2/12/03

ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΙ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ (ΑΛΛΗΛΟΧΡΕΟΙ ΤΟΚΟΦΟΡΟΙ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΙ)

ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

- ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ
- ΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΜΕΧΡΙ ΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ, ΔΗΛΑΔΗ ΤΟ ΑΛΓ. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΚΑΤΑΘΕΣΕΩΝ, ΑΝΑΛΗΨΕΩΝ
  - ΣΕ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥΣ ΥΠΕΡΑΝΑΛΗΨΗΣ ΕΠΙΤΡΕΠΕΤΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΜΕΧΡΙΣ ΕΝΟΣ ΟΡΙΟΥ
- ΤΟΚΟΦΟΡΙΑ: ΟΙ ΤΟΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΣΥΜΦΩΝΗΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟ ΑΛΛΑ <u>ΔΕΝ</u> ΑΠΟΔΙΔΟΝΤΑΙ ΠΑΡΑ ΜΟΝΟ ΣΕ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΕΣ ΣΥΜΦΩΝΗΜΕΝΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ
- ΑΠΟΔΙΔΟΝΤΑΙ ΕΠΙΣΗΣ ΣΤΟ ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ

• ΑΠΛΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΚΩΝ (ΑΡΚΕΤΑ ΚΟΝΤΑ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ)

- ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΗΜΕΡΗΣΙΟΣ <u>ΑΠΛΟΣ</u> ΤΟΚΟΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΙΠΟΥ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ ΚΑΘΕ ΗΜΕΡΑΣ
- ΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΟΙ ΤΟΚΟΙ ΜΙΑΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ (ΔΗΛΑΔΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΗΜΕΡΑ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΤΟΚΩΝ ΜΕΧΡΙ ΤΗΝ ΕΠΟΜΕΝΗ (Ή ΤΗΝ ΗΜΕΡΑ ΚΛΕΙΣΙΜΑΤΟΣ)) ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΤΟΚΩΝ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΝ ΗΜΕΡΩΝ

• VALEUR: Η ΠΡΩΤΗ ΤΟΚΟΦΟΡΟΣ ΗΜΕΡΑ ΕΝΟΣ ΠΟΣΟΥ ΠΟΥ ΚΑΤΑΤΙΘΕΤΑΙ (ΑΠΟΣΥΡΕΤΑΙ).

- ΓΙΑ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ ΜΕΤΡΗΤΩΝ VALEUR ΕΙΝΑΙ Η ΠΡΩΤΗ ΕΠΟΜΕΝΗ ΕΡΓΑΣΙΜΟΣ. ΓΙΑ ΑΝΑΛΗΨΕΙΣ: Η ΙΔΙΑ Η ΗΜΕΡΑ.

• ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΚΟΦΟΡΩΝ ΗΜΕΡΩΝ ΑΠΛΗΣ ΠΡΑΞΗΣ: ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΤΗΝ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ D_1, ΑΝΑΛΗΨΗ + ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΣΕ ΕΠΟΜΕΝΗ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ D_2: ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

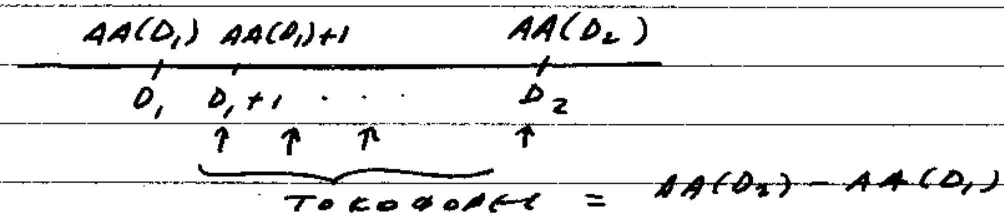
- ΛΥΝΕΤΑΙ ΩΣ ΕΞΗΣ: ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΤΑΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (ΣΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ Ή ΣΕ ΠΙΝΑΚΑ) ΠΟΥ ΔΙΝΕΙ ΓΙΑ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ D ΤΟΝ ΑΥΞΟΝΤΑ ΑΡΙΘΜΟ ΤΗΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΠΑΓΙΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ D_0. ΣΥΜΒΟΛΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ $AA(D)$. ΕΙΝΑΙ $AA(D_0) = 1$ ΕΞ' ΟΡΙΣΜΟΥ.

. ΣΥΝΗΘΩΣ ΣΤΑ ΥΠΟΛ. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ $D_0 = 1/1/1900$.

ΟΠΟΤΕ $AA(2/1/1900) = 2$ $\quad AA(1/2/1900) = 32$

- ΟΙ ΗΜΕΡΕΣ ΜΕΤΑΞΥ D_1 ΚΑΙ D_2 ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΙΣΕΣ ΜΕ $AA(D_2) - AA(D_1)$ <u>ΧΩΡΙΣ</u> ΝΑ ΜΕΤΡΑΜΕ ΤΗΝ ΗΜΕΡΑ D_1



- ΦΥΣΙΚΑ Η ΣΥΜΒΑΤΙΚΗ D_0 ΔΕΝ ΕΠΗΡΕΑΖΕΙ ΤΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ.

<u>ΠΑΡΑΤ.</u> ΣΤΟ EXCEL Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ Η DATE (YEAR ; MONTH ; DAY)

Π.χ. DATE (1900; 1; 1) = 1

DATE (2000; 5; 3) = 36649

DATE (2000; 10; 15) = 36814

ΑΡΑ ΑΠΟ 3/5/2000 ΕΩΣ 15/10/2000 ΜΕΣΟΛΑΒΗΣΑΝ 36814 − 36649 = 165 ΗΜΕΡΕΣ

ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΑ ΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΓΙΝΟΤΑΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟΝ <u>ΠΙΝΑΚΑ ΗΜΕΡΩΝ</u> ΤΗΣ ΕΠΟΜΕΝΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ, ΟΠΟΥ ΔΙΝΕΤΑΙ Ο ΑΥΞΩΝ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΘΕ ΜΕΡΑΣ ΕΝΟΣ ΕΤΟΥΣ. ΕΤΣΙ Η 3/5/2000 ΕΙΝΑΙ Η 123η ΗΜΕΡΑ ΕΝΩ Η 15/10/2000 Η 288η ΗΜΕΡΑ ΟΠΟΤΕ ΟΙ ΗΜΕΡΕΣ ΠΟΥ ΜΕΣΟΛΑΒΗΣΑΝ ΗΤΑΝ 288 − 123 = 165

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> ΑΝ ΤΟ 2000 ΗΤΑΝ ΔΙΣΕΚΤΟ ΘΑ ΕΠΡΕΠΕ ΝΑ ΠΡΟΣΘΕΣΟΥΜΕ ΜΙΑ ΗΜΕΡΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΗΜΕΡΩΝ

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

· ΑΝ ΕΝΑ ΠΟΣΟ (ΥΠΟΛΟΙΠΟ) K ΜΕΙΝΕΙ ΣΤΑΘΕΡΟ d ΗΜΕΡΕΣ ΘΑ ΕΧΕΙ ΤΟΚΟΥΣ ΙΣΟΥΣ ΜΕ $\frac{iKd}{360}$ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΟΚΩΝ $\frac{i \cdot K \cdot 1}{360}$ ΓΙΑ d ΗΜΕΡΕΣ

· ΓΙΑ ΤΡΑΠΕΖΙΚΟΥΣ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥΣ Ο ΤΥΠΟΣ ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΠΟΛΛΕΣ ΦΟΡΕΣ ΩΣ $Kd/(360/i)$

· Ο ΟΡΟΣ Kd ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ <u>ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΣ</u>

· Ο ΟΡΟΣ $(360/i)$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $K = 1000$ € $d = 10$ ημέρες

$i = 3\%$. ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΣ $= 10.000$

ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ $= 360/0{,}03 = 12000$ ΑΡΑ Ο ΤΟΚΟΣ ΕΙΝΑΙ $\frac{10000}{12000} = 0{,}667$ €

· ΑΝ ΕΝΑΣ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ ΕΙΧΕ ΥΠΟΛΟΙΠΑ K_j ΓΙΑ d_j ΗΜΕΡΕΣ, Ο ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΤΟΚΟΣ ΘΑ ΗΤΑΝ

$I = \left(\sum_{j=1}^{m} K_j d_j\right) / D$ ΔΗΛΑΔΗ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΤΟΚΑΡΙΘΜΩΝ ΔΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΙΡΕΤΗ.

· ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ: ΕΣΤΩ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ ΜΕ ΤΙΣ ΕΞΗΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	ΚΙΝΗΣΗ	ΥΠΟΛΟΙΠΟ	ΗΜΕΡΕΣ	ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΣ
1/1	100	100 ← ΥΠΟΛΟΙΠΟ 100 ΓΙΑ 30 ΜΕΡΕΣ	30	3000
31/1	100	200	15	3000
15/2	-50	150	30	4500
17/3	-50	100	60	6000
16/5	150	250	45 (ΜΕΧΡΙ 30/6)	11250
30/6	ΤΟΚΟΙ;			

· ΑΝ Ο ΛΟΓΑΡ. ΑΝΟΙΞΕΙ ΤΗΝ 1/1 ΚΑΙ ΟΙ ΤΟΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΙ

ΣΤΙΣ 30/6, ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΥΨΟΣ ΤΩΝ ΤΟΚΩΝ ΑΠΟ 1/1 ΕΩΣ 30/6; ΕΠΙΤΟΚΙΟ 5%.

• ΣΕ ΕΝΑ ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ ~~ΥΠΟ~~ ΑΝΑΦΕΡΟΝΤΑΙ ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ, ΟΙ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ. ΟΙ ΤΟΚΟΦΟΡΕΣ ΗΜΕΡΕΣ ΚΑΙ ΟΙ ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΙ ΕΙΝΑΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ.

• ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΤΟΚΑΡΙΘΜΩΝ ΕΙΝΑΙ 27.750 ΕΝΩ Ο ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ $D = 360/0{,}05 = 7.200$ ΑΡΑ

$I = 27.750 / 7.200 = 3{,}854$.

• ΑΝ ΤΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΗΤΑΝ 5% ΜΕΧΡΙ ΤΙΣ 17/3 ΚΑΙ 10% ΕΦΕΞΗΣ, ΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΘΑ ΗΤΑΝ ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΟΙ ΕΞΗΣ: $D_{5\%} = 7.200$ $D_{10\%} = 3.600$ ΕΝΩ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΥΣ 10.500 ΗΤΑΝ ΠΡΙΝ ΤΙΣ 17/3 ΚΑΙ ΟΙ ΥΠΟΛΟΙΠΟΙ (27.750 − 10.500) 17.250 ΜΕΤΑ ΤΗΝ 17/3. ΑΡΑ $I = \frac{10500}{7200} + \frac{17250}{3600} = 6{,}25$.

• ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗ ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΦΑΡΜΟΣΘΕΙ ΣΕ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥΣ ΥΠΕΡΑΝΑΛΗΨΗΣ, ΟΠΟΥ ΟΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥΝ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ (ΔΑΝΕΙΣΜΟΥ). ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΕΝΑΣ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ ΕΧΕΙ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΚΑΤΑΘΕΣΗΣ 5% ΚΑΙ ΥΠΕΡΑΝΑΛΗΨΗΣ 10%. ΠΟΙΟΙ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΤΟΚΟΙ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΚΙΝΗΣΕΙΣ; ΗΜΕΡ. ΤΟΚΟΦΟΡΙΑΣ 30/6

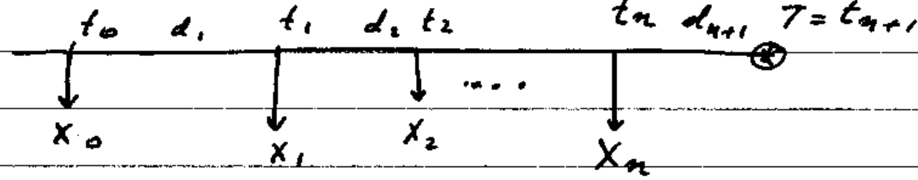
ΗΜΕΡΟΜ	ΚΙΝΗΣΗ	ΥΠΟΛΟΙΠΟ	ΗΜΕΡΕΣ	ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΙ
1/1	100	100	60	6000
1/3	−200	−100	60	−6000
1/5	200	100	60	6000
30/6	ΤΟΚΟΙ;			

ΕΙΝΑΙ $D_{5\%} = 7200$ $D_{10\%} = 3600$ ΘΕΤΙΚΟΙ ΤΟΚΑΡ = 12000 ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΤΟΚΑΡ = −6.000 ΚΑΙ

$I = \frac{12000}{7200} - \frac{6000}{3600} = 0$, ΜΗΔΕΝΙΚΟΙ ΤΟΚΟΙ!

· Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΕΝ ΕΚΦΡΑΖΕΙ ΤΟΚΟΥΣ ΚΑΤ' ΕΥΘΕΙΑΝ ΑΠΟ ΚΙΝΗΣΕΙΣ, ΑΛΛΑ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΑ ΕΥΧΡΗΣΤΗ, ΚΑΘΩΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΖΕΤΑΙ ΣΕ ΑΛΛΑΓΕΣ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ, ΑΡΝ. ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΛΠ.

· ΜΙΑ ΚΑΤ' ΕΥΘΕΙΑΝ ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΩΣ ΕΞΗΣ



· ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΤΟΚΩΝ ΣΤΟ $t_{n+1} = T$

· ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΙ $\underbrace{X_0 d_1}_{\text{ΥΠΟΛ. ΣΤΟ } t_0} + \underbrace{(X_0+X_1) d_2}_{\text{ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΣΤΟ } t_1} + \underbrace{(X_0+X_1+X_2) d_3}_{\text{ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΣΤΟ } t_2} + \dots + (X_0+\dots+X_n) d_{n+1}$

$$= X_0(d_1+\dots+d_{n+1}) + X_1(d_2+\dots+d_{n+1}) + \dots + X_n d_{n+1}$$

$$= X_0(T-t_0) + X_1(T-t_1) + \dots + X_k(T-t_k) + \dots + X_n(T-t_n)$$

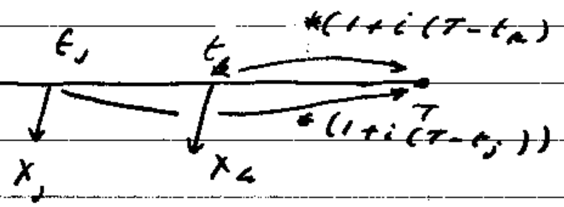
ΚΑΙ ΟΙ ΤΟΚΟΙ ΕΙΝΑΙ

$$I = \sum_{j=0}^{n} i X_j (T-t_j)$$

ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΥΝ ΤΟΥΣ ΤΟΚΟΥΣ, ΕΦΟΣΟΝ ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΙΝΑΙ ΑΠΛΩΣ $K = \sum_{j=0}^{n} X_j$ ΚΑΙ ΑΡΑ

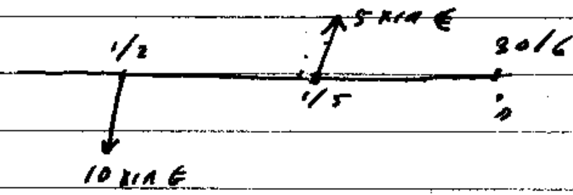
$$S = I + K = \sum_{j=0}^{n} X_j \left[1 + i(T-t_j)\right]$$ <u>ΕΥΘΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ</u>

· ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ: ΚΑΘΕ ΠΟΣΟ X_j ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ t_j, ΤΟΚΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΑΠΛΟ ΤΟΚΟ ΜΕΧΡΙ ΤΟΝ ΧΡΟΝΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ T, ΚΑΙ ΤΑ ΤΟΚΙΣΜΕΝΑ ΠΟΣΑ ΑΘΡΟΙΖΟΝΤΑΙ:



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. ΚΑΤΑΘΕΤΩ ΤΗΝ 1/2/03 10.000 € ΚΑΙ ΚΑΝΩ ΑΝΑΛΗΨΗ 5.000 € ΤΗΝ 1/5/03. ΤΙ ΠΟΣΟ ΤΟΚΩΝ ΘΑ ΕΙΣΠΡΑΞΩ ΤΗΝ 30/6; ΕΠΙΤΟΚΙΟ 10%, ΑΝΟΙΓΜΑ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ ΤΗΝ 1/2/03, ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΕΤΟΣ.



$$S_{30/6} = 10\left(1+\frac{5}{}\,10\%\right) - 5\left(1+\frac{2}{12}\,10\%\right) =$$

$= 5{,}333$ ΧΙΛ €

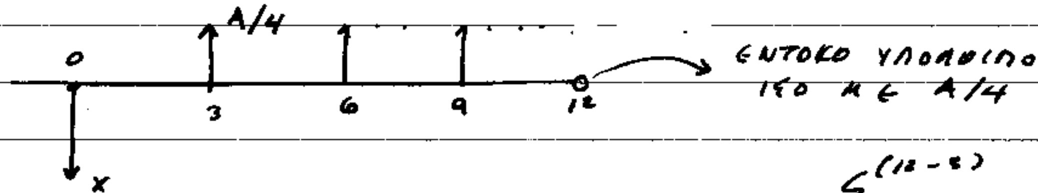
ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ, ΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΤΩΝ 10.000 € ΓΙΑ 3 ΜΗΝΕΣ ΑΠΟΔΙΔΕΙ ΤΟΚΟ $10 \cdot 0{,}10 \cdot 3/12 = 0{,}250$ ΧΙΛ € ΕΝΩ ΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΤΩΝ 5.000 ΤΟΚΟΥΣ $5 \cdot 0{,}10 \cdot 2/12 = 0{,}083$ ΔΗΛΑΔΗ ΣΥΝΟΛΙΚΑ $0{,}250 + 0{,}083 = 0{,}333$.

2. ΜΙΑ ΟΦΕΙΛΗ ΥΨΟΥΣ Α ΣΤΗΝ ΕΦΟΡΙΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΞΟΦΛΗΘΕΙ ΑΜΕΣΩΣ ΟΠΟΤΕ ΘΑ ΔΟΘΕΙ ΕΚΠΤΩΣΗ 5%. ΑΝ ΔΕΝ ΕΞΟΦΛΗΘΕΙ ΑΜΕΣΩΣ, ΓΙΝΕΤΑΙ ΔΙΑΚΑΝΟΝΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΠΛΗΡΩΜΗ ΣΕ 4 ΙΣΕΣ ΤΡΙΜΗΝΙΑΙΕΣ ΔΟΣΕΙΣ ΧΩΡΙΣ ΕΚΠΤΩΣΗ. ΤΙ ΣΥΜΦΕΡΕΙ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΝ Η ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΧΡΗΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ ΕΙΝΑΙ ΛΟΓΑΡ. ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ ΜΕ ΕΠΙΤΟΚΙΟ $i' = 12\%$. ΠΡΩΤΗ ΔΟΣΗ <u>ΜΕΤΑ</u> ΑΠΟ 3 ΜΗΝΕΣ.

ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΤΟΠΟΘΕΤΟΥΜΕ ΠΟΣΟ X ΣΤΟΝ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟ ΕΤΣΙ ΩΣΤΕ ΝΑ ΜΠΟΡΕΣΟΥΜΕ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΙΣΟΠΟΣΕΣ ΜΕ ΤΙΣ ΔΟΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΦΕΙΛΟΥΜΕ ΣΤΟΝ ΔΙΑΚΑΝΟΝΙΣΜΟ. ΑΝ ΤΟ X ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ ΑΠΟ ΤΟ ΠΟΣΟ

ΠΟΥ ΘΑ ΠΛΗΡΩΣΟΥΜΕ ΜΕ ΑΜΕΣΗ ΕΞΟΦΛΗΣΗ ΤΟΤΕ ΣΥΜΦΕΡΕΙ Η ΠΛΗΡΩΜΗ ΜΕ ΔΟΣΕΙΣ.

ΓΙΑ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΟ Χ ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟ ΠΟΥ ΘΑ ΕΧΕΙ (ΕΝΤΟΚΟ) ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΣΤΟ ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΙΣΟ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΔΟΣΗ :

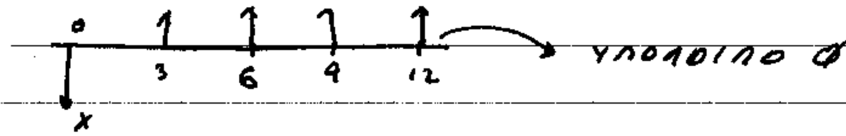


ΑΡΑ $\text{Υπολ.}_{\text{στο } 12} = X\left(1+12\%\cdot\frac{12}{12}\right) - \frac{A}{4}\left(1+12\%\cdot\frac{9}{12}\right) - \frac{A}{4}\left(1+12\%\cdot\frac{6}{12}\right)$

$$- \frac{A}{4}\left(1+12\%\cdot\frac{3}{12}\right) = \frac{A}{4}$$

<u>ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ</u> (ΟΧΙ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΩΣΤΑ, ΓΙΑΤΙ;*)

ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΑΜΕ ΝΑ ΘΕΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΣΥΝΘΗΚΗ ΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΣΤΟ ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΑΦΟΥ ΓΙΝΕΙ ΚΑΙ Η ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΑΝΑΛΗΨΗ Α/4 ΣΤΟ ΧΡΟΝΟ 12.



Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΟΥ ΘΑ ΠΡΟΚΥΨΕΙ ΕΙΝΑΙ Η ΙΔΙΑ!

· ΛΥΝΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΣΧΕΣΗ ΠΑΡΑΠΑΝΩ, ΕΧΟΥΜΕ

$$1{,}12\,X = A/4\left(4 + \frac{12\%}{12}(9+6+3+0)\right)$$

$$X = A\,\frac{1}{1{,}12}\cdot\frac{1}{4}\left(4 + 12\%\cdot\frac{18}{12}\right)$$

$$X = 93{,}3\%\ A$$

ΑΡΑ ΑΦΟΥ Η ΑΜΕΣΗ ΕΞΟΦΛΗΣΗ ΑΠΑΙΤΕΙ 100 − 6% ΤΟΥ Α ή 94% Α, ΣΥΜΦΕΡΕΙ Η ΕΞΟΦΛΗΣΗ ΜΕ ΔΟΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΕΚΜΕΤΑΛΛΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΟΣΟΥ ΑΜΕΣΗΣ ΠΛΗΡΩΜΗΣ →

* ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΠΟΛΥΤΑ ΣΩΣΤΟ ΓΙΑΤΙ ΠΡΩΤΑ ΚΛΕΙΝΕΙ Ο ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΠΡΟΣΜΕΤΡΙΟΥΝΤΑΙ ΟΙ ΤΟΚΟΙ. ΒΕΒΑΙΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΛΕΠΤΟΜΕΡΕΙΑ ΚΑΘΩΣ ΤΟ ΠΟΣΟ ΕΙΣΠΡΑΞΗΣ ΤΟΚΩΝ + ΥΠΟΛΟΙΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΙΔΙΟ

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΛΥΣΗ: ΑΝ ΕΙΧΑ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΕΙ ΤΟ 94% ΤΟΥ Α (0,94 Α) ΣΕ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟ, ΕΚΑΝΑ 3 ΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΥΨΟΥΣ Α/4, ΤΟ ΕΝΤΟΚΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟΝ ΜΗΝΑ 12:

$$S_{12} = 0{,}94A(1+12\%) - 0{,}25A\left(1+12\% \cdot 9/12\right) - 0{,}25A\left(1+12\% \cdot 6/12\right) - 0{,}25A\left(1+12\% \cdot 3/12\right)$$
$$= A\left[0{,}94 \cdot 1{,}12 - 0{,}25\{1{,}09 + 1{,}06 + 1{,}03\}\right]$$
$$= 0{,}2578\,A$$

ΑΠΟ ΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ, ΠΛΗΡΩΝΩ ΤΗΝ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΔΟΣΗ ΥΨΟΥΣ 0,25 Α ΚΑΙ ΜΟΥ ΠΕΡΙΣΣΕΥΟΥΝ ΧΡΗΜΑΤΑ $0{,}0078\,A > 0$. ΑΡΑ ΣΥΜΦΕΡΕΙ Η ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΧΡΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΕΙΣ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3 ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΕΝΟΣ - ΠΟΛΛΩΝ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΩΝ

ΟΦΕΙΛΩ 10 ΕΚΑΤ € ΣΕ 6 ΜΗΝΕΣ ΚΑΙ 5 ΕΚΑΤ ΣΕ 12 ΜΗΝΕΣ. ΣΚΟΠΕΥΩ ΝΑ ~~ΤΑ~~ ΚΑΛΥΨΩ ΤΙΣ ΥΠΟΧΡΕΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΙΑ ΚΟΙΝΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΣΕ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ $i = 24\%$. ΤΙ ΠΟΣΟ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΙ;

ΠΡΟΦΑΝΩΣ $S_{12} = 5 = X\,1{,}24 - 10 \cdot 1{,}12$

ΑΡΑ $X = 13{,}065$ ΕΚΑΤ €

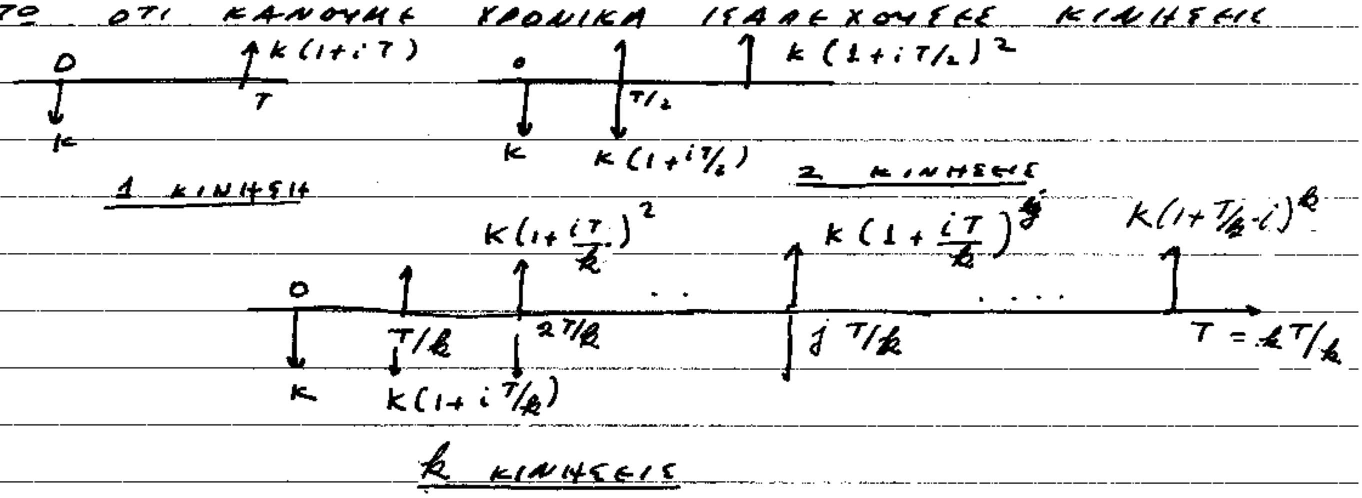
ΑΛΛΑ ΑΝ ΕΙΧΑ ΑΝΟΙΞΕΙ ΕΝΑ ΛΟΓ/ΣΜΟ ΓΙΑ ΝΑ ΚΑΛΥΨΩ ΤΑ 10 ΕΚΑΤ ΘΑ ΧΡΕΙΑΖΟΤΑΝ ΠΟΣΟ X_1 ΜΕ $X_1\,1{,}12 = 10$ (ΓΙΑΤΙ;) Ή 8,929 ΕΚ € ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΓΙΑ ΤΑ 5 ΕΚΑΤ, ΠΟΣΟ X_2 ΜΕ $X_2\,1{,}24 = 5$ Ή $4{,}032 = X_2$. ΣΥΝΟΛΙΚΑ $X_1 + X_2 = 12{,}961$ ΔΗΛΑΔΗ ΛΙΓΟΤΕΡΟ ΚΑΤΑ 104 ΧΙΛ. € !

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΠΟΛΛΟΙ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΙ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΦΕΡΟΤΕΡΟΙ ΚΑΘΩΣ ΕΧΟΥΜΕ ΤΑΧΥΤΕΡΗ ΕΙΣΠΡΑΞΗ ΤΟΚΩΝ. ΑΛΛΑ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΚΑΙ ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ. ΠΟΙΑ;

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΤΟΚΟΣ - ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

ΙΔΑΝΙΚΟ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΙΟ: ΜΑΣ ΕΠΙΤΡΕΠΕΙ ΝΑ ΚΛΕΙΣΟΥΜΕ ΕΝΑ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟ ΚΑΤΑ ΒΟΥΛΗΣΗ ΚΑΙ ΝΑ ΕΙΣΠΡΑΞΟΥΜΕ ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΑΝΑΛΟΓΟΥΝΤΕΣ ΤΟΚΟΥΣ. ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ ΚΑΘΕ ΚΛΕΙΣΙΜΟ ΕΧΕΙ ΚΟΣΤΟΣ (ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΟ) ΑΛΛΑ ΚΑΜΜΙΑ ΦΟΡΑ ΚΑΙ ΕΠΙΒΑΡΥΝΣΕΙΣ.

· ΣΕ ΙΔΑΝΙΚΟ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΙΟ ΜΕ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ i ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΧΕΙΡΙΖΟΜΑΣΤΕ ΚΕΦΑΛΑΙΟ K ΓΙΑ ΧΡΟΝΟ T. ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ ΧΡΟΝΙΚΑ ΙΣΑΠΕΧΟΥΣΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ



· ΜΕ ΜΙΑ ΚΙΝΗΣΗ ΤΟ ΤΕΛΙΚΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΕΙΝΑΙ

$$S^1(T) = K\,(1 + iT/1)^1$$

· ΜΕ ΔΥΟ: $S^2(T) = K\,(1 + iT/2)^2$

$\vdots$

· ΜΕ k: $S^k(T) = K\,(1 + i\underbrace{T/k}_{\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΜΕΤΑΞΥ ΚΙΝΗΣΕΩΝ } T/k})^{k}$ ← ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

· Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $S^k(T)$ ΓΙΑ ΣΤΑΘΕΡΑ K, T ΕΙΝΑΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ $k = 1, 2, \ldots$

· ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΤΑΙ ΟΤΙ:

. Η ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ S_k $(= S^k(T))$ ΕΙΝΑΙ ΑΥΞΟΥΣΑ

(ΠΡΟΦΑΝΩΣ $S_2 = K(1+iT+\frac{i^2T^2}{4}) > S_1 = K(1+iT)$ ΚΑΙ $S_{2k} > S_k$. ΓΕΝΙΚΑ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΕΙΝΑΙ ΔΥΣΚΟΛΗ)

. Η ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ S_k ΕΙΝΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΗ ΔΗΛΑΔΗ ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΡΙΘΜΟΣ μ ΜΕ

$$\mu > S_k \quad \forall k$$

ΚΑΙ ΑΥΤΗ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΕΙΝΑΙ ΔΥΣΚΟΛΗ

. ΑΡΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΟ ΟΡΙΟ $\lim_{k \to \infty} S_k$

ΠΟΥ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ ΔΕΝ ΑΠΕΙΡΙΖΕΤΑΙ ΤΟ ΚΕΡΔΟΣ ΜΕ ΑΥΞΑΝΟΜΕΝΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΓΙΑ $K = 100$ $T = 1$ $i = 20\%$ ΕΧΟΥΜΕ

k	S_k
0	100,00
1	120,00
2	121,00
4	121,55
10	121,90
100	122,12
1000	122,14
∞	122,14 ... ΤΟ ΟΡΙΟ...

ΣΥΝΕΧΗΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ; ΤΟ $S_k = K\left(1+\frac{iT}{k}\right)^k$
ΑΝΑΓΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ
ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ $g_n = (1+x/n)^n$
ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΑΥΞΟΥΣΑ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΗ

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 1. ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΡΙΘΜΟΣ e ΤΕΤΟΙΟΣ ΩΣΤΕ

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

ΓΙΑΤΙ; ΘΕΤΟΥΜΕ $m = n/x$ (ΟΧΙ ΑΚΕΡΑΙΟΣ)
ΟΠΟΤΕ $g_n = (1+1/m)^{mx} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x$

ΑΝ $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$ ΤΟΤΕ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x \quad \text{ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ}$$

$$= e^x$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ e

ΑΠΟ ΤΟ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ $(1+x)^m$

$$= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j \qquad \binom{m}{j} = \frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)}{j!}$$

ΑΡΑ $$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{j=0}^{m}\frac{m\cdot(m-1)\cdots(m-j+1)}{j!\,\underbrace{m\cdot\cdots\cdot m}_{j\text{ ΦΟΡΕΣ}}}$$

$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m-1}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{m}\right)$$

ΓΙΑ $m\to\infty$ Ο j-ΟΡΟΣ ΓΙΝΕΤΑΙ $1/j!$

ΑΡΑ "ΕΚΤΙΜΟΥΜΕ" ΟΤΙ

$$e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \sum_{j=0}^{\infty} 1/j! = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}}_{2,71806} + \underbrace{\dots}_{\text{ΑΛΛΟΙ ΟΡΟΙ...}}$$

ΓΙΑ ΠΟΛΛΟΥΣ ΟΡΟΥΣ $e = 2,718281828\dots$

ΜΕ ΤΟΝ ΙΔΙΟ ΤΡΟΠΟ ΣΥΝΑΓΕΤΑΙ ΟΤΙ

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

ΕΤΣΙ $\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{0,2}{m}\right)^m = \underbrace{1 + 0,2 + \frac{0,2^2}{2} + \frac{0,2^3}{6} + \frac{0,2^4}{24}}_{1,2214} + \underbrace{\dots}_{\text{ΑΛΛΟΙ ΟΡΟΙ}}$

$\cong 1,2214$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ ΑΥΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΚΑΙ ΩΣ

$$\lim \left(1 + \frac{0,2}{m}\right)^m = e^{0,2} = (2,718281828\dots)^{2/10} \cong 1,2214$$

- ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ <u>ΣΥΝΕΧΗ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟ</u> ΜΙΑ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΑΠΟΔΙΔΕΙ ΓΙΑ ΧΡΟΝΟ T ΠΟΣΟ $S = K e^{cT}$ ΓΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ K ΚΑΙ c ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ - ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ.
- ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΕΚΜΕΤΑΛΛΕΥΣΗ ΜΑΝΙΚΟΥ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΙΟΥ

Εφαρμογές

① Μία τράπεζα δίνει επιτόκιο απλό τόκο 10% εφόσον η κατάθεση διαρκέσει άνω του έτους. Για μικρότερες περιόδους το επιτόκιό της είναι 9,5%.
(α) Τι συμφέρει αν θέλουμε να τοποθετήσουμε κάποιο ποσό για 1 έτος; (β) Για $1\frac{1}{2}$ έτος;

(α) Αν κάνουμε συνεχείς επανατοποθετήσεις θα ισχύει επιτόκιο 9,5% με ετήσια συσσώρευση $e^{0,095} = 1,0996 < 1,10$. Άρα θα κάνουμε μία κίνηση με απόδοση 10%.

(β) Αν κάνουμε μία κατάθεση διάρκειας $1\frac{1}{2}$ έτους με απλό τόκο θα έχουμε συσσώρευση $(1+10\%\cdot 1,5) = 1,15$. Εναλλακτικά, αν ρευστοποιήσουμε στο 1 έτος και εφεξής κάνουμε συνεχείς επανατοποθετήσεις θα έχουμε $1,10 \cdot e^{0,095\cdot 0,5} = 1,10\, e^{0,0475}$
$= 1,10 \cdot 1,04864 = 1,1535 > 1,15$, που δίνει καλύτερη απόδοση $(15,35\% > 15\%)$ από τον απλό τόκο.

② Αν υπάρχει επιβάρυνση 0,05% επί του υπολοίπου αναλήψεις ένα ιδανικό ταμιευτήριο με επιτόκιο 10% ετησίως.

Αν κάνουμε n κινήσεις σε 1 έτος η συσσώρευση είναι $S_n = (1 + 0{,}1/n - 0{,}0005)^n =$

n	$(S_n - 1)\times 100$
1	9,95
2	10,145
3	10,177 ←
4	10,166
12	9,816
100	5,126

Άρα η μέγιστη απόδοση προκύπτει αν κάνουμε επανατοποθετήσεις 3 φορές ανά έτος.
Βέβαια $S_n \to 0$, π.χ. $S_{1000} = 0,67$ (<1!!)