Εφαρμογή στην αξιολόγηση επενδύσεων

<u>Τα απλούστερα κριτήρια NPV – IRR</u>

<u>Επένδυση:</u> είναι μια χρηματοροή σε περιοδικά σημεία του χρόνου t=0,1,2,…,N,… που εμφανίζονται ποσά $-X_0, X_1, \ldots, X_N, \ldots$ που είναι μη αρνητικά $X_j \geq 0$, j=0,1,…N,… κατά σύμβαση το 0-ποσό X_0 θεωρείται ότι καταβάλλεται ενώ τα $X_1, X_2, \ldots$ αποτελούν εισπράξεις.

Πότε είναι συμφέρουσα η επένδυση σε σχέση με εναλλακτική τοποθέτηση σύνθετου τόκου (j(n));

Αν η περίοδος της επένδυσης είναι ίση με την περίοδο κεφαλαιοποίησης $\frac{1}{n}$ τότε έχουμε το εξής σκεπτικό:

Για να εξασφαλίσουμε ποσά X_j (j=1,…N), πρέπει να τοποθετήσουμε στον λογαριασμό κεφάλαιο $\widehat{X}_0 = \sum_{j=1} X_j (1+p)^{-j}$ όπου $p = \frac{j_{(n)}}{n}$

Αν $\widehat{X}_0 > X_0$ τότε η επένδυση επιτυγχάνει τις εισπράξεις $X_1, X_2, \ldots$ με μικρότερο ποσό άρα είναι συμφέρουσα σε σχέση με τον σύνθετο τόκο!
Η συνθήκη γράφεται

$$\widehat{X}_0 > X_0 \Leftrightarrow \sum_{j=1} \frac{X_j}{(1+p)^j} > X_0$$

$$\Leftrightarrow -X_0 + \sum_{j=1} \frac{X_j}{(1+p)^j} > 0$$

Η παράσταση αριστερά ονομάζεται καθαρά παρούσα αξία της επένδυσης (Net Present Value, ΚΡΑ,NPV). Εξαρτάται από τα X_j και το ρ.
Το κριτήριο αποδοχής γράφεται και ως **ΚΠΑ(Χ;ρ)>0**

Παράδειγμα 1: Επένδυση αποδίδει 170 χιλ. € επί 10 έτη και απαιτεί αρχική δαπάνη 1 εκατ. € είναι συμφέρουσα σε σχέση με συνθ. τόκο j(1)=10%;
Είναι ΚΠΑ(Χ;10%) = -1000+170α(10,10%) = 45,5 χιλ €>0
Άρα είναι συμφέρουσα

Παράδειγμα 2: (Μετοχή-Ομολογία) Μια μετοχή κοστίζει P € και θα αποδίδει μέρισμα E € επ' αόριστο. Αν j(1)=r δείξτε ότι $\frac{P}{E} < \frac{1}{r}$ για να συμφέρει η αγορά της μετοχής.

Η ΚΠΑ είναι –P+Eα(∞,r)=-P+E/r που πρέπει να είναι θετική για να ισχύσει η τιμή αυτή. Άρα $-P + \frac{E}{r} > 0$ ή $\frac{P}{E} < \frac{1}{r}$
Έτσι αν τα επιτόκια είναι π.χ. 5% οι τιμές μετοχών που δεν έχουν προοπτικές αλλαγών στα κέρδη των δεν μπορούν να είναι περισσότερο από 20 φορές τα κέρδη ανά μετοχή!

<u>Απόδοση Επένδυσης IRR</u>

Στην πράξη δεν είναι σαφές στην αξιολόγηση μιας επένδυσης ποια είναι η εναλλακτική απόδοση δηλ. το εναλλακτικό ονομαστικό επιτόκιο.
Εύλογο είναι μια υποψήφια επένδυση να συγκριθεί με τις εναλλακτικές επενδύσεις που εξετάζουμε ή έχουμε αναλάβει, και η σύγκριση αυτή δεν είναι σαφής.
Μια χρήσιμη πληροφορία είναι η εξής:
Για ποια εναλλακτικά επιτόκια παραμένει συμφέρουσα η επένδυση; Αν αυτά αποτελούν ευρύ φάσμα, η επένδυση είναι ελκυστική.

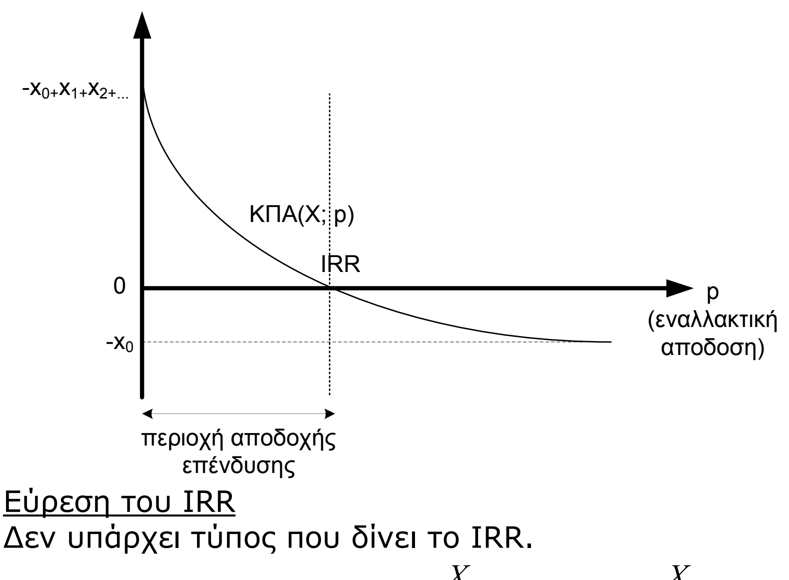
Μια επένδυση συμφέρει για ρ τέτοια ώστε ΚΠΑ(Χ,ρ)>0 (Χ: δεδομένο)
Προφανώς: (αν $X_0, X_1, \ldots, X_{N+1} > 0$ <u>και μόνο</u>)
-ΚΠΑ(Χ,∞)=$-X_0<0$ (άπειρο εναλλακτικό επιτόκιο)
-ΚΠΑ(Χ,ρ) φθίνουσα συνάρτηση του ρ

Αν ισχύει $X_0 < \sum_{K=1}^{\infty} X_K$ (εύλογη παραδοχή)
-Τότε ΚΠΑ(Χ,0)>0

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης ΚΠΑ(Χ,ρ)=0 που ονομάζουμε IRR (Internal Rate of Return).
Δηλαδή ΚΠΑ(Χ,IRR)=0

<u>Επιπλέον:</u>
αν ρ<IRR ΚΠΑ(Χ,ρ)>0
αν ρ>IRR ΚΠΑ(Χ,ρ)<0

Άρα η επένδυση συμφέρει εφόσον οι εναλλακτικές επενδύσεις έχουν απόδοση μικρότερη από IRR.
(Η παραπάνω πρόταση θέλει προσοχή. Ισχύει ΜΟΝΟ όταν εξετάζουμε την υιοθέτηση ή απόρριψη μιας μεμονωμένης επένδυσης)



<u>Εύρεση του IRR</u>
Δεν υπάρχει τύπος που δίνει το IRR.
Γενικά: η εξίσωση $-X_0 + \frac{X_1}{(1+IRR)^1} + \ldots + \frac{X_K}{(1+IRR)^K} = 0$ γράφεται ως πολυωνυμική εξίσωση αν θέσουμε

$Z = \frac{1}{(1+IRR)}$:

$0 = -X_0 + X_1 Z + X_2 Z^2 + \ldots + X_K Z^K$

Δεν υπάρχει τύπος για υπολογισμό ριζών πολυώνυμου βαθμού 5 και άνω με ριζικά (θεώρημα Abel – Galois – η βάση της σύγχρονης άλγεβρας!)

- Για επενδύσεις βραχείας διάρκειας αναλυτική λύση είναι εφικτή.

Παράδειγμα: Επένδυση έχει δαπάνη 100.000€ και θα αποδώσει 70.000€ ετησίως για δύο έτη. Ποιο το IRR;
Εξετάζουμε την $-100+70Z+70Z^2=0$ ή $7Z^2+7Z-10=0$

$\Rightarrow \rho i\zeta\varepsilon\varsigma \frac{-7 \pm \sqrt{49+4\cdot 10\cdot 7}}{14}$ εφόσον $0 \le IRR \le \infty$ για εύλογες περιπτώσεις είναι $0<Z<1$ άρα εξετάζουμε ΜΟΝΟ τη θετική ρίζα $Z = \frac{-7+\sqrt{49+\ldots}}{14} = 0{,}796$ οπότε $IRR = \frac{1}{Z} - 1 = 25{,}69\%$

- Για γενικές προβλέψεις το IRR βρίσκεται με αριθμητικές μεθόδους όπως αυτή της <u>διχοτόμησης</u>.

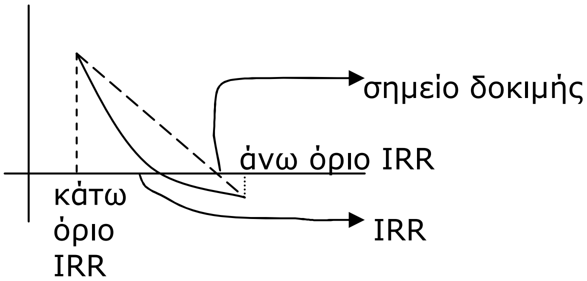
Παράδειγμα: Στην περίπτωση της επένδυσης με δαπάνη 1 εκατ.€ και σταθερά έσοδα 170 χιλ.€ επί δεκαετία είναι:
ΚΠΑ(ρ)=-1000+170 α(10,ρ)

Είδαμε ότι ΚΠΑ(10%)=44,5>0
Επίσης υπολογίζουμε ΚΠΑ(15%) ≅ -147 < 0 ⇒ 10% < IRR < 15%.
Δοκιμάζουμε στο μέσο του διαστήματος αβεβαιότητας $\frac{10+15}{2} = 12{,}5\%$

Είναι ΚΠΑ(12,5%) ≅ -60 < 0
Άρα: 10%<IRR<12,5% και η αβεβαιότητα στο IRR υποδιπλασιάστηκε.
Δοκιμάζουμε πάλι στο μέσο: $\frac{10+12{,}5}{2} = 11{,}25\%$

Και ΚΠΑ(11,25%) = -10 < 0
Άρα: 10%<IRR<11,25% κ.λ.π.

Ταχύτερες μέθοδοι εκμεταλλεύονται την σκέψη ότι εφόσον ΚΠΑ(10%) = 44,5 και ΚΠΑ(11,25%)=-10, το IRR είναι πιο κοντά στο 11,25%. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως μέθοδος <u>τέμνουσας</u>. Βλ. σχήμα.



Στα συστήματα λογισμικού (Excel) υπολογίζονται αντίστοιχες μέθοδοι αναζήτησης για τον εντοπισμό του IRR σε ενσωματωμένες συναρτήσεις.

Σειρές πληρωμών κατά γεωμετρική πρόοδο:
Πολύ σημαντικές στις εφαρμογές

π.χ. Έστω επένδυση σε έργο που σήμερα αποδίδει ποσό $\overline{X}$ ετησίως. Προβλέπουμε ότι τα κέρδη θα αυξάνονται κατά g ετησίως, θα είναι δηλαδή $X_1 = \overline{X}(1+g),\ X_2 = \overline{X}(1+g)^2, \ldots,\ X_K = \overline{X}(1+g)^K$

Η παρούσα αξία των εσόδων θα είναι:

$$\sum_{j=1}^{K} \overline{X}\frac{(1+g)^j}{(1+\rho)^j} = \overline{X}\sum_{j=1}^{K}\left[\frac{1+g}{1+\rho}\right]^j$$

πάλι έχουμε άθροισμα όρων Γ.Π. με λόγο $\frac{1+g}{1+\rho}$ αντί για $\frac{1}{1+\pi}$ όπως προηγουμένως (στις ομοιόμορφες σειρές πληρωμών). Άρα αν θέσουμε $\frac{1}{1+\hat{\rho}} \equiv \frac{1+g}{1+\rho}$ τότε η παράσταση γίνεται

$$\overline{X}\sum_{j=1}^{K}\left(\frac{1+g}{1+\rho}\right)^j = \overline{X}\sum_{j=1}^{K}\frac{1}{(1+\hat{\rho})^j} = X\alpha(K,\hat{\rho})$$

είναι $\hat{\rho} = \frac{1+\rho}{1+g} - 1 = \frac{\rho - g}{1+g}$ που σε εφαρμογή για $g<1$ απλοποιείται σε $\rho - g$

Για άπειρους όρους το άθροισμα είναι πεπερασμένο.

Αν $\frac{1+g}{1+\rho} < 1$ ή g<ρ

και είναι $a(\infty,\hat{\rho}) = \frac{1}{\hat{\rho}} = \frac{1+g}{\rho - g}$.

Για g>ρ η παράσταση είναι αρνητική και φυσικά δεν έχει νόημα καθώς ΔΕΝ ισχύει όταν g>ρ.

Η τελική αξία υπολογίζεται αντίστοιχα:

$$\mathrm{TA} = \sum_{j=1}^{K}\overline{X}(1+g)^j(1+\rho)^{K-j} = (1+\rho)^K\sum_{j=1}^{N}\overline{X}\left(\frac{1+g}{1+\rho}\right)^j = \overline{X}(1+\rho)^K a(K,\hat{\rho})$$

(ισούται και με $\left(\frac{1+\rho}{1+\hat{\rho}}\right)^K S(K,\hat{\rho}) \equiv (1+g)^K S(K,\hat{\rho})$)

Εφαρμογές:

__Εφαρμογή 1:__ (Αξιολόγηση Μετοχής) Αναπτυξιακή δυναμική μετοχή έχει τιμή P και κέρδη ανά μετοχή E, ενώ προβλέπεται επ' αόριστο ετήσια αύξηση κερδών g. Τι ισχύει μεταξύ P,E;

Για να συμφέρει η αγορά της πρέπει $-P + E\frac{1+g}{1+\rho} + E\left(\frac{1+g}{1+\rho}\right)^2 + \ldots > 0$

ή $-P + E\frac{1+g}{\rho - g} > 0$

ή $\frac{P}{E} < \frac{1+g}{\rho - g}$ αν g<ρ

$\frac{P}{E} < \infty$ αν g>ρ

π.χ. για ρ=5%, g=2% $\frac{P}{E} < \frac{1{,}02}{0{,}03} = 34$

αλλά για g=5% ή 6% ΔΕΝ υπάρχει άνω όριο στο $\frac{P}{E}$. Αυτό εξηγεί τα τεράστια $\frac{P}{E}$ που παρατηρήθηκαν στα χρηματιστήρια.

<u>*Εφαρμογή 2:*</u> Επένδυση έχει δαπάνη 1 εκατ.€ και έσοδα που αν λειτουργούσε σήμερα θα ήταν 120 χιλ.€ και αυξάνονται κατά 5% ετησίως επί 10ετία. Συμφέρει η επένδυση για $j_{(1)}$=10%;

Η ΚΠΑ είναι $-1000 + 120a(10, \hat{\rho})$ με $\hat{\rho} = \frac{0{,}05}{1{,}05} = 4{,}76\%$

Άρα ΚΠΑ(χ;10%)=-1000+120α(10, 4,76%)=-1000+120·7,812=-62,5
Άρα απορρίπτεται.

Ποιο το IRR της επένδυσης;

Το IRR ορίζεται ως το ρ για το όποιο ΚΠΑ=0, δηλαδή $-1000 + 120a\left(0, \frac{IRR - g}{1+g}\right)$

g=5%

Η σχέση 0=-1000+120α(10,z) δίνει μετά από αριθμητική επίλυση z=3,46%
και άρα $0{,}0346 = \frac{IRR - 0{,}05}{1{,}05}$ ή IRR=8,633%.

Γενικά αν προβλέπουμε πληθωρισμό g% είθισται να ΜΗΝ αναπροσαρμόζουμε τα έσοδα ως προς τον πληθωρισμό αλλά να υπολογίζουμε την ΚΠΑ με επιτόκιο μειωμένο κατά g.

Παράδειγμα: Έστω επιτόκια αγοράς 5% και πληθωρισμός g=2%. Αυτό σημαίνει ότι οι επενδύσεις αξιολογούνται ως προς $\hat{\rho} = 5\% - 2\% = 3\%$, χωρίς αναπροσαρμογή των μελλοντικών εσόδων.

<u>Σειρές Πληρωμών κατά αριθμητική πρόοδο</u>

Σε περίπτωση αυξήσεως εσόδων κατά σταθερό ποσό,
π.χ. X_K=Ρ+ΚΒ (Κ,Β σταθερά) πως υπολογίζεται η Π.Α.;

$$\Pi\mathrm{A} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(A + jB)}{(1+p)^j} = Aa(N,p) + B\sum_{j=1}^{N} j(1+p)^{-j}$$

Η παράσταση $I_N = \sum_{j=1}^{N} j(1+p)^{-j}$ υπολογίζεται όπως το άθροισμα όρων Γ.Π. και είναι

$$I_N = \frac{1}{1+p} + \frac{2}{(1+p)^2} + \ldots + \frac{N}{(1+p)^N}$$

$$\frac{I_N}{1+p} = \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{2}{(1+p)^3} + \ldots + \frac{N-1}{(1+p)^N} + \frac{N}{(1+p)^{N+1}}$$

ή αφαιρώντας

$$I_N\left(1-\frac{1}{1+p}\right) = \frac{I}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+p)^N} - \frac{N}{(1+p)^{N+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_N \frac{p}{1+p} = a(N,p) - N(1+p)^{-(N+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_N = \frac{1+p}{p}\left[a(N,p) - \frac{N}{(1+p)^{N+1}}\right]$$

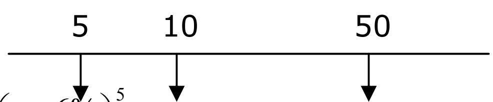
<u>Γενικές Σειρές Πληρωμών</u>

Έστω σύνθετη κεφαλαιοποίηση με συχνότητα n και σειρά πληρωμών που προκύπτει ανά K κεφαλαιοποιήσεις: Ποια η παρούσα αξία;
Αν X_m η m-στη χρηματοροή που προκύπτει την mK κεφαλαιοποίηση με παρούσα αξία $\frac{X_m}{(1+p)^{mK}}$ όπου $p = \frac{j_{(n)}}{n}$.

Θέτοντας $1+\widehat{p} \equiv \left(1+\frac{j_{(n)}}{n}\right)^K$ (συσσώρευση μίας μονάδας έπειτα από K κεφ/σεις) η παρούσα αξία γίνεται $\frac{X_m}{(1+\widehat{p})^m}$

Δηλαδή αλλάζουμε το ρ από $\frac{j_{(n)}}{n}$ σε $\left(1+\frac{j(n)}{n}\right)^K - 1$

<u>Παράδειγμα:</u> Τοποθέτηση ποσού A ανά 5 μήνες σε λογαριασμό με $j_{(12)}$=6%. Γίνονται 10 τοποθετήσεις. Ποια η παρούσα αξία;



$$\widehat{p} = \left(1+\frac{6\%}{12}\right)^5 - 1 = 2{,}525\%$$

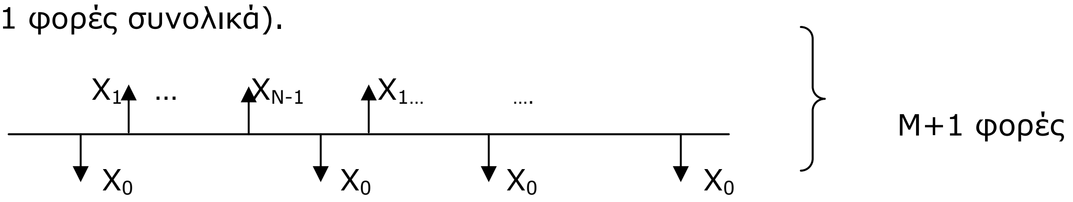
ΠΑ=Α α(10, 2,525%)=8,741Α
Ποια η τελική αξία;

$TA_N = \Pi A_0 \cdot (1+p)^N$, όπου $p = \frac{j_{(12)}}{12} = 0{,}5\%$ και N=50. Άρα:

$$TA_{50} = 8{,}741A \cdot 1{,}005^{50} = 11{,}216$$

Επαναλαμβανόμενες Επενδύσεις

Έστω επένδυση επαναλαμβάνεται με περίοδο N για άλλες M φορές (M+1 φορές συνολικά).



Η ΠΑ της επένδυσης είναι:

$$-X_0+\frac{X_1}{(1+p)}+\ldots+\frac{X_{N-1}}{(1+p)^{N-1}}-\frac{X_0}{(1+p)^N}+\frac{X_1}{(1+p)^{N+1}}+\ldots-$$
$$-\frac{X_0}{(1+p)^{MN}}+\frac{X_1}{(1+p)^{MN+1}}+\ldots+\frac{X_{N-1}}{(1+p)^{MN+N-1}}=$$
$$=\text{ΚΠΑ}(X,p)+\frac{1}{(1+p)^N}\text{ΚΠΑ}(X,p)+\ldots+\frac{1}{(1+p)^{N\cdot M}}\text{ΚΠΑ}(X,p)$$

όπου $\text{ΚΠΑ}(X,p)=-X_0+\frac{X_1}{1+p}+\ldots+\frac{X_{N-1}}{(1+p)^{N-1}}$

άρα: $\text{ΠΑ}=\text{ΚΠΑ}(X,p)\left(1+\frac{1}{(1+p)^N}+\ldots+\frac{1}{(1+p)^{N-M}}\right)=\text{ΚΠΑ}(X,p)[1+a(M,\widehat{p})]$

όπου $1+\widehat{p}\equiv(1+p)^N$

Εφαρμογή:

Επένδυση με X_0=-1000, X_1=…=X_{10}=170 και $j_{(1)}$=10%, επαναλαμβάνεται άλλες 4 φορές. Χρειάζεται γι' αυτό ένα πρόσθετο ποσό 80 χιλ.€. Είναι σκόπιμη η επένδυση;

Η ΠΑ είναι $\text{ΚΠΑ}(X,10\%)[1+a(4,\widehat{p})]$. Το $\widehat{p}$ είναι $\widehat{p}=1{,}10^{11}-1=1{,}853$

Άρα $\widehat{p}=185{,}3\%$! Για μία επανάληψη ΚΠΑ=44,5 χιλ.€ από προηγούμενο παράδειγμα και:

$$a(4,1.853)=\frac{1-(1+1.853)^{-4}}{1.853}=0{,}532\,.$$

Άρα ΠΑ = 44,5 · 1,532 = 68,17 χιλ.€

Εφόσον η δαπάνη επιπλέον είναι 80 χιλ., δεν συμφέρει η επαναλαμβανόμενη επένδυση.

Αξιολόγηση – Επιλογή Μηχανημάτων

Έστω δαπάνη για αγορά μηχανήματος ποσού Κ που επαναλαμβάνεται ανά Ν έτη.
Η ΠΑ για Μ επιπλέον επαναλήψεις είναι:
$\Pi A_M = K[1 + a(M, \widehat{p})]$ όπου $\hat{p} = (1+p)^N - 1$ αν $j_{(1)}$=p.

Για Μ → ∞ $\quad \Pi A\infty = K\left(1 + \frac{1}{\widehat{p}}\right) = K\left(1 + \frac{1}{(1+p)^N - 1}\right) = K\frac{(1+p)^N}{(1+p)^N - 1} = K\frac{1}{1-(1+p)^{-N}}$

$\left[\acute{\eta} = \mathrm{K}\frac{p}{1-(1+p)^{-N}} \cdot \frac{1}{p} = \frac{Ka^{-1}(N,p)}{p}\right]$

Αν υπάρχει σταθερό κόστος Λ ετήσιο λειτουργίας είναι παρούσα αξία $\Lambda\alpha(\infty, \mathrm{p}) = \frac{\Lambda}{\mathrm{p}}$

Το συνολικό κόστος είναι $\frac{Ka^{-1}(N,p) + \Lambda}{p}$

[Για Ν=∞, αιώνια μηχανή το κόστος είναι $K + \frac{\Lambda}{p}$. Προφανώς και προκύπτει και από τον τύπο με $\frac{a^{-1}(\infty, p)}{p} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$]

Ο τύπος είναι και κριτήριο επιλογής κεφαλαιουχικού εξοπλισμού όπου οι τύποι διαφέρουν κατά το κόστος αγοράς, την διάρκεια ζωής, τα λειτουργικά έξοδα.

<u>Παράδειγμα:</u> Ποια μηχανή επιλέγεται με κριτήριο την ελαχιστοποίηση κόστους, ∞ διάρκειας ορίζοντα και $j_{(1)}$=3%;

Τύποι Μηχανών	**Διάρκεια Ζωής**	**Κόστος Αγοράς (χιλ. €)**	**Ετήσια Λειτ. Έξοδα (χιλ. €)**	**a^{-1}(Ν,3%)**	**Ka^{-1}+Λ**
Α	5	50	0,9	0,218	11,8
Β	7	70	1,0	0,161	12,3
Γ	10	90	1,2	0,117	11,7

Προφανώς η κατάταξη μπορεί να γίνει με κριτήριο το Ka^{-1}+Λ (όχι το $\frac{Ka^{-1} + \Lambda}{p}$)

Περιθωριακά καλύτερος είναι ο τύπος μηχανής Γ!