Γεωμετρική Κίνηση Brown

Πολλά φαινόμενα που μετρούνται σε χρονικές στιγμές t σε διαστήματα Δt παρουσιάζουν μία στατιστική μεταβλητότητα. Η "μεταβλητότητα" αυτή είναι ανεξάρτητη των προηγουμένων, δηλαδή οι μεταβλητότητες σε μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα παριστάνονται από τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες μεταξύ των. Επίσης η μεταβλητότητα είναι ίδια για ισομήκη χρονικά διαστήματα. Τα παραπάνω εξειδικεύονται ως εξής: Έστω $\tilde{\varepsilon}(\Delta t)$ μία τυχαία μεταβλητή που παριστά την αβεβαιότητα σε ένα χρονικό διάστημα Δt. Αν θεωρήσουμε δύο ισομήκη συνεχόμενα και επικαλυπτόμενα διαστήματα Δt_1 και Δt_2, οι τυχαίες μεταβλητές $\tilde{\varepsilon}(\Delta t_1)$ και $\tilde{\varepsilon}(\Delta t_2)$ είναι αφενός ανεξάρτητες μεταξύ των και έχουν ίδια διακύμανση, αν θεωρήσουμε βέβαια ότι η διακύμανση μετρά την μεταβλητότητα. Αν θεωρήσουμε ότι η μεταβλητότητα επενεργεί αθροιστικά, η διακύμανση για όλο το διάστημα $\Delta t_1 + \Delta t_2$ είναι $\tilde{\varepsilon}(\Delta t_1) + \tilde{\varepsilon}(\Delta t_2)$, θα έχει διακύμανση $2\sigma^2(\Delta t)$ όπου $\sigma^2(\Delta t)$ είναι η διακύμανση του $\tilde{\varepsilon}(\Delta t_1)$, και ο παράγων 2 οφείλεται στην παραδοχή της ανεξαρτησίας. Αν τώρα γράψουμε την μεταβλητότητα για όλο το διάστημα ως $\tilde{\varepsilon}(\Delta t_1 + \Delta t_2) = \tilde{\varepsilon}(2\Delta t)$ με $\Delta t = \Delta t_1 = \Delta t_2$

έχει διακύμανση $2\sigma^2(\Delta t)$. Επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα συνάγουμε ότι η διακύμανση του $\tilde{\varepsilon}(\Delta t)$ ισούται με $s^2\Delta t$ όπου s^2 η διακύμανση της μεταβλητότητας σε ένα μοναδιαίο διάστημα, για $\Delta t = 1$.

Πολλές φορές η μεταβλητότητα θεωρείται ως μια κανονική τυχαία μεταβλητή με μηδενική αναμενόμενη τιμή και διακύμανση $s\Delta t$. Αν $\tilde{\eta}$ είναι μια κανονική τ.μ. με μηδενικό μέσο και μοναδιαία διακύμανση, θεωρούμε την μεταβλητότητα $\tilde{\varepsilon}(\Delta t)$ ως $\tilde{\eta}$ επί μια σταθερά έστω a, $\tilde{\varepsilon}(\Delta t) = a\tilde{\eta}$.
Η διακύμανση της $\tilde{\varepsilon}(\Delta t)$ θα πρέπει να είναι $s^2\Delta t$ και επειδή $Var(a\tilde{\eta}) = a^2$ θα πρέπει $a^2 = s^2\Delta t \Rightarrow a = s\,\Delta t^{1/2}$. Τελικά είναι $\tilde{\varepsilon}(\Delta t) = s\tilde{\eta}\,\Delta t^{1/2}$

Η μεταβολή της αξίας χρηματοοικονομικών τίτλων X_t ικανοποιεί με κάποια στατιστική αξιοπιστία την σχέση

$$\frac{\tilde{X}_{t+\Delta t} - X_t}{X_t} = r\Delta t + s\tilde{\eta}\,\Delta t^{1/2} \qquad (1)$$

Η σχέση αυτή υποδηλώνει ότι η μεταβολή της αξίας $(\tilde{X}_{t+\Delta t} - X_t)$ σε σχέση με την τρέχουσα αξία X_t έχει "απόδοση" r ανά μονάδα χρόνου αλλά υπάρχει και μια μεταβλητότητα της μορφής που αναγράψαμε προηγουμένως.

Η (1) μπορεί να γραφεί ως "αναδρομική" σχέση πολλαπλασιάζοντας επί X_t όπου έχουμε

$$\tilde{X}_{t+\Delta t} = (1+r\Delta t)X_t + \sigma\tilde{\eta}X_t\Delta t^{1/2}$$

$$= (1+r\Delta t + \sigma\tilde{\eta}\Delta t^{1/2})X_t$$

Παρατηρούμε ότι για Δt μικρό, ισχύει $\Delta t^{1/2} \gg \Delta t$ και άρα για εύλογες τιμές του $\tilde{\eta}$ ο όρος $r\Delta t$ είναι αμελητέος ως προς τον $\sigma\tilde{\eta}\Delta t^{1/2}$.

Οι τυχαίες μεταβλητές $\tilde{X}_t$ που δημιουργούνται με τον τρόπο αυτό για $t = k\Delta t$ αποτελούν τυχαίο περίπατο. Το όριο των $\tilde{X}_t$ για το διάστημα Δt να τείνει στο μηδέν ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown.

Το φύλλο λογιστικό GeomWienerSim_Oct12.xls δίνει την δυνατότητα μελέτης τυχαίων περιπάτων και σε κάποιο βαθμό, της Κίνησης Brown. Η "κίνηση" δημιουργείται στις στήλες CDEF, και επαναλαμβάνεται με χρήση του F9. Στις στήλες H-I (Πίνακας: Επαναληψεις Προσομοίωσης) δημιουργούνται 200 τυχαίοι περίπατοι στις γραμμές 24–223 με χρήση της δυνατότητας Data Table του Excel. Στις στήλες J-K-L γραμμές 12–15 δίνονται ο μέσος όρος των παρατηρήσεων ~~[illegible]~~ (κελλιά [illegible], K13, και L14) [illegible] της εκτίμησης του μέσου.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για $\Delta t \to 0$ είναι $E(\tilde{X}_T) = X_0 e^{rT}$. Η ερώτηση είναι κατά πόσο η θεωρία αυτή επιβεβαιώνεται από το φύλλο λογιστικού.

Θα περιμέναμε ο μέσος όρος των παρατηρήσεων (κελί L13) να είναι κοντά στο θεωρητικό (κελί D19). Όμως στην πράξη θα παρατηρήσετε ότι αυτό συμβαίνει σπάνια, καθώς πολλές φορές η απόκλιση είναι μεγάλη. Πως εξηγείται αυτή η απόκλιση;

(α) Το Δt που χρησιμοποιούμε είναι πεπερασμένο και δεν μπορούμε να θέσουμε $\Delta t \sim 0$ αν ταυτόχρονα θέλουμε ο τελικός χρόνος T να είναι πεπερασμένος (θα χρειαζόμασταν πάρα πολλές γραμμές και επιπλέον για μικρό Δt οι πράξεις δεν θα είχαν ακρίβεια).

(β) Οι παρατηρήσεις μας είναι τυχαίες μεταβλητές, με διακύμανση που υπολογίσαμε αριθμητικά στο δείγμα (κελί L14), άρα η εκτίμηση του μέσου έχει διακύμανση σ^2/N όπου σ^2 η διακύμανση του δείγματος και N το πλήθος των δειγμάτων (θυμηθείτε $Var(\sum^N X_i/N) = \sigma^2/N$). Το μέγεθος αυτό υπολογίζεται στο L15.

(γ) Για να δούμε κατά πόσο οι μετρήσεις μας επιβεβαιώνουν την θεωρία θα μπορούσαμε να δούμε ~~κατά~~ πόσο "επαρκής" αριθμός των επαναλήψεων της προσομοίωσης είναι στο Μάθημα

[$X_0 e^{\rho T} - 2\sigma$, $X_0 e^{\rho T} + 2\sigma$] και συγκεκριμένα αν ένα ποσοστό περίπου 95% είναι στο διάστημα αυτό! Αυτό προϋποθέτει αν δεχθούμε μια σειρά επαναλήψεις μας ακολουθούν κανονική κατανομή, και οι εκτιμήσεις μας όσον αφορά την διακύμανση είναι ακριβείς, κάτι που ισχύει προσεγγιστικά!

Τι μεταβολές θα κάνατε στο [illegible] λογισμικό ώστε να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε τα παραπάνω;

Πληρέστερη εικόνα της προσομοίωσης δίνεται στα μαθήματα της Στατιστικής και της Προσομοίωσης.