

ΑΣΚΗΣΗ 3

Διδάσκων: Παρ. Βασσάλος

Αξία άσκησης: 10 Μόρια

Θεωρείστε τον πίνακα Toeplitz που παράγεται από την σχέση

$$t_{i,j} = t_{i-j} = t_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(kx) dx, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

1. Για την επίλυση του γραμμικού συστήματος $T_n x = b$, υλοποιήστε την μέθοδο της απότομης καθόδου (ΜΑΚ), την μέθοδο των συζυγών κλίσεων (ΜΣΚ) και την προρρυθμισμένη μέθοδο των συζυγών κλίσεων (ΠΜΣΚ) σε C, Fortran ή Python.
2. Για $n = 2^l$, $l = 6, 7, \dots, 10$ να επιλύσετε τα αντίστοιχα συστήματα με τις δύο πρώτες μεθόδους. Να γίνει παρουσίαση των αποτελεσμάτων αναφέροντας τις επαναλήψεις που χρειάστηκαν οι μέθοδοι, και τον αντίστοιχο cpu χρόνο ή flops. Από την αύξηση των αριθμών των επαναλήψεων μπορείτε να εκτιμήσετε πως αυξάνεται (ασυμπτωτικά) ο δείκτης κατάστασης στην 2-νόρμα του πίνακα T_n .
3. Χρησιμοποιήστε ως προρρυθμιστή τον πίνακα

$$P_n = \text{tridiag}[-1 \ 2 \ -1]_n$$

και υλοποιώντας κατά το δυνατό αποτελεσματικότερα, από πλευράς χώρου και χρόνου, την επίλυση του τυχαίου συστήματος της μορφής $P_n y = d$ να επιλύσετε με την προρρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων το αρχικό σύστημα για $n = 2^l$, $l = 6, 7, \dots, 10$. Να συγκρίνετε τα στοιχεία που προέκυψαν (επαναλήψεις, cpu time ή flops) με αυτά από την υλοποίηση της ΜΣΚ. Ποια υπερτερεί;

4. Αφού βρεθούν για $n = 2^l$, $l = 6, 7, \dots, 10$, με κατάλληλη συνάρτηση της γλώσσας που χρησιμοποιήσατε, οι ιδιοτιμές του T_n και του $P_n^{-1} T_n$ να τις απεικονίσετε στον πραγματικό άξονα. Πως συμπεριφέρονται καθώς το n αυξάνει; Πως δικαιολογούνται οι επαναλήψεις με την συμπεριφορά των ιδιοτιμών;
5. Υλοποιήστε τον αλγόριθμο Cholesky. Εφαρμόστε τον για την επίλυση του συστήματος $T_n x = b$ για $n = 2^{10}$. Συγκρίνετε cpu time ή flops αυτής και της ΠΜΣΚ όπως αυτή υλοποιήθηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Ποια είναι ταχύτερη και κατά πόσο τοις εκατό;

Σημείωση:

- Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος να γίνει με κατάλληλη συνάρτηση της γλώσσας που χρησιμοποιήσατε.
- Όλα τα συστήματα να επιλυθούν θεωρώντας ως x_0 το μηδενικό διάνυσμα, ως b το διάνυσμα με όλες τις συνιστώσες του μονάδα και ως κριτήριο τερματισμού, την εκπλήρωση της σχέσης $\frac{\|r_m\|_2}{\|r_0\|_2} < 10^{-7}$ ή το ότι οι επαναλήψεις m που χρειάστηκαν γι' αυτό ξεπέρασαν τις 1000.
- Η υλοποίηση του πολ/σμού του πίνακα T_n με οποιοδήποτε διάνυσμα θα πρέπει να υλοποιηθεί με χρήση του Ταχύ Μετασχηματισμού Fourier (FFT) και αφού πρώτα ο (Toeplitz) πίνακας γίνει κυκλοειδής (circulant) διπλάσιας διάστασης.
- Λαμβάνοντας υπόψη τη συγκεκριμένη μορφή (Toeplitz, circulant) να καταβληθεί προσπάθεια ο κώδικας σας να είναι το δυνατό οικονομικότερος από πλευράς πράξεων και χώρου μνήμης. Να υπολογίσετε και να αναφέρετε το ολικό κόστος μνήμης της μεθόδου καθώς και το κόστος πράξεων ανά επανάληψη, για κάθε μία από τις μεθόδους που υλοποιήσατε.