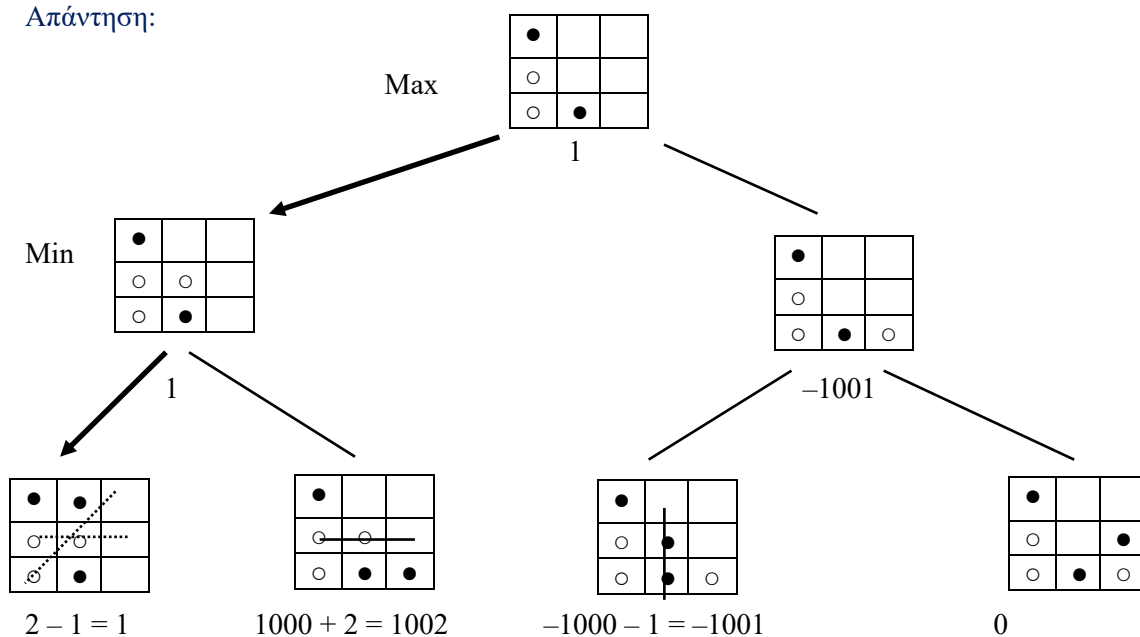


Ασκήσεις μελέτης της 6^{ης} διάλεξης

6.1. (α) Το mini-score-3 παίζεται όπως το score-4, αλλά κερδίζει όποιος καταφέρει να σχηματίσει τριάδα (3 πούλια του σε ευθεία γραμμή, οριζόντια, κατακόρυφα ή διαγώνια) και υπάρχουν μόνο 3 στήλες και 3 γραμμές. Τα πούλια πέφτουν κατακόρυφα. Βρισκόμαστε στην κατάσταση που φαίνεται δεξιά και είναι η σειρά του λευκού, ο οποίος χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο MiniMax με μέγιστο βάθος αναζήτησης 2 (εξετάζει δύο επίπεδα πιο κάτω). Έστω ότι ο λευκός είναι ο παίκτης Max. Σχεδιάστε το δέντρο που θα κατασκευάσει για να αποφασίσει ποια κίνηση θα κάνει.



Απάντηση:



(β) Να προτείνετε μια εύλογη ευρετική συνάρτηση (πιθανώς σύνθετη) που θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει ο λευκός για να αξιολογήσει κάθε φύλλο του δέντρου του προηγούμενου σκέλους. Φροντίστε η ευρετική να δίνει διαφορετική τιμή σε κάθε φύλλο του συγκεκριμένου δέντρου.

Απάντηση: Η ευρετική θα μπορούσε να επιστρέφει τιμές με τον εξής αλγόριθμο:

- $V = 0$.
- Αν στην αξιολογούμενη κατάσταση ο μαύρος έχει ήδη σχηματίσει τριάδα, τότε $V := V - 10.000$.
- Αν στην αξιολογούμενη κατάσταση ο λευκός έχει ήδη σχηματίσει τριάδα, τότε $V := V + 10.000$.
- Αν στην αξιολογούμενη κατάσταση ο μαύρος σχηματίζει τριάδα με μία μόνο κίνηση (έστω κι αν δεν είναι η σειρά του, βλ. συνεχή γραμμή στο τρίτο φύλλο από τα αριστερά του παραπάνω δέντρου), τότε $V := V - 1000$.
- Αν στην αξιολογούμενη κατάσταση ο λευκός σχηματίζει τριάδα με μία μόνο κίνηση (έστω κι αν δεν είναι η σειρά του, βλ. συνεχή γραμμή στο δεύτερο φύλλο από τα αριστερά του παραπάνω δέντρου), τότε $V := V + 1000$.

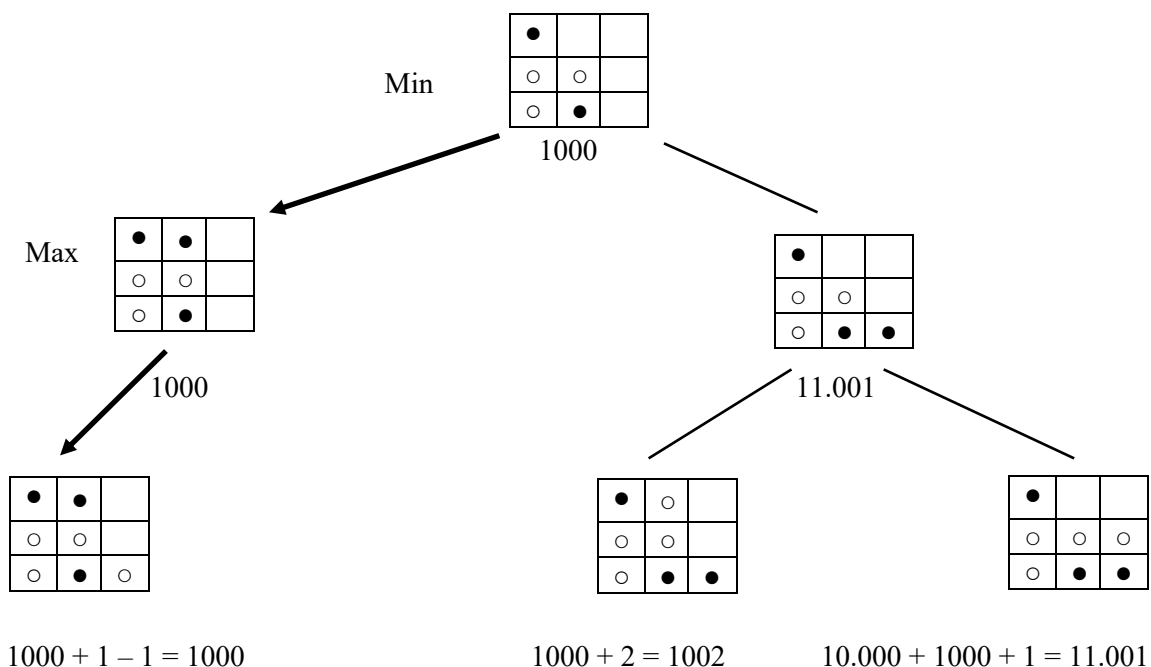
- Πρόσθεσε στο V τον αριθμό των κενών τετραγώνων που συμπληρώνουν άσπρη τριάδα (σημειώνονται με διακεκομμένες γραμμές στο αριστερό φύλλο του παραπάνω δέντρου, δύο τετράγωνα στην περίπτωση αυτή).
- Αφαίρεσε από το V τον αριθμό των κενών τετραγώνων που συμπληρώνουν μαύρη τριάδα.
- Επίστρεψε την τιμή του V .

(γ) Σημειώστε πάνω στο δέντρο του σκέλους (α) τις τιμές MiniMax όλων των κόμβων του, την κίνηση που θα επιλέξει ο λευκός, καθώς και την πρόβλεψή του για την κίνηση που θα κάνει κατόπιν ο μαύρος.

Απάντηση: Οι τιμές έχουν σημειωθεί πάνω στο δέντρο. Η κίνηση που επιλέγει ο λευκός είναι σημειωμένη με βέλος. Η κίνηση που ο λευκός προβλέπει ότι θα κάνει ο μαύρος είναι επίσης σημειωμένη με βέλος.

(δ) Αν ο μαύρος χρησιμοποιεί και αυτός τον αλγόριθμο MiniMax (ως παίκτης Min) με το ίδιο μέγιστο βάθος αναζήτησης και την ίδια ευρετική, μπορούμε να είμαστε σίγουροι πως θα επαληθευθεί η πρόβλεψη του λευκού του προηγούμενου σκέλους ή όχι και γιατί;

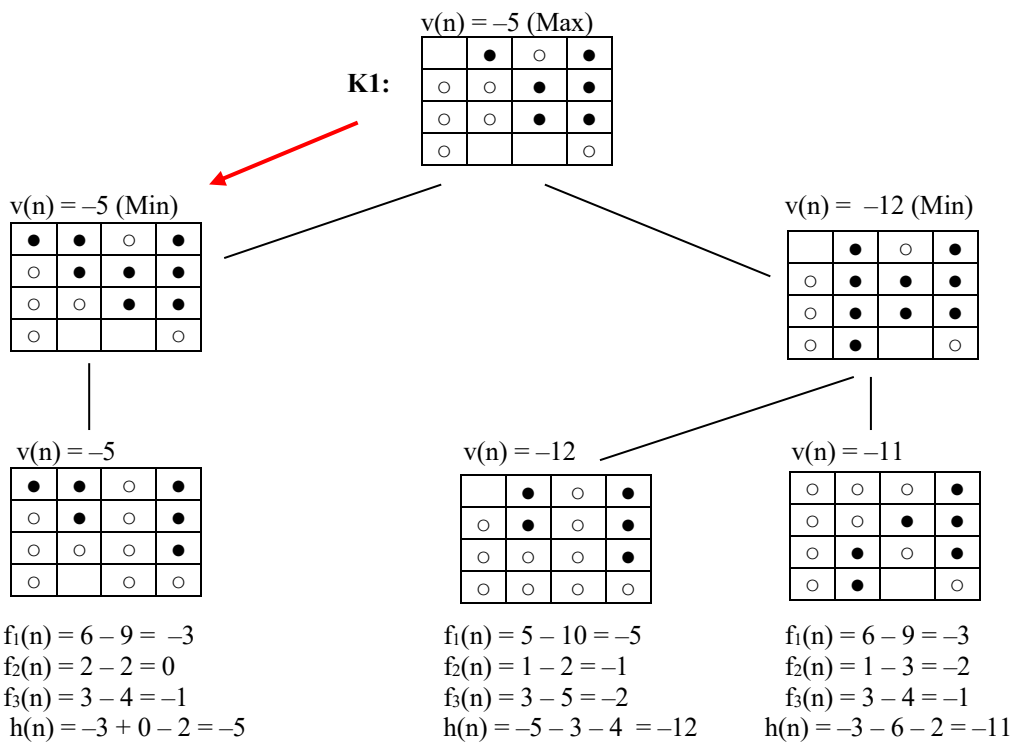
Απάντηση: Γενικά δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι, γιατί ο μαύρος θα κατασκευάσει διαφορετικό δέντρο, με ρίζα την κατάσταση στην οποία θα βρισκόμαστε μετά την κίνηση του λευκού, φύλλα που βρίσκονται ένα επίπεδο πιο κάτω από τα φύλλα του δέντρου που είχε κατασκευάσει ο λευκός και νέες ευρετικές αξιολογήσεις των φύλλων του νέου δέντρου. Το νέο δέντρο μπορεί γενικά να οδηγήσει τον μαύρο να επιλέξει άλλη κίνηση από εκείνη που προέβλεπε το δέντρο του λευκού. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, όμως, αν χρησιμοποιείται η ευρετική της απάντησης του σκέλους (β), το δέντρο που θα κατασκευάσει ο μαύρος θα είναι το ακόλουθο, το οποίο θα οδηγήσει το μαύρο να επιλέξει την ίδια κίνηση που προέβλεπε το δέντρο του λευκού.



6.2. (α) Το mini-Othello παίζεται όπως το κανονικό Othello, αλλά σε σκακιέρα 4x4. Βρισκόμαστε στην κατάσταση K1 του παρακάτω σχήματος και είναι η σειρά του μαύρου παίκτη. Και οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν τον αλγόριθμο MiniMax με βάθος 2 (ο καθένας κοιτάζει δύο επίπεδα πιο κάτω). Ο μαύρος είναι ο Max και ο άσπρος ο Min. Και οι δύο χρησιμοποιούν την ίδια ευρετική συνάρτηση $h(n) = f_1(n) + 3 \cdot f_2(n) + 2 \cdot f_3(n)$, όπου n ο κόμβος του δέντρου αναζήτησης στον οποίο εφαρμόζεται η ευρετική και:

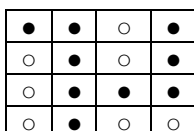
- $f_1(n)$ είναι το συνολικό πλήθος των μαύρων πιονιών μείον το συνολικό πλήθος των άσπρων πιονιών στον κόμβο n .
- $f_2(n)$ είναι το συνολικό πλήθος των μαύρων πιονιών που βρίσκονται σε γωνίες μείον το συνολικό πλήθος των άσπρων που βρίσκονται σε γωνίες στον κόμβο n .
- $f_3(n)$ είναι το συνολικό πλήθος των μαύρων πιονιών που βρίσκονται σε μη γωνιακές ακραίες θέσεις μείον το συνολικό πλήθος των άσπρων που βρίσκονται σε μη γωνιακές ακραίες θέσεις στον n .

(α) Σχεδιάστε στο διαθέσιμο χώρο παρακάτω το δέντρο αναζήτησης που θα κατασκευάσει ο μαύρος. Σημειώστε πάνω στο δέντρο την τιμή $v(n)$ κάθε κόμβου n , όπως την υπολογίζει ο αλγόριθμος MiniMax. Σημειώστε επίσης ποια κίνηση θα επιλέξει ο μαύρος.



(β) Ποιος θα κερδίσει και γιατί;

Ο Max παίζει την κίνηση που δείχνει το κόκκινο βέλος στο παραπάνω σχήμα. Κατόπιν ο Min έχει διαθέσιμη μόνο μία κίνηση, εκείνη που οδηγεί στο πιο αριστερό παιδί του παραπάνω δέντρου, οπότε παίζει εκείνη την κίνηση. Στη συνέχεια ο Max έχει και αυτός μόνο μία διαθέσιμη κίνηση, εκείνη που συμπληρώνει το μόνο κενό τετράγωνο, οπότε παίζει εκείνη την κίνηση και καταλήγουμε στην παρακάτω τελική κατάσταση. Στην κατάσταση αυτή υπάρχουν 9 μαύρα και 7 άσπρα, οπότε κερδίζει ο μαύρος.



(γ) Τι θα είχε συμβεί αν, ξεκινώντας πάλι από την κατάσταση K1, ο Max (μαύρος) χρησιμοποιούσε αναρρίχηση λόφου (εξετάζοντας μόνο τα παιδιά της τρέχουσας κατάστασης) αντί για MiniMax, ενώ ο Min (άσπρος) συνέχιζε να χρησιμοποιεί MiniMax με βάθος 2. Θεωρήστε ότι και σε αυτή την περίπτωση και οι δύο παίκτες συνεχίζουν να χρησιμοποιούν την ίδια ευρετική $h(n)$, όπως και προηγουμένως. Θεωρήστε, επίσης, ότι όταν ένας παίκτης δεν έχει διαθέσιμη κίνηση, χάνει τη σειρά του και παίζει πάλι ο αντίπαλος. Θεωρήστε, τέλος, ότι στις τελικές καταστάσεις η $h(n)$ επιστρέφει 1000 ή -1000 , αν κερδίζει ο Max ή ο Min αντίστοιχα, ενώ επιστρέφει 0 αν η τελική κατάσταση είναι ισοπαλία.

Στην περίπτωση αυτή, ο Max εξετάζει μόνο τα δύο παιδιά της K1 που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα. Για το αριστερό παιδί έχουμε:

$$f_1(n) = 8 - 6 = 2$$

$$f_2(n) = 2 - 2 = 0$$

$$f_3(n) = 3 - 3 = 0$$

$$h(n) = 2$$

Για το δεξιό παιδί έχουμε:

$$f_1(n) = 9 - 5 = 4$$

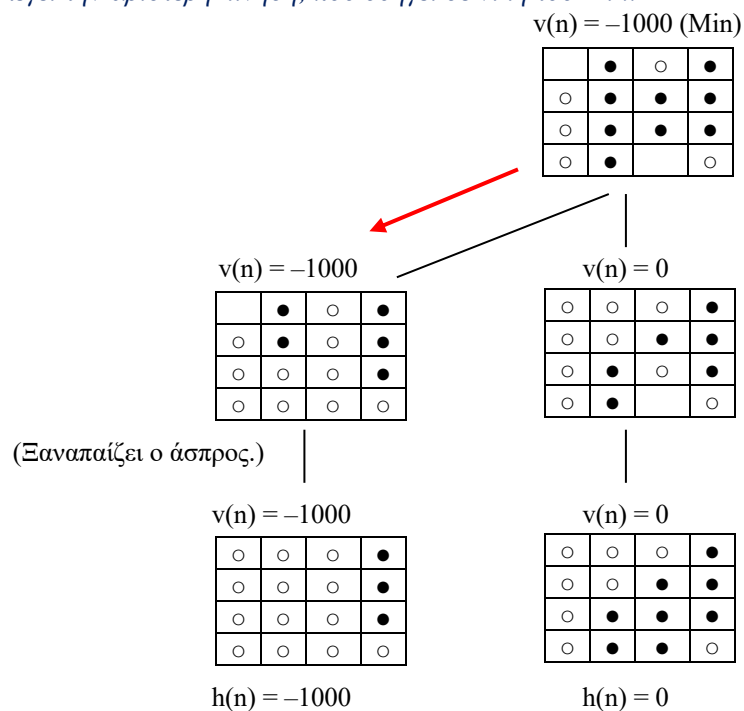
$$f_2(n) = 1 - 2 = -1$$

$$f_3(n) = 4 - 3 = 1$$

$$h(n) = 4 - 3 + 2 = 3$$

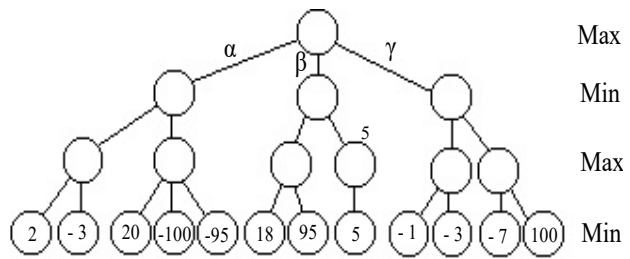
Επομένως σε αυτή την περίπτωση ο Max επιλέγει το δεξί παιδί της K1.¹

Κατόπιν ο Min (άσπρος), που χρησιμοποιεί MiniMax με βάθος 2, κατασκευάζει το παρακάτω δέντρο και επομένως επιλέγει την αριστερή κίνηση, που οδηγεί σε νίκη του Min.

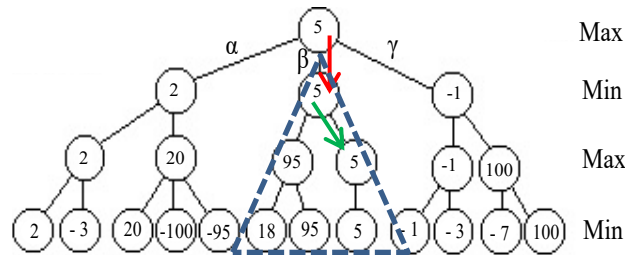


¹ Ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου αναρρίχησης λόφου των διαφανειών εξετάζει και την τιμή της ευρετικής στη τρέχουσα κατάσταση και σταματά αν κανένα παιδί δεν είναι καλύτερο, κατά την ευρετική, από την τρέχουσα κατάσταση. Στην περίπτωσή μας, όμως, ο έλεγχος αυτός δεν έχει νόημα, αφού ο κάθε παίκτης είναι υποχρεωμένος να κάνει μια κίνηση (αν μπορεί). Η τιμή της ευρετικής στην K1, πάντως, είναι -4 . Επομένως, ακόμη κι αν γινόταν ο έλεγχος, δεν θα άλλαζε τίποτα στην εξέλιξη του παιχνιδιού.

6.3. (α) Σε ένα παιχνίδι δύο αντιπάλων μηδενικού αθροίσματος είναι η σειρά του Max. Ο Max χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο MiniMax και κατασκευάζει το δέντρο στα δεξιά. Τα φύλλα του δέντρου είναι όλα τελικές καταστάσεις και οι αριθμοί στα φύλλα είναι οι τιμές της συνάρτησης οφέλους. Συμπληρώστε πάνω στο σχήμα τις τιμές MiniMax των υπόλοιπων κόμβων. Δείξτε επίσης πάνω στο σχήμα την κίνηση (α, β ή γ) που θα επιλέξει ο Max.



Απάντηση:



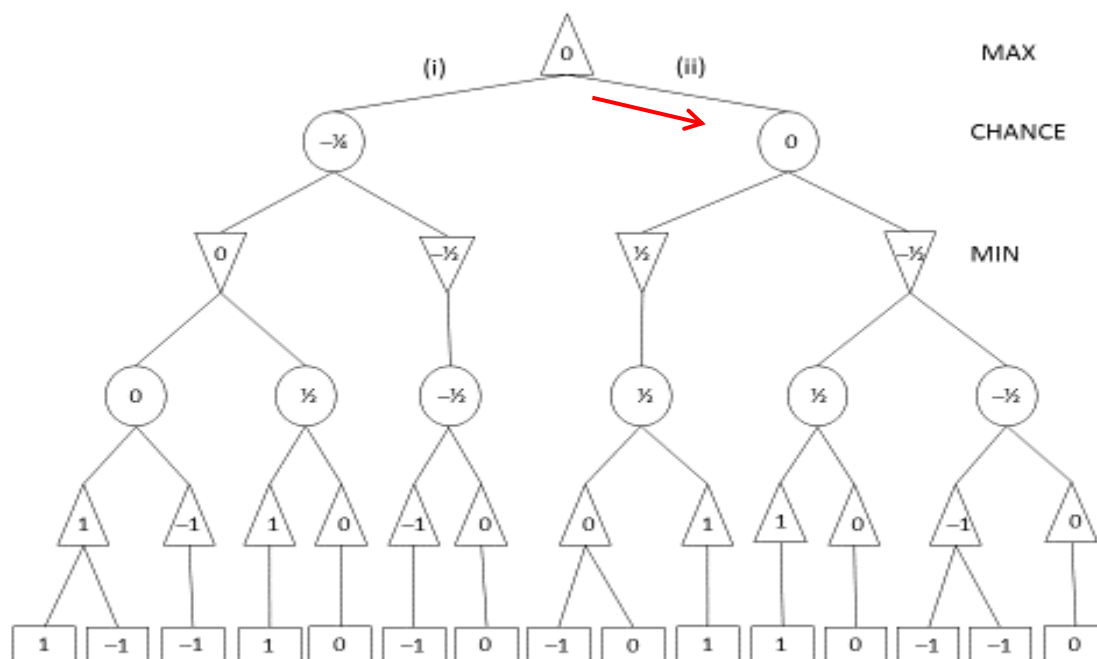
(β) Ο Max προβλέπει ότι θα κερδίσει (θετικό όφελος) ή ότι θα χάσει το παιχνίδι; Είναι σίγουρο ότι θα επιβεβαιωθεί η πρόβλεψή του, αν ο Min χρησιμοποιεί και αυτός τον MiniMax και έχει τη δυνατότητα να κατασκευάσει και αυτός δέντρο ως τις τελικές καταστάσεις; Εξηγήστε γιατί.

Απάντηση: Ο Max προβλέπει ότι θα κερδίσει με όφελος 5. Είναι σίγουρο ότι θα επιβεβαιωθεί η πρόβλεψή του, γιατί θα παίξει την κίνηση (β) και κατόπιν, αφού και ο Min έχει τη δυνατότητα να κατασκευάσει το δέντρο ως τις τελικές καταστάσεις, ο Min θα κατασκευάσει το υπο-δέντρο του σχήματος που είναι σημειωμένο με διακεκομμένη γραμμή. Επομένως ο Min θα επιλέξει την κίνηση που σημειώνεται με πράσινο βέλος και τότε ο Max θα επιλέξει τη μοναδική διαθέσιμη κίνηση, που οδηγεί σε τελική κατάσταση με όφελος 5.

(γ) Τι θα συμβεί αν ο Min επιλέγει τις κινήσεις του στην τύχη; Θα επιβεβαιωθεί και πάλι η πρόβλεψη του Max ή όχι και γιατί;

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι αν ο ένας παίκτης χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο MiniMax και ο άλλος όχι, τότε το παιχνίδι τελειώνει με όφελος ίσο ή καλύτερο από εκείνο που προβλέπει ο MiniMax για τον παίκτη που χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο. Αυτό φαίνεται και στη συγκεκριμένη περίπτωση του σκέλους (α). Ακολουθώντας τον MiniMax, ο Max θα επιλέξει την κίνηση (β). Αν ο Min κατόπιν επιλέξει την κίνηση που σημειώνεται με το πράσινο βέλος, τότε το παιχνίδι θα τελειώσει με όφελος 5, όπως είχε προβλέψει ο Max. Αν ο Min επιλέξει την άλλη κίνηση, το παιχνίδι θα τελειώσει με όφελος 95, δηλαδή καλύτερο για τον Max από το όφελος 5 που είχε προβλέψει.

(δ) Θεωρήστε ένα παιχνίδι δύο αντιπάλων μηδενικού αθροίσματος στο οποίο κάθε παίκτης ρίχνει ένα κέρμα κάθε φορά που είναι η σειρά του να παίξει. Το αποτέλεσμα της ρίψης του κέρματος (κορώνα ή γράμματα, ισοπίθανα) επηρεάζει τις διαθέσιμες κινήσεις του παίκτη που παίζει. Είναι η σειρά του παίκτη Max, ο Max έχει ήδη ρίξει το κέρμα και έχει δύο διαθέσιμες κινήσεις, τις (i) και (ii). Προκειμένου να αποφασίσει ποια κίνηση τον συμφέρει, ο Max κατασκευάζει το παρακάτω δέντρο. Τα φύλλα του δέντρου είναι τελικές καταστάσεις. Οι αριθμοί στα φύλλα είναι οι τιμές της συνάρτησης οφέλους (1 σημαίνει ότι κερδίζει ο Max, -1 ότι κερδίζει ο Min, 0 ότι πρόκειται για ισοπαλία). Συμπληρώστε τις αναμενόμενες τιμές MiniMax στους υπόλοιπους κόμβους. Δείξτε επίσης ποια κίνηση θα επιλέξει ο Max.



Απάντηση: Το συμπληρωμένο δέντρο φαίνεται παραπάνω. Ο Max επιλέγει την κίνηση (ii), που σημειώνεται με κόκκινο βέλος.

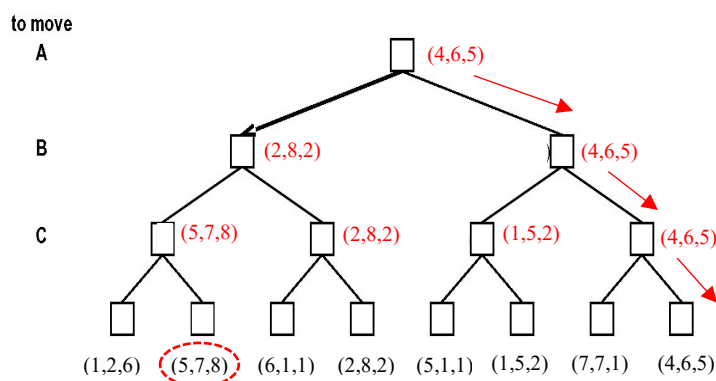
(ε) Τι όφελος αναμένει ο Max κατά τη λήξη του παιχνιδιού; Είναι δυνατόν να κερδίσει; Να χάσει; Είναι δυνατόν το παιχνίδι να λήξει ισόπαλο; Εξηγήστε γιατί.

Απάντηση: Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, το αναμενόμενο όφελος του Max είναι 0 (ισοπαλία). Αυτή, όμως, είναι μια αναμενόμενη τιμή, με την πιθανοτική έννοια του «αναμενόμενου». Επειδή εμπλέκονται κόμβοι τύχης, ο Max δεν μπορεί να είναι σίγουρος ότι το παιχνίδι θα τελειώσει με αυτήν (ή καλύτερη για εκείνον) τιμή οφέλους, παρ' όλο που ο Max έχει κατασκευάσει το πλήρες δέντρο ως όλες τις τελικές καταστάσεις. Αυτό φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα. Ο Max θα παίξει την κίνηση (ii). Κατόπιν ο παίκτης τύχη θα παίξει (με ίση πιθανότητα) είτε την κίνηση (iii) είτε την κίνηση (iv). Αν παίξει την κίνηση (iii), τότε ο Min θα αναγκαστεί να παίξει την μοναδική διαθέσιμη κίνηση (v) και κατόπιν ο παίκτης τύχη θα παίξει (με ίση πιθανότητα) είτε την κίνηση (vi) είτε την κίνηση (vii), οπότε το παιχνίδι θα τελειώσει είτε με όφελος 0 (ισοπαλία) είτε με όφελος 1 (νίκη του Max).

Αν ο παίκτης τύχη παίξει την κίνηση (iv) αντί της (iii), τότε ο Min θα επιλέξει την κίνηση (viii) και κατόπιν ο παίκτης τύχη θα παίξει (με ίση πιθανότητα) είτε την κίνηση (ix) είτε την κίνηση (x), οπότε το παιχνίδι θα τελειώσει είτε με όφελος -1 (ήττα του Max) είτε με όφελος 0 (ισοπαλία).

Επομένως, το παιχνίδι είναι δυνατόν να λήξει είτε με νίκη του Max είτε με ήττα του Max είτε ισόπαλο.

6.4. Σε ένα παιχνίδι τριών αντιπάλων (A, B, C), είναι η σειρά του A να παίξει. Ο A κατασκεύασε το δέντρο δυνατών κινήσεων στα δεξιά, για να επιλέξει την κίνησή του. Τα φύλλα είναι τελικές καταστάσεις. Η τριάδα σε κάθε φύλλο περιέχει κατά σειρά τα πραγματικά οφέλη των A, B και C, τα οποία είναι γνωστά και στους τρεις παίκτες.



(α) Σημειώστε στο διάγραμμα τις τιμές MiniMax των υπολοίπων κόμβων.

(β) Σημειώστε στο διάγραμμα τις κινήσεις που θα κάνουν κατά σειρά οι A, B και C, θεωρώντας ότι και οι τρεις χρησιμοποιούν MiniMax.

Οι απαντήσεις για τα σκέλη (α) και (β) είναι σημειωμένες με κόκκινο στο δέντρο.

(γ) Χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα το παραπάνω δέντρο, δείξτε ότι σε ένα παιχνίδι μη μηδενικού αθροίσματος πολλών αντιπάλων ενδέχεται να υπάρχει τελική κατάσταση K^* που να συμφέρει όλους τους παίκτες περισσότερο από την τελική κατάσταση στην οποία οδηγούμαστε αν όλοι οι παίκτες χρησιμοποιήσουν τον αλγόριθμο MiniMax. Ποια είναι η K^* στο παραπάνω δέντρο;

Απάντηση: Στο δέντρο του παραδείγματος, θα συνέφερε και τους τρεις παίκτες περισσότερο το παιχνίδι να καταλήξει στο δεύτερο φύλλο από αριστερά, που είναι η ζητούμενη κατάσταση K^* , όπου τα οφέλη είναι (5, 7, 8). Όμως, όταν οι τρεις παίκτες χρησιμοποιούν MiniMax, καταλήγουμε στο πιο δεξί φύλλο, με οφέλη (4, 6, 5), δηλαδή σε οφέλη που είναι χειρότερα και για τους τρεις σε σχέση με τα οφέλη της K^* .

(δ) Εξηγήστε γιατί μπορεί παρ' όλα αυτά οι παίκτες να προτιμούν να χρησιμοποιήσουν τον MiniMax, αντί να συμφωνήσουν μεταξύ τους να παίξουν τις κινήσεις που οδηγούν στην K^* .

Απάντηση: Μπορεί να μην εμπιστεύονται ο ένας τον άλλον. Για παράδειγμα, αν συμφωνήσουν να κάνουν και οι τρεις τις κινήσεις που οδηγούν στην K^* , ο A μπορεί να φοβηθεί ότι αν τηρήσει τη συμφωνία και επιλέξει το αριστερό παιδί της ρίζας, ο B θα αθετήσει τη συμφωνία και θα παίξει δεξιά, οπότε το παιχνίδι θα τελειώσει (αν και ο C κοιτάζει το συμφέρον του) με οφέλη (2, 8, 2) και το όφελος για τον A θα είναι 2, αντί για 5 που προέβλεπε η συμφωνία. Ενώ αν ο A σπάσει τη συμφωνία και επιλέξει το δεξί παιδί της ρίζας, προσδοκά ότι (αν και οι άλλοι παίζουν εγωιστικά) το παιχνίδι θα τελειώσει με οφέλη (4, 6, 5), δηλαδή με όφελος 4 για τον A.