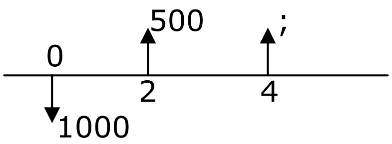
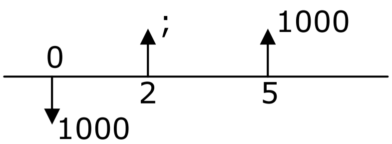
Παραδείγματα:

Παράδειγμα 1: $j_{(1)}$=10%. Τοποθετώ σε στιγμή κεφαλαιοποίησης 1.000 €, μετά από 2 χρόνια κάνω ανάληψη 500 €, κλείνω τον λογαριασμό σε άλλα 2 χρόνια. Ποιο το υπόλοιπο;



$S_4 = 1000 \cdot 1{,}10^4 - 500 \cdot 1{,}10^2 = 859{,}1$ €
Όντως σε 2 χρόνια έχω $S_2 = 1000 \cdot 1{,}10^2 - 500 = 710$ €
Στο 4 έχω $S_4 = 710 \cdot 1{,}10^2 = 710 \cdot 1{,}21 = 859{,}1$ €
Επίσης, με υπολογισμό τύπου «Αμβουργικής Μεθόδου», με τα υπόλοιπα, το σταθερό υπόλοιπο 1000 για δύο χρόνια γίνεται με τους τόκους 1210, οπότε αφαιρώντας την ανάληψη των 500 γίνεται 710. Τον τρίτο χρόνο προστίθενται 71 ευρώ τόκοι και γίνεται 781. Τέλος στο τέλος του 4^{ου} χρόνου προστίθενται 78,1 ευρώ που κάνει το υπόλοιπο 859,1.

Παράδειγμα 2: Σε ένα λογαριασμό $j_{(2)}$=10%. τοποθετώ 1.000 €. Ποια ανάληψη μπορώ να κάνω σε 2 έτη ώστε σε 5 έτη να κλείσω εισπράττοντας πάλι 1.000 €



Πρέπει $1000 \cdot 1{,}05^{10} - X \cdot 1{,}05^6 = 1000$ ή διαιρώντας δια $1{,}05^6$

$$1000 \cdot 1{,}05^4 - X - \frac{1000}{1{,}05^6} = 0 \Rightarrow X = 469{,}3€$$

Το παράδειγμα δείχνει το εξής: Αν σε ένα πρόβλημα <u>κλείνουμε</u> τον λογαριασμό σε χρόνο (κεφαλαιοποίηση) k θα είναι: $-X_K=S_K$ (X_K ύψος ανάληψης).
Και ο τύπος γράφεται αν επιπλέον $S_0=X_0$

$$\sum_{j=0}^{K} X_j (1+p)^{K-j} = 0$$

που είναι ισοδύναμος με τον

$$\sum_{j=0}^{K} X_j (1+p)^{m-j} = 0$$ (όπου m αυθαίρετο)

Ο όρος $(1+\rho)^{m-j}$ φέρνει το ποσό X_j «έντοκα» στο m - δίνει ένα ισοδύναμο στο m.
Η εξίσωση αυτή λέει ότι το άθροισμα των ισοδύναμων πρέπει να μηδενίζεται.

Στο προηγούμενο παράδειγμα διαλέγουμε χρόνο ισοδυναμίας τα 2 έτη.
Το αρχικό ποσό των 1000 € γίνεται $1000 \cdot 1{,}05^4$ (γιατί;),
ενώ το τελικό -1000 γίνεται $\frac{-1000}{1{,}05^6}$ (γιατί;) ενώ το άγνωστο ποσό παραμένει X.

Άρα η σχέση ισοδυναμίας γράφεται $1000 \cdot 1{,}05^4 - X - \frac{1000}{1{,}05^6} = 0$

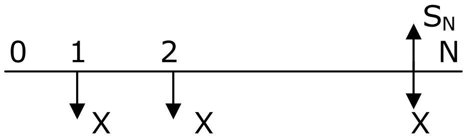
που είναι ίδια όπως προηγουμένως.

<u>Σειρές Πληρωμών – ΣΠ</u>

Αναφερόμαστε σε ποσά $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ που ανακύπτουν σε ισαπέχουσες χρονικές στιγμές. Αν $X_K = X \ \forall \ k$ έχουμε <u>ομοιόμορφη σειρά</u>.

<u>Τελική Αξία ΣΠ – Ομοιόμορφης</u>

Έστω ότι τα $X_K(=X)$ ανακύπτουν σε στιγμές κεφαλαιοποίησης λογαριασμού j(n) k=1,2,…,N. Τι ποσό θα έχει συσσωρευτεί στο N;



Με βάση την ισοδυναμία στο N είναι

$S_N = X(1+p)^{N-1} + X(1+p)^{N-2} + \ldots + X$

$= X\left[(1+p)^{N-1} + (1+p)^{N-2} + \ldots + 1\right]$

Και $p = \frac{j_{(n)}}{n}$

<u>Παρένθεση</u>: Άθροιση Όρων Γεωμετρικής Προόδου:

Έστω $Q_n = \alpha + \alpha\lambda + \ldots + \alpha\lambda^n$

Είναι $\lambda Q_n = \alpha\lambda + \alpha\lambda^2 + \ldots + \alpha\lambda^n + \alpha\lambda^{n+1}$

Άρα $Q_n - \lambda Q_n = \alpha - \alpha\lambda^{n-1}$

ή $Qn = \frac{\alpha\lambda^{n+1} - a}{\lambda - 1}$

Αν $|\lambda| < 1$ $\lim_{n \to \infty} Qn = \frac{a}{1-\lambda}$

για $|\lambda| \geq 1$ το όριο αποκλίνει.

Άρα: $S_N = X \frac{(1+p)^N - 1}{1+p-1} = X \frac{(1+p)^N - 1}{p}$

Ο συντελεστής του X γράφεται $s(N, \rho) = \frac{(1+p)^N - 1}{p}$

<u>Παράδειγμα:</u> Τοποθετούμε σε τέλος εξαμήνου ποσό 100 € σε λογαριασμό με j(2)=5%. Τι ποσό έχουμε μετά από 5 έτη;

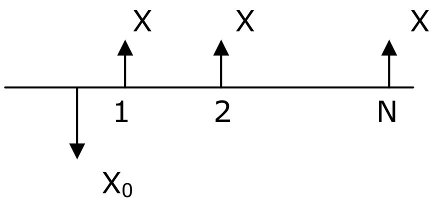
Είναι N=2·5=10 $p = \frac{j_{(n)}}{n} = \frac{5\%}{2} = 2{,}5\%$

Άρα: $S = 100 \cdot s(10,\, 2{,}5\%) = 100 \frac{1{,}025^{10} - 1}{0{,}025} = 1120{,}3€$

Προφανώς: s(N,ρ)≥N με ισότητα για ρ=0
s(N,ρ) αύξουσα συνάρτηση του ρ.

<u>Παρούσα Αξία Ομοιόμορφης Σειράς</u>

Θέλω να κάνω αναλήψεις ποσού X σε κεφαλαιοποιήσεις λογαριασμού με j(n) γνωστό N φορές. Τι ποσό πρέπει να καταθέσω αρχικά;



Με ισοδυναμία πάλι στο N

$X_0(1+\rho)^N - [X(1+\rho)^{N-1} + X(1+\rho)^{N-2} + \ldots + X] = 0$

ή $X_0(1+\rho)^N - Xs(N_1\rho) = 0$

ή $X_0 = X \frac{s(N,\, p)}{(1+p)^N} = X \cdot \frac{1-(1+p)^{-N}}{p}$

ο συντελεστής του X συμβολίζεται με $a(N, p) = \frac{1-(1+p)^{-N}}{p}$

Προφανώς: α(N, p) ≤ N με ισότητα αν ρ=0
α(N, p) φθίνουσα συνάρτηση του ρ

Αν ρ>0 τότε $\lim_{N \to \infty} a(N, p) = a(\infty,\, p) = \frac{1}{p}$

<u>Εφαρμογές</u>

<u>Εφαρμογή Α:</u> Τι ποσό πρέπει να καταθέσω για να εισπράττω από λογαριασμό, 1000€ τον μήνα για 10 χρόνια με $j_{(12)}$=5%;

Είναι N=10·12=120 $p = \frac{j_{(12)}}{12} = \frac{0{,}05}{12} = 0{,}416\%$

Άρα X_0 = 1000 · α(120, 0,416%) = 1000 · 94,316 = 94.316 €

Για ∞ χρόνια το ποσό είναι

$X_0 = 1000\, a(\infty, 0{,}416) = \frac{1000}{0{,}00416} = 240.384{,}6€$

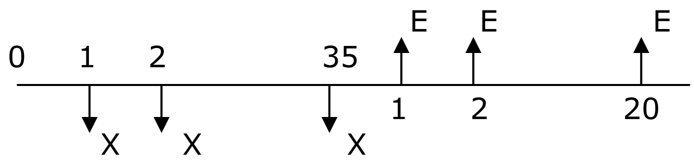
<u>Εφαρμογή Β:</u> Μια ομολογία δίνει τοκομερίδιο 1€ ανά μήνα. Ποια η αξία της αν $j_{(12)}$=6%; Θεωρήστε απεριόριστη τη ζωή της.

Είναι: $\rho = \frac{6\%}{12} = 0{,}005$ και η αξία της είναι P=1€·α(∞, 0,5%)=200 €

<u>Εφαρμογή Γ:</u> Μια ομολογία δίνει 1€ ετησίως. Ποια η αξία της; (απεριόριστη ζωή)

ρ=5% και η αξία είναι 1€·α(∞, 0,05)=20 €.

Εφαρμογή Δ: Εργαζόμενος θέλει να δημιουργήσει ένα κεφάλαιο καταθέτοντας ποσό X ετησίως επί 35 έτη ώστε να μπορεί να εισπράττει ετησίως ποσό Ε επί 20 μετά την 35ετία (σύνταξη). Ποιο το X αν ισχύει $j_{(1)}$=5%;



Θεωρούμε στιγμή ισοδυναμίας το 35. Θα πρέπει η αξία (τελική) των εισφορών στο 35 να ισούται με την αξία των Ε στο 35, δηλαδή

$$X\, s(35{,}5\%) - E\alpha(20{,}5\%) = 0$$

ή $$X = \frac{E\,\alpha(20{,}5\%)}{S(35{,}5\%)} = 0{,}138E$$

Ερμηνεύετε το αποτέλεσμα.
Επαναλάβετε το πρόβλημα αλλά με μηνιαίες καταβολές και τέτοιο $j_{(12)}$ που να δίνει $i_{πρ}(j_{(12)})$=5%.
Απάντηση: Πάλι X≈0,138E