ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΑΣ

- Το υπόδειγμα είναι γνωστό ως SIR.
- Έστω οι συμβολισμοί - μεταβλητές
- $N(t)$: πληθυσμός στον χρόνο t

SIR
- $S(t)$: **SUSCEPTIBLES** - ευπαθή άτομα στον πληθυσμό στον χρόνο t
- $I(t)$: **INFECTED** - μολυσματικά άτομα
- $R(t)$: **REMOVED** - άτομα που δεν "συμμετέχουν" λόγω ανοσίας ή άλλους λόγους

- **ΠΑΡΑΔΟΧΗ 0** $N(t)=N$ δηλαδή ο πληθυσμός δεν αλλάζει, εύλογο αν κάνουμε μόνο βραχυπρόθεσμη ανάλυση

- $S(t)+I(t)+R(t)=N(t)=N$

- **ΠΑΡΑΔΟΧΗ 1.** Οι πληθυσμοί είναι ομογενείς

- **ΠΑΡΑΔΟΧΗ 2.** Κάθε άτομο στο $I(t)$ επικοινωνεί με $\lambda(t)\Delta t$ άλλα άτομα σε διάστημα Δt υπό συνθήκες που επιτρέπουν την μετάδοση. Από αυτά μόνο το ποσοστό $S(t)/N$ είναι ευπαθή (ομοιογένεια).

- Τα νέα κρούσματα σε ένα διάστημα Δt είναι

$$\lambda(t)\cdot\frac{S(t)}{N}\cdot I(t)\cdot\Delta t$$

• ΤΑ ΚΡΟΥΣΜΑΤΑ ΜΕΙΩΝΟΥΝ ΤΟΥΣ ΕΥΠΑΘΕΙΣ ΚΑΙ ΑΥΞΑΝΟΥΝ ΤΟΥΣ ΑΣΘΕΝΟΥΝΤΕΣ

ΠΑΡΑΔΟΧΗ 3 ΑΝ Η ΜΕΣΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΝΟΣΗΣΗΣ ΕΙΝΑΙ Π, ΤΟΤΕ ΣΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ Δt ΘΑ ΕΧΕΙ "ΒΓΕΙ" ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ I ΑΡΙΘΜΟΣ $\dfrac{I(t)\,\Delta t}{\Pi}$ ΑΤΟΜΩΝ. *

• Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΤΟΥΣ ΕΥΠΑΘΕΙΣ ΕΙΝΑΙ

$$S(t+\Delta t) = S(t) - \lambda(t)\,\frac{S(t)}{N}\,I(t)\,\Delta t$$

ΕΝΩ ΣΤΟΥΣ ΑΣΘΕΝΕΙΣ

$$I(t+\Delta t) = I(t) + \lambda(t)\,\frac{S(t)}{N}\,I(t)\Delta t - \frac{I(t)\,\Delta t}{\Pi}$$

• ΔΙΑΙΡΩΝΤΑΣ ΔΙΑ N ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΖΟΝΤΑΣ ΜΕ ΠΕΖΑ ΤΙΣ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ $s(t) = S(t)/N$, $i(t) = I(t)/N$ ΟΙ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΙΝΟΝΤΑΙ

$$\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = -\lambda(t)\,s(t)\,i(t) \qquad (1)$$

$$\frac{i(t+\Delta t) - i(t)}{\Delta t} = \lambda(t)\,s(t)\,i(t) - \rho\, i(t) \qquad (1')$$

$\rho = 1/\Pi$

• ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΤΙΣ (1), (1') ΑΡΧΙΖΟΝΤΑΣ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΑ $s(t_0)$, $i(t_0)$ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΑ s, i ΣΤΙΣ ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ $t_0,\ t_0+\Delta t,\ t_0+2\Delta t, \ldots, t_0+n\Delta t, \ldots$

---

* ΙΣΧΥΕΙ ΑΝ Η ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΝΟΣΗΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ...

• ΠΙΟ ΑΚΡΙΒΕΣ ΕΙΝΑΙ ΝΑ ΕΞΕΤΑΣΟΥΜΕ ΤΙΣ (1), (1') ΜΕ $\Delta t \to 0$. ΤΟΤΕ ΟΙ $s(t)$, $i(t)$ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΝ ΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ (ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ)

$$\frac{ds}{dt}(t) = -\lambda(t)\, s(t)\, i(t) \qquad (2)$$

$$\frac{di}{dt}(t) = \lambda(t)\, s(t)\, i(t) - \rho\, i(t) \qquad (2')$$

• "ΕΠΙΛΥΣΗ" ΤΩΝ (2), (2') ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ s, i ΠΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΓΙΑ ΚΑΘΕ t ΚΑΙ ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΝ ΤΙΣ (2) (2')

• ΣΥΝΗΘΩΣ ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ (2), (2'). ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΑΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΙΣ (1), (1'), ΟΜΩΣ ΓΙΑ ΠΟΛΥ ΜΙΚΡΟ Δt, ΚΑΤΙ ΠΟΥ ΒΕΒΑΙΑ ΑΠΑΙΤΕΙ ΠΟΛΛΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ. ΘΑ ΔΟΥΜΕ ΤΗΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΥΤΗ ΜΕ ΦΥΛΛΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΑΡΓΟΤΕΡΑ

• ΑΥΤΟΝΟΜΗ ΕΞΑΛΕΙΨΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΗΜΙΑΣ.
ΕΣΤΩ ΟΤΙ Η ΕΝΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ $\lambda(t)$ ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΡΗ, $\lambda(t) = \lambda_0$ ΓΙΑ ΚΑΘΕ t.

• ΑΠΟ ΤΗΝ (2') ΕΧΟΥΜΕ

$$\frac{di}{dt}(t) = i(t)\left(\lambda_0\, s(t) - \rho\right) \qquad (3)$$

ΕΝΩ Η $s(t)$ ΕΙΝΑΙ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΩΣ ΠΡΟΣ t
(ΓΙΑΤΙ;)

ΑΝ ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΟ t^* ΕΙΝΑΙ

$$s(t^*) < R/\lambda_0$$

ΤΟΤΕ ΓΙΑ ΚΑΘΕ $t > t^*$ Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ $\frac{di}{dt}$ ΕΙΝΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΑΡΑ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΑΣΘΕΝΟΥΝΤΩΝ ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ ΚΑΙ Η ΕΠΙΔΗΜΙΑ ΕΞΑΣΘΕΝΕΙ ΠΡΟΟΔΕΥΤΙΚΑ!

• ΑΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΕΥΠΑΘΕΙΣ "ΑΦΑΙΡΕΘΕΙ" Π.Χ. ΜΕ ΕΜΒΟΛΙΑΣΜΟ ΜΕΡΟΣ v, ΓΙΑ ΝΑ ΕΞΑΛΕΙΦΘΕΙ ΕΦΕΞΗΣ Η ΕΠΙΔΗΜΙΑ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ $s(0) - v < R/\lambda_0$ Ή

$$v > s(t) - R/\lambda_0 \qquad (4)$$

• ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ ΕΙΝΑΙ ΔΥΣΚΟΛΟ ΝΑ ΜΕΤΡΗΘΕΙ ΤΟ $s(t)$. ΟΜΩΣ ΕΦΟΣΟΝ ΙΣΧΥΕΙ ΕΞ' ΟΡΙΣΜΟΥ

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

ΟΠΟΥ $r(t) = R(t)/N$ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΟΣΟΣΤΟ ΑΥΤΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ "ΑΦΑΙΡΕΘΕΙ" ΑΠΟ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΛΟΓΩ Π.Χ. ΑΝΟΣΙΑΣ, ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΟ s ΩΣ $1 - i(t) - r(t)$. ΕΑΝ ΤΟ ΠΟΣΟΣΤΟ ΤΩΝ ΑΣΘΕΝΟΥΝΤΩΝ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟ ΚΑΙ ΑΜΕΛΗΤΕΟ ΘΑ ΕΙΝΑΙ $s = 1 - r$ ΚΑΙ Η (4) ΓΙΝΕΤΑΙ

$$v > 1 - r - R/\lambda_0$$

(ΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΟΙ ΝΟΣΗΣΑΝΤΕΣ)

• ΑΝ Π.Χ. $r = 10\%$, $R/\lambda_0 = 30\%$ ΠΡΕΠΕΙ ΓΙΑ ΕΞΑΛΕΙΨΗ ΝΑ ΕΧΟΥΜΕ ΕΜΒΟΛΙΑΣΜΟ ΑΝΩ ΤΟΥ 60%. ΑΝ ΟΜΩΣ ΤΟ λ_0 ΑΥΞΗΘΕΙ Π.Χ. ΣΤΟ ΔΙΠΛΑΣΙΟ ΘΑ ΕΙΝΑΙ $R/\lambda_0 = 15\%$

ΚΑΙ ΤΟΤΕ ΑΠΑΙΤΕΙΤΑΙ ΕΜΒΟΛΙΑΣΜΟΣ $v > 75\%$.

• Η ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ $\rho/\lambda = 1/\lambda\Pi$ ΕΡΜΗΝΕΥΕΤΑΙ ΩΣ ΕΞΗΣ: ΕΦΟΣΟΝ Π ΕΙΝΑΙ Η ΜΕΣΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΑΣΘΕΝΕΙΑΣ ΚΑΙ λ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΕΩΝ ΑΝΑ ΜΟΝΑΔΑ ΧΡΟΝΟΥ, ΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ $\lambda\Pi$ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΜΕΤΑΔΟΣΕΙΣ ΑΝΑ ΝΟΣΟΥΝΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΤΑΙ ΜΕ $R_0 = \lambda\Pi$.

Η ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΕΞΑΛΕΙΨΗ $s < \rho/\lambda$ ΓΡΑΦΕΤΑΙ $s \leq 1/R_0$, ΑΡΑ ΜΕΓΑΛΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ R_0 ΑΠΑΙΤΕΙ ΜΕΓΑΛΗ ΜΕΙΩΣΗ ΣΤΟ s ΓΙΑ ΝΑ ΕΞΑΛΕΙΦΘΕΙ Η ΕΠΙΔΗΜΙΑ. ΑΝ $R_0 < 1$ Η ΣΥΝΘΗΚΗ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΠΑΝΤΑ.

ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ ΜΙΑΣ ΕΠΙΔΗΜΙΑΣ ΕΙΝΑΙ $s \approx 1$ ΟΠΟΤΕ Η (2') ΓΙΝΕΤΑΙ

$$\frac{di}{dt} = i(t)\,(\lambda - \rho) = i(t)\cdot\frac{R_0 - 1}{\Pi}$$

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΧΕΙ ΛΥΣΗ $i(t) = i(0)\,e^{\frac{R_0-1}{\Pi}t}$ ΚΑΙ ΕΤΣΙ ΕΧΟΥΜΕ ΑΡΧΙΚΑ <u>ΕΚΘΕΤΙΚΗ</u> ΑΥΞΗΣΗ ΤΩΝ ΑΣΘΕΝΩΝ ΑΛΛΑ ΚΑΙ ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΚΡΟΥΣΜΑΤΩΝ.

• ΠΑΡΑΤΗΡΩΝΤΑΣ ΤΟΝ ΡΥΘΜΟ ΑΥΞΗΣΗΣ ΤΩΝ ΚΡΟΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΔΙΑΡΚΕΙΑ Π ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΕΚΤΙΜΗΣΟΥΜΕ ΤΟ R_0 (ΣΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ Ή ΑΡΓΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ λ)

—||—