ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗ

- ΛΟΓ/ΣΜΟΙ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΤΟΚΟΥ : ΣΕ ΑΥΤΟΥΣ
  - ΚΑΘΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΕΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΤΟΚΩΝ
  - ΟΙ ΤΟΚΟΙ ΣΥΜΦΩΝΕΙΤΑΙ ΝΑ ΠΡΟΣΤΕΘΟΥΝ ΣΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ (ΑΝ ΔΕΝ ΓΙΝΕΙ ΑΝΑΛΗΨΗ)
- ΟΙ ΗΜΕΡΕΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΤΟΚΩΝ ΛΕΓΟΝΤΑΙ ΗΜΕΡΕΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ή ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΕΙΣ
- ΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΓΙΝΟΝΤΑΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ π.χ. ΑΝΑ ΕΞΑΜΗΝΟ, ΑΝΑ ΜΗΝΑ ΑΛΛΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΩΣ
- ΟΙ ΤΟΚΟΙ ΜΕΤΑΞΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΕΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΙ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ. ΘΑ ΘΕΩΡΗΣΟΥΜΕ ΟΤΙ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΙ ΟΠΩΣ ΣΤΟΥΣ ΛΟΓ/ΣΜΟΥΣ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ ΠΟΥ ΕΙΠΑΜΕ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ

- ΟΙ ΛΟΓ/ΣΜΟΙ ΑΥΤΟΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΖΟΝΤΑΙ ΣΥΝΗΘΩΣ ΑΠΟ
  α. ΤΗΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΣΕ ΑΡΙΘΜΟ ΚΕΦ/ΣΕΩΝ ΑΝΑ ΕΤΟΣ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΤΑΙ ΜΕ n ή m
  Η ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΚΕΦ/ΣΗΣ ΕΙΝΑΙ $1/m$ ΣΕ ΕΤΗ
  β. ΤΟ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ, ΕΣΤΩ $\alpha\%$ ΠΟΥ ΔΗΛΩΝΕΙ ΤΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΚΕΦ/ΣΕΩΝ. ΘΑ ΘΕΩΡΗΣΟΥΜΕ ΟΝΟΜ. ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΠΟΥ ΔΕΝ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ

- ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ

$$j(m) = \alpha\%$$

(ΔΕΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΕΙ ΓΙΑ ΤΙΣ ΗΜΕΡΕΣ ΚΕΦ/ΣΗΣ, ΜΟΝΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΤΟΥΣ...)

· ΓΡΑΦΟΥΜΕ π.χ. $j_{(12)} = 5\%$, $j_{(2)} = 3\%$
$j_{(1)} = 4\%$. ΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΕΧΟΥΜΕ ΜΗΝΙΑΙΑ ΚΕΦ/ΣΗ, ΤΗΝ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΕΤΗΣΙΑ.

· ΚΙΝΗΣΗ ΛΟΓ/ΣΜΟΥ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΤΟΚΟΥ

. ΕΣΤΩ $j_{(2)} = 10\%$ ΜΕ ΚΕΦ/ΣΕΙΣ 1/1 ΚΑΙ 1/7.

. ΚΙΝΗΣΕΙΣ 100 ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΤΗΝ 1/1 ΚΑΙ 50 ΤΗΝ 1/4. ΤΙ ΠΟΣΟ ΕΧΕΙ ΤΗΝ 1/1 ΤΟΥ ΕΠΟΜΕΝΟΥ ΕΤΟΥΣ;

· ΤΟ "ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ" ΘΑ ΔΕΙΞΕΙ ΤΑ ΕΞΗΣ

ΗΜΕΡΟΜ	ΚΙΝΗΣΗ	ΥΠΟΛΟΙΠΟ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
1/1	100	100	ΑΝΟΙΓΜΑ
1/4	50	150	
1/7	6,25	156,25	ΤΟΚΟΙ
1/1	7,81	164,1	ΤΟΚΟΙ

ΑΝ ΤΗΝ 1/10 ΕΙΧΑΜΕ ΑΠΟΣΥΡΕΙ ΠΟΣΟ 6,25 (ΤΟΚΟΙ) ΘΑ ΕΙΧΑΜΕ ΤΗΝ ΕΙΚΟΝΑ

ΗΜΕΡΟΜ	ΚΙΝΗΣΗ	ΥΠΟΛΟΙΠΟ
1/1	100	100
1/4	50	150
1/7	6,25	156,25
1/10	-6,25	150,-
1/1	7,66	157,66

ΟΙ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟΙ ΤΟΚΟΙ ΕΙΝΑΙ ΟΝΤΩΣ

$$156{,}25 \cdot \tfrac{3}{12} \cdot 10\% + 150 \cdot \tfrac{3}{12}\, 10\% = 7{,}66$$

· **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ**

ΣΕ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟ $j_{(2)} = 10\%$ ΤΟΠΟΘΕΤΟΥΜΕ ΠΟΣΟ A 3 ΜΗΝΕΣ ΠΡΙΝ ΚΕΦ/ΣΗ, ΧΩΡΙΣ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΛΛΗ ΚΙΝΗΣΗ ΚΛΕΙΝΟΥΜΕ ΕΝΤΟΚΑ ΤΟΝ ΛΟΓ/ΣΜΟ 3 ΕΤΗ ΚΑΙ ΕΝΑ ΜΗΝΑ ΜΕΤΑ ΤΟ ΑΝΟΙΓΜΑ ΤΟΥ. ΤΙ ΠΟΣΟ ΘΑ ΕΧΕΙ Ο ΛΟΓ/ΣΜΟΣ; (ΕΝΤΟΚΑ);

· Η ΠΡΩΤΗ ΚΕΦ/ΣΗ ΘΑ ΓΙΝΕΙ ΜΕΤΑ 3 ΜΗΝΕΣ (ΑΠΟ ΑΝΟΙΓΜΑ) ΚΑΙ ΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΘΑ ΕΙΝΑΙ

$$A\left(1+10\% \cdot 3/12\right)$$

· ΚΕΦ/ΣΕΙΣ ΘΑ ΓΙΝΟΥΝ ΣΕ 3+6, 3+12, 3+18 ΜΗΝΕΣ ΚΑΙ ΠΡΙΝ ΤΟΝ ΜΗΝΑ 31. ΑΡΑ Η ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΘΑ ΓΙΝΕΙ ΓΙΑ ΑΚΕΡΑΙΟ x ΩΣΤΕ $3+6x \le 37$ ΑΡΑ $6x \le 34$, $x \le 34/6$ ΑΡΑ $x=5$. ΕΠΟΜΕΝΩΣ ΘΑ ΓΙΝΟΥΝ ΑΛΛΕΣ 5 ΚΕΦ/ΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΟ ΠΟΣΟ ΜΕΤΑ $3+5\cdot 6 = 33$ ΜΗΝΕΣ ΘΑ ΕΙΝΑΙ

$$A\left(1+10\%\, 3/12\right)\left(1+10\%\, 6/12\right)^5$$

· ΘΑ ΑΠΟΣΥΡΟΥΜΕ ΤΑ ΧΡΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΟΥΣ $37-33 = 4$ ΜΗΝΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΤΕΛΙΚΟ ΠΟΣΟ ΘΑ ΕΙΝΑΙ

$$A\left(1+10\%\, 3/12\right)\left(1+10\%\, 6/12\right)^5\left(1+10\%\, 4/12\right)$$
$$= 1{,}352\, A$$

· <u>ΕΡΩΤΗΣΗ</u> ΠΟΤΕ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΚΛΕΙΣΩ ΤΟΝ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟ ΤΟΥ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΩΣΤΕ ΝΑ ΕΙΣΠΡΑΞΩ $A + 50\%$;

ΣΥΜΒΟΛΙΚΑ, ΕΣΤΩ τ, Ο ΧΡΟΝΟΣ ΠΡΙΝ ΤΗΝ 1η ΚΕΦ/ΣΗ, k ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΕΦ/ΣΕΩΝ

ΚΑΙ τ_2 Ο ΧΡΟΝΟΣ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ.

<u>ΠΡΟΦΑΝΩΣ</u> $0 \le \tau_1, \tau_2 \le 1/n$ ΕΤΗ

ΑΝ Ο ΛΟΓ/ΣΜΟΣ ΕΧΕΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟ $j(n)$

ΤΟ ΤΕΛΙΚΟ ΠΟΣΟ ΘΑ ΕΙΝΑΙ

$$A\left(1+j(n)\tau_1\right)\left(1+j(n)\cdot\frac{1}{n}\right)^k\left(1+j(n)\tau_2\right)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ <u>ΟΧΙ</u> $\frac{j(n)}{n}$

ΚΑΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΞΙΣΩΘΕΙ ΜΕ ΤΟ ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ ΠΟΣΟ

ΣΤΗΝ ΕΡΩΤΗΣΗ ΜΑΣ, ΕΙΝΑΙ

$$A\left(1+10\%\,3/12\right)\left(1+10\%/2\right)^k\left(1+10\%\,\tau_2\right) = 1{,}5A$$

ή $1{,}05^k \cdot (1+0{,}10\tau_2) = 1{,}463$

k ΑΚΕΡΑΙΟΣ $0 \le \tau_2 \le 1/2 \Rightarrow 1 \le 1+0{,}10\tau_2 \le 1{,}05$

ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΛΟΙΠΟΝ

$$1{,}05^k \le 1{,}05^k\underbrace{(1+0{,}10\tau_2)}_{\le 1{,}05} = 1{,}463 \le 1{,}05^{k+1}$$

ΑΡΑ $1{,}05^k \le 1{,}463 \le 1{,}05^{k+1}$

ΠΑΙΡΝΟΝΤΑΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΩΝΤΑΣ

$$k \le \frac{\log 1{,}463}{\log 1{,}05} \le k+1$$

ΑΡΑ $k = \left\lfloor \frac{\log 1{,}463}{\log 1{,}05} \right\rfloor = \lfloor 7{,}8 \rfloor = 7$

$\lfloor x \rfloor$: Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ x

ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΟ τ_2 ΘΕΤΟΝΤΑΣ

$$1{,}05^7(1+0{,}10\tau_2)=1{,}463$$

$$1{,}407(1+0{,}10\tau_2)=1{,}463 \Rightarrow \tau_2=0{,}40 \text{ ΕΤΟΥΣ}$$

Ο ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΙΠΟΥ $(1+j_{(m)}\tau_1)(1+j_{(m)}/m)^k(1+j_{(m)}\tau_2)$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΤΥΠΟΣ <u>ΜΕΙΚΤΟΥ ΤΟΚΟΥ</u>, ΑΚΡΙΒΗΣ ΑΛΛΑ ΔΥΣΧΡΗΣΤΟΣ.

· <u>ΤΥΠΟΙ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΕΦ/ΣΕΩΝ - ΧΡΟΝΟΥ</u>

· ΓΙΑ $\tau_1, \tau_2 = 0$ ΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΜΕΤΑ ΑΠΟ k ΚΕΦ/ΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ $S_k = A(1+j_{(m)}/m)^k$

· Ο ΧΡΟΝΟΣ ΠΟΥ ΘΑ ΕΧΕΙ ΜΕΣΟΛΑΒΗΣΕΙ ΕΙΝΑΙ $T = k \cdot 1/m$ ΕΤΗ (ΓΙΑΤΙ;)

· ΓΡΑΦΟΝΤΑΣ $k = Tm$ Ο ΤΥΠΟΣ ΓΙΝΕΤΑΙ

$$\underbrace{S_k}_{\text{ΑΡ. ΚΕΦ/ΣΕΩΝ}} = \underbrace{S_T}_{\text{ΧΡΟΝΟΣ}} = A\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^{mT}$$

ή

$$S_T = A\left[\left(1+j_{(m)}/m\right)^m\right]^T$$

· Ο ΟΡΟΣ $\left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m$ ΕΙΝΑΙ Η ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΠΟΣΟΥ ΣΕ 1 ΕΤΟΣ, ΠΟΥ ΕΧΕΙ ΑΠΟΔΟΣΗ <u>ΑΠΛΟΥ ΤΟΚΟΥ</u> ΠΟΥ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ, $i_{\text{ΠΡΑΓ}}$ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΦΑΝΩΣ

$$i_{\text{ΠΡ}} = \left(1+\frac{j_{(m)}}{m}\right)^m - 1$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> ΠΟΙΑ ΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ $j_{(2)} = 10\%$ $j_{(12)} = 5\%$ $j_{(1)} = 8\%$;

$i_{\pi\rho}(j_{(2)}=10\%) = 1{,}05^2 - 1 = 10{,}25\%$

$i_{\pi\rho}(j_{(12)}=5\%) = \left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{12} - 1 = 5{,}12\%$

$i_{\pi\rho}(j_{(1)}=8\%) = 8\%$ ΑΛΛΑ $j_{(1)}$ ΟΧΙ ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ!

· ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΓΙΑ n ΜΕΓΑΛΟ

$$i_{\pi\rho}(j_{(n)}=\alpha) = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n - 1 \simeq e^{\alpha} - 1$$

ΓΙΑ $\alpha = 5\%$ $i_{\pi\rho}(j_{(\infty)}=5\%) = 5{,}13\%$

ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟ $i_{\pi\rho}$ ΤΟΥ $j_{(12)}$!

· ΕΤΣΙ ΓΡΑΦΟΥΜΕ $\underline{S_T = A(1+i_{\pi\rho})^T}$

· Ο ΤΥΠΟΣ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΚΙΝΗΣΗ ΠΟΥ ΑΡΧΙΖΕΙ ΚΑΙ ΤΕΛΕΙΩΝΕΙ ΣΕ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗ

· ΓΙΑ ΜΙΚΡΑ ΕΠΙΤΟΚΙΑ ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΥ ΑΚΡΙΒΗΣ! ΑΚΟΜΑ ΚΑΙ ΑΝ ΤΟ T ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΕΡΙΟΔΩΝ ΚΕΦ/ΣΗΣ.

<u>Π.χ.</u> · $j_{(1)}=10\%$ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΓΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΕΤΗ

· ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΓΙΑ $A = 1$;

· ΑΚΡΙΒΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$1 \cdot 1{,}10^2 \cdot 1{,}05 = 1{,}2705$$

· ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ $1{,}10^{2,5} = 1{,}2691$

· ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ: $(1+j_{(n)}\tau)(1+j_{(n)}/n)^k$

$$= (1+j_{(n)}/n \cdot n\tau)(1+j_{(n)}/n)^k$$

ΑΛΛΑ ΓΙΑ x ΜΙΚΡΟ $(1+x)^{\tau} \simeq 1+\tau x$

ΚΑΙ $\left(1+\frac{j(m)}{m}\,m\tau\right) \simeq \left[\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^{m}\right]^{\tau}$

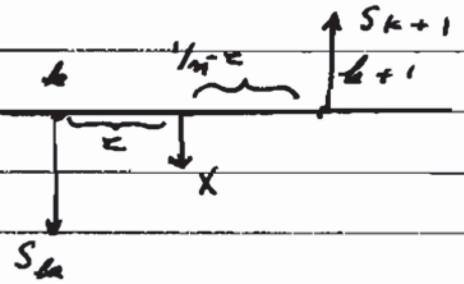
ΕΠΙΣΗΣ $\left(1+j(m)/m\right)^{k} = \left[\left(1+j(m)/m\right)^{m}\right]^{k/m}$

ΑΡΑ ΤΕΛΙΚΑ

$$\left(1+j(m)\tau\right)\left(1+j(m)/m\right)^{k} \simeq \left[\left(1+\frac{j(m)}{m}\right)^{m}\right]^{\underbrace{\tau+k/m}_{\text{ΧΡΟΝΟΣ!}}}$$

· ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΛΟΓ/ΣΜΩΝ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΤΟΚΟΥ

- ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΥΠΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΜΕΘΟΔΟΥ
- ΑΡΚΕΙ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ ΤΑ S_k, ΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ ΣΕ (ΑΚΕΡΑΙΕΣ) ΣΤΙΓΜΕΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗΣ $k=0,1,2,\ldots$



- ΕΣΤΩ ΟΤΙ Ο ΛΟΓ/ΣΜΟΣ ΑΝΟΙΞΕ ΤΗΝ k ΣΤΙΓΜΗ ΚΕΦ/ΣΗΣ ΜΕ ΠΟΣΟ S_k ΚΑΙ ΕΓΙΝΕ ΚΑΤΑΘΕΣΗ ΠΟΣΟΥ X ~~ΣΤΗΝ~~ τ ΧΡΟΝΟ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΚΕΦ/ΣΗ

- ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟ ΕΙΝΑΙ

$$S_{k+1} = S_k\left(1+j(m)\cdot 1/m\right) + \underbrace{X\left(1+j(m)(1/m-\tau)\right)}_{\tilde{X}_{k+1}}$$

Η $\underline{S_{k+1} = S_k(1+\rho) + \tilde{X}_{k+1}}$ $\quad k=0,1,2,\ldots$

ΟΠΟΥ $\rho \equiv j^{(m)}/m$ (ΠΡΟΣΟΧΗ: ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΧΙ ΕΠΙΤΟΚΙΟ!)

ΚΑΙ $\tilde{X}_{k+1}$ ΤΑ ΕΝΤΟΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ ΜΕΤΑΞΥ k ΚΑΙ $k+1$ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗΣ!

· Η ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ ΣΧΕΣΗ ΕΙΝΑΙ ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ! (ΣΤΑΘΕΡΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ)

· Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΝΕΙ ΤΟ S_k ΚΑΤ' ΕΥΘΕΙΑΝ ΓΙΑ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ k ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ X_k ΧΩΡΙΣ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΩΝ

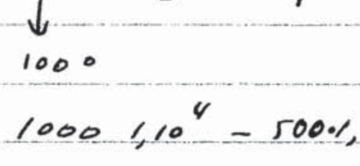
· ΕΞΕΤΑΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ Ε.Δ. ΕΧΟΥΜΕ

$$S_1 = S_0(1+\rho) + \hat{X}_1$$
$$S_2 = S_1(1+\rho) + \hat{X}_2 \Rightarrow S_2 = S_0(1+\rho)^2 + \hat{X}_1(1+\rho) + \hat{X}_2$$
$$S_3 = S_2(1+\rho) + \hat{X}_3 \Rightarrow S_3 = S_0(1+\rho)^3 + X_1(1+\rho)^2 + \hat{X}_2(1+\rho) + \hat{X}_3$$

ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΑ

$$\underline{S_k = S_0(1+\rho)^k + \sum_{j=1}^{k} \hat{X}_j (1+\rho)^{k-j}}$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u> 1. $j_{(1)} = 10\%$. ΤΟ ΠΟΘΕΤΩ ΣΕ ΣΤΙΓΜΗ ΚΕΦ/ΣΗΣ 1000 €, ΜΕΤΑ 2 ΧΡΟΝΙΑ ΚΑΝΩ ΑΝΑΛΗΨΗ 500 €, ΚΛΕΙΝΩ ΤΟΝ ΛΟΓ/ΣΜΟ ΣΕ ΑΛΛΑ 2 ΧΡΟΝΙΑ. ΠΟΙΟ ΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ;

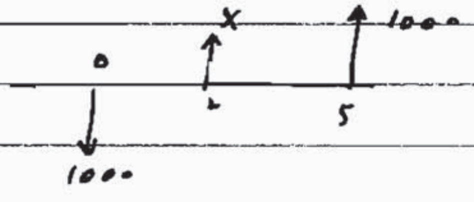


· $S_4 = 1000 \cdot 1{,}10^4 - 500 \cdot 1{,}10^2 = 859{,}1$ €

· ΟΝΤΩΣ ΣΕ ΔΥΟ ΧΡΟΝΙΑ ΕΧΩ $S_2 = 1000 \cdot 1{,}10^2 - 500 = 710$ €

ΣΤΟ 4 ΕΧΩ $S_4 = 710 \cdot 1,10^2 = 710 \cdot 1,21 = 859,1$

2. ΣΕ ΕΝΑ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟ $j_{(2)} = 10\%$ ΤΟΠΟΘΕΤΩ 1000 €
ΠΟΙΑ ΑΝΑΛΗΨΗ ΜΠΟΡΩ ΝΑ ΚΑΝΩ ΣΕ 2 ΕΤΗ ΩΣΤΕ
ΣΕ 5 ΕΤΗ ΝΑ ΚΛΕΙΣΩ ΕΙΣΠΡΑΤΤΟΝΤΑΣ ΠΑΛΙ 1000 €;



ΠΡΕΠΕΙ $1000 \cdot 1,05^{10} - X \, 1,05^{6} = 1000$
Ή ΔΙΑΙΡΩΝΤΑΣ ΔΙΑ $1,05^{6}$

$$1.000 \cdot 1,05^{4} - X - \frac{1000}{1,05^{6}} = 0 \Rightarrow X = 469,3 \text{ €}$$

· ΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΕΙΧΝΕΙ ΤΟ ΕΞΗΣ: ΑΝ ΣΕ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΛΕΙΝΟΥΜΕ ΤΟΝ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟ ΣΕ ΧΡΟΝΟ (ΚΕΦ/ΣΗ) k ΘΑ ΕΙΝΑΙ $-X_k = S_k$ (X_k ΥΨΟΣ ΑΝΑΛΗΨΗΣ)

ΚΑΙ Ο ΤΥΠΟΣ ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΑΝ ΕΠΙΠΛΕΟΝ $S_0 = X_0$

$$\sum_{j=0}^{k} X_j (1+\rho)^{k-j} = 0$$

ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ ΜΕ ΤΟΝ

$$\sum_{j=0}^{k} X_j (1+\rho)^{m-j} = 0$$

m ΑΥΘΑΙΡΕΤΟ!

· Ο ΟΡΟΣ $(1+\rho)^{m-j}$ ΦΕΡΝΕΙ ΤΟ ΠΟΣΟ X_j "ΕΝΤΟΚΑ" ΣΤΟ m - ΔΙΝΕΙ ΕΝΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΣΤΟ m.

· Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΥΤΗ ΛΕΕΙ ΟΤΙ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥ-

ΝΑΜΩΝ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΜΗΔΕΝΙΖΕΤΑΙ

· ΣΤΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΙΑΛΕΓΟΥΜΕ ΧΡΟΝΟ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΤΑ 2 ΕΤΗ. ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΠΟΣΟ ΤΩΝ 1000 € ΓΙΝΕΤΑΙ $1000 \cdot 1{,}05^4$ (ΓΙΑΤΙ;) ΕΝΩ ΤΟ ΤΕΛΙΚΟ -1000 ΓΙΝΕΤΑΙ $-1000/1{,}05^6$ (ΓΙΑΤΙ;) ΕΝΩ ΤΟ ΑΓΝΩΣΤΟ ΠΟΣΟ ΠΑΡΑΜΕΝΕΙ X. ΑΡΑ Η ΣΧΕΣΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΓΡΑΦΕΤΑΙ

$$1000 \cdot 1{,}05^4 - X - \frac{1000}{1{,}05^6} = 0$$

ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΑ ΟΠΩΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ

· ΣΕΙΡΕΣ ΠΛΗΡΩΜΩΝ – ΣΠ

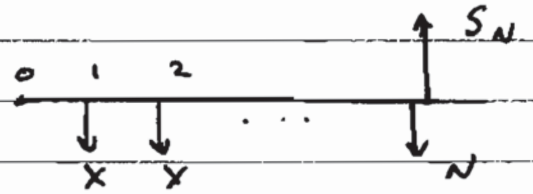
· ΑΝΑΦΕΡΟΜΑΣΤΕ ΣΕ ΠΟΣΑ $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ ΠΟΥ ΑΝΑΚΥΠΤΟΥΝ ΣΕ ΙΣΑΠΕΧΟΥΣΕΣ ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ

· ΑΝ $X_k = X \;\forall k$ ΕΧΟΥΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΕΙΡΑ

· ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ ΣΠ - ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ

· ΕΣΤΩ ΟΤΙ ΤΑ $X_k \,(= X)$ ΑΝΑΚΥΠΤΟΥΝ ΣΕ ΣΤΙΓΜΕΣ ΚΕΦ/ΣΗΣ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ $j(n)$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

· ΤΙ ΠΟΣΟ ΘΑ ΕΧΕΙ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΘΕΙ ΣΤΟ N;



ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΣΤΟ N ΕΙΝΑΙ:

$$S_N = X(1+\rho)^{N-1} + X(1+\rho)^{N-2} + \ldots + X$$

ΚΑΙ $\rho = \frac{j(n)}{n}$

$$= X\left[(1+\rho)^{N-1} + (1+\rho)^{N-2} + \dots + 1\right]$$

ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ ΑΘΡΟΙΣΗ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜ. ΠΡΟΟΔΟΥ:

- ΕΣΤΩ $Q_n = a + a\lambda + \dots + a\lambda^n$
- ΕΙΝΑΙ $\lambda Q_n = a\lambda + a\lambda^2 + \dots + a\lambda^n + a\lambda^{n+1}$

ΑΡΑ $Q_n - \lambda Q_n = a - a\lambda^{n+1}$

Η $Q_n = \dfrac{a\lambda^{n+1} - a}{\lambda - 1}$

ΑΝ $|\lambda| < 1$ $\lim_{n\to\infty} Q_n = \dfrac{a}{1-\lambda}$ ΓΙΑ $|\lambda| \geq 1$ ΤΟ ΟΡΙΟ ΑΠΟΚΛΙΝΕΙ

ΑΡΑ $S_N = X\dfrac{(1+\rho)^N - 1}{1+\rho-1} = X\dfrac{(1+\rho)^N - 1}{\rho}$

Ο ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΟΥ X ΓΡΑΦΕΤΑΙ $S(N,\rho) = \dfrac{(1+\rho)^N - 1}{\rho}$

· **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ** ΤΟΠΟΘΕΤΟΥΜΕ ΣΕ ΤΕΛΟΣ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΠΟΣΟ 100 € ΣΕ ΛΟΓ/ΣΜΟ ΜΕ $j_{(2)} = 5\%$. ΤΙ ΠΟΣΟ ΕΧΟΥΜΕ ΜΕΤΑ 5 ΕΤΗ;

ΕΙΝΑΙ $N = 2 \cdot 5 = 10$ $\rho = \dfrac{j_{(m)}}{m} = \dfrac{5\%}{2} = 2,5\%$

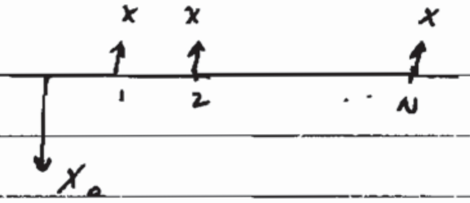
ΑΡΑ $S = 100\, S(10, 2,5\%) = 100 \cdot \dfrac{1,025^{10} - 1}{0,025} = 1.120,3$ €

· **ΠΡΟΦΑΝΩΣ** · $S(N,\rho) \geq N$ ΜΕ ΙΣΟΤΗΤΑ ΓΙΑ $\rho = 0$

· $S(N,\rho)$ ΑΥΞΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ρ

ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΣΕΙΡΑΣ

· ΘΕΛΩ ΝΑ ΚΑΝΩ ΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΠΟΣΟΥ X ΣΕ ΚΕΦ/ΣΕΙΣ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ ΜΕ $j_{(m)}$ ΓΝΩΣΤΟ N ΦΟΡΕΣ ΤΙ ΠΟΣΟ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΚΑΤΑΘΕΣΩ ΑΡΧΙΚΑ;



ΜΕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΠΑΛΙ ΣΤΟ Ν

$$X_0(1+\rho)^N - \left[X_1(1+\rho)^{N-1} + X(1+\rho)^{N-2} + \dots + X\right] = 0$$

ή $X_0(1+\rho)^N - X\, s(N,\rho)$

ή $X_0 = X \dfrac{s(N,\rho)}{(1+\rho)^N} - X \cdot \dfrac{1-(1+\rho)^{-N}}{\rho}$

Ο ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΟΥ Χ ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΤΑΙ
ΜΕ $a(N,\rho) = \dfrac{1-(1+\rho)^{-N}}{\rho}$

ΠΡΟΦΑΝΩΣ
- $a(N,\rho) \le N$ ΜΕ ΙΣΟΤΗΤΑ ΑΝ $\rho = 0$
- $a(N,\rho)$ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ρ
- ΑΝ $\rho >$ $\lim_{N\to\infty} a(N,\rho) = a(\infty,\rho) = \dfrac{1}{\rho}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ Α. ΤΙ ΠΟΣΟ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΚΑΤΑΘΕΣΩ ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΣΠΡΑΤΤΩ ΑΠΟ ΛΟΓ/ΣΜΟ 1000 € ΤΟΝ ΜΗΝΑ ΓΙΑ 10 ΧΡΟΝΙΑ, $J_{(12)} = 5\%$

· ΕΙΝΑΙ $N = 10 \cdot 12 = 120$ $\rho = \dfrac{J_{(12)}}{12} = \dfrac{0{,}05}{12} = 0{,}416\%$

· ΑΡΑ $X_0 = 1000 \cdot a(120, 0{,}416\%)$
$= 1000 \cdot 94{,}316 = 94{,}316$ €

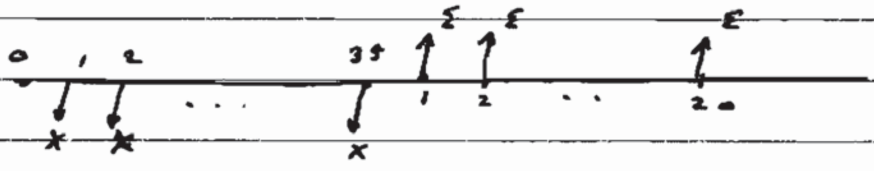
· ΓΙΑ ∞ ΧΡΟΝΙΑ ΤΟ ΠΟΣΟ ΕΙΝΑΙ
$X_0 = 1000\, a(\infty, 0{,}416) = \dfrac{1000}{0{,}00416} = 240.384{,}6$ €

Β. ΜΙΑ ΟΜΟΛΟΓΙΑ ΔΙΝΕΙ ΤΟΚΟΜΕΡΙΔΙΟ 1 € ΑΝΑ ΜΗΝΑ. ΠΟΙΑ Η ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΑΝ $J_{(12)} = 6\%$; ΘΕΩΡΕΙΣΤΕ ΑΠΕΡΙΟΡΙΣΤΗ ΤΗ ΖΩΗ ΤΗΣ
ΕΙΝΑΙ $\rho = 6\%/12 = 0{,}005$ ΚΑΙ Η ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΕΙΝΑΙ
$P = 1€ \cdot a(\infty, 0{,}5\%) = 200$ €

Γ. ΟΜΟΛΟΓΙΑ ΔΙΝΕΙ 1€ ΕΤΗΣΙΩΣ ΚΑΙ $j_{(1)} = 5\%$. ΠΟΙΑ Η ΑΞΙΑ ΤΗΣ (ΑΠΕΡΙΟΡΙΣΤΗ ΖΩΗ)

$\rho = 5\%$ ΚΑΙ Η ΑΞΙΑ ΕΙΝΑΙ $1€ \cdot a(\infty, 0{,}05) = 20€$

Δ. ΕΡΓΑΖΟΜΕΝΟΣ ΘΕΛΕΙ ΝΑ ΔΗΜΙΟΥΡΓΗΣΕΙ ΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΚΑΤΑΘΕΤΟΝΤΑΣ ΠΟΣΟ Χ ΕΤΗΣΙΩΣ ΕΠΙ 35 ΕΤΗ ΩΣΤΕ ΝΑ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΙΣΠΡΑΤΤΕΙ ΕΤΗΣΙΩΣ ΠΟΣΟ Σ ΕΠΙ 20 ΜΕΤΑ ΤΗΝ 35ΤΙΑ (ΣΥΝΤΑΞΗ). ΠΟΙΟ ΤΟ Χ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ $j_{(1)} = 5\%$



ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΣΤΙΓΜΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΤΟ 35. ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ Η ΑΞΙΑ (ΤΕΛΙΚΗ) ΤΩΝ ΕΙΣΦΟΡΩΝ ΣΤΟ 35 ΝΑ ΙΣΟΥΤΑΙ ΜΕ ΤΗΝ ΑΞΙΑ ΤΩΝ Σ ΣΤΟ 35, ΔΗΛΑΔΗ

$$X\, s(35, 5\%) - Σ\, a(20, 5\%) = 0$$

ή $X = Σ\, a(20, 5\%) / s(35, 5\%) = 0{,}138\, Σ$

- ΕΡΜΗΝΕΥΣΤΕ ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ.
- ΕΠΑΝΑΛΑΒΕΤΕ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΛΛΑ ΜΕ ΜΗΝΙΑΙΕΣ ΚΑΤΑΒΟΛΕΣ ΚΑΙ ΤΕΤΟΙΟ $j_{(12)}$ ΠΟΥ ΝΑ ΔΙΝΕΙ $i_{ΑΡ}(j_{(12)}) = 5\%$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΠΑΛΙ $X \cong 0{,}138\, Σ$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ

ΤΑ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ NPV - IRR

- ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΧΡΗΜΑΤΟΡΡΟΗ ΣΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ $t, t = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

ΟΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΠΟΣΑ $-X_0, X_1, \dots, X_N, \dots$ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΑ $X_j \geq 0$ $j = 0, 1, \dots, N, \dots$. ΚΑΤΑ ΣΥΜΒΑΣΗ ΤΟ 0-ΠΟΣΟ $-X_0$ ΘΕΩΡΕΙΤΑΙ ΟΤΙ ΚΑΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΕΝΩ ΤΑ $X_1, X_2, \dots$ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ ΕΙΣΠΡΑΞΕΙΣ.

- ΠΟΤΕ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΦΕΡΟΥΣΑ Η ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΤΟΚΟΥ;

- ΑΝ Η ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ ΕΙΝΑΙ ΙΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗΣ $1/m$ ΤΟΤΕ ΕΧΟΥΜΕ ΤΟ ΕΞΗΣ ΣΚΕΠΤΙΚΟ:
  - ΓΙΑ ΝΑ ΕΞΑΣΦΑΛΙΣΟΥΜΕ ΠΟΣΑ X_j $j = 1, \dots, N$ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΟΥΜΕ ΣΤΟ ΛΟΓ/ΣΜΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

$$\hat{X}_0 = \sum_{j=1} X_j (1+\rho)^{-j} \qquad \rho = \frac{j^{(m)}}{m}$$

  - ΑΝ $\hat{X}_0 > X_0$ ΤΟΤΕ Η ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΕΠΙΤΥΓΧΑΝΕΙ ΤΙΣ ΕΙΣΠΡΑΞΕΙΣ $X_1, X_2, \dots$ ΜΕ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ ΠΟΣΟ ΑΡΑ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΦΕΡΟΥΣΑ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟΝ ΣΥΝΘΕΤΟ ΤΟΚΟ!
  - Η ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΡΑΦΕΤΑΙ

$$\hat{X}_0 > X_0 \leftrightarrow \sum_{j=1} X_j / (1+\rho)^j > X_0$$

$$\longleftrightarrow \quad -X_0 + \sum_{j=1} X_j / (1+\rho)^j > 0$$

  - Η ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΚΑΘΑΡΑ ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ (NET PRESENT VALUE , ΚΠΑ, NPV
  - ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΑ X_j ΚΑΙ ΤΟ ρ

  - ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΠΟΔΟΧΗΣ ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΚΑΙ ΩΣ ΚΠΑ $(X ; \rho) > 0$

· ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΑΠΟΔΙΔΕΙ 170 ΧΙΛ € ΕΠΙ 10 ΕΤΗ ΚΑΙ ΑΠΑΙΤΕΙ ΑΡΧΙΚΗ ΔΑΠΑΝΗ 1 ΕΚΑΤ € ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΦΕΡΟΥΣΑ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΣΥΝΘ. ΤΟΚΟ $j_{(1)} = 10\%$;

ΕΙΝΑΙ $\text{ΚΠΑ}(X ; 10\%) = -1000 + 170\, a(10, 10\%)$
$= 44{,}5$ ΧΙΛ € > 0

ΑΡΑ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΦΕΡΟΥΣΑ

ΜΕΤΟΧΗ
2. (ΟΜΟΛΟΓΙΑ) ΜΙΑ ΜΕΤΟΧΗ ΚΟΣΤΙΖΕΙ P € ΚΑΙ ΘΑ ΑΠΟΔΙΔΕΙ ΜΕΡΙΣΜΑ E € ΕΠ' ΑΟΡΙΣΤΟ. ΑΝ $j_{(1)} = r$ ΔΕΙΞΤΕ ΟΤΙ $P/E < 1/r$

Η ΚΠΑ ΕΙΝΑΙ $-P + E\, a(\infty, r) = -P + E/r$ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΘΕΤΙΚΗ ΓΙΑ ΝΑ ΙΣΧΥΕΙ Η ΤΙΜΗ ΑΥΤΗ. ΑΡΑ $-P + E/r > 0$ Ή $P/E < 1/r$

· ΕΤΣΙ ΑΝ ΤΑ ΕΠΙΤΟΚΙΑ ΕΙΝΑΙ Π.Χ. 5% ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΟΧΩΝ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΧΟΥΝ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ ΑΛΛΑΓΩΝ ΣΤΑ ΚΕΡΔΗ ΤΩΝ ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟ ΑΠΟ 20 ΦΟΡΕΣ ΤΑ ΚΕΡΔΗ ΑΝΑ ΜΕΤΟΧΗ !

· ΑΠΟΔΟΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ IRR

· ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΑΦΕΣ ΣΤΗΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΜΙΑΣ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ Η ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ ΔΗΛ. ΤΟ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ

· ΕΥΛΟΓΟ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΥΠΟΨΗΦΙΑ ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΝΑ ΣΥΓΚΡΙΘΕΙ ΜΕ ΤΙΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΕΠΕΝΔΥΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ Ή ΕΧΟΥΜΕ ΑΝΑΛΑΒΕΙ, ΚΑΙ Η ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΥΤΗ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΑΦΗΣ.

· ΜΙΑ ΧΡΗΣΙΜΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ ΕΙΝΑΙ Η ΕΞΗΣ:

· ΓΙΑ ΠΟΙΑ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ ΕΠΙΤΟΚΙΑ ΠΑΡΑΜΕΝΕΙ ΣΥΜΦΕΡΟΥΣΑ Η ΕΠΕΝΔΥΣΗ; ΑΝ ΑΥΤΑ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ ΕΥΡΥ ΦΑΣΜΑ, Η ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΕΙΝΑΙ ΕΛΚΥΣΤΙΚΗ!

· ΜΙΑ ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΣΥΜΦΕΡΕΙ ΓΙΑ ρ ΤΕΤΟΙΑ ΩΣΤΕ
$\text{ΚΠΑ}(X,\rho) > 0$ (X : ΔΕΔΟΜΕΝΟ)

· ΠΡΟΦΑΝΩΣ (ΑΝ $X_0, X_1, \ldots, X_n > 0$ ΚΑΙ <u>ΜΟΝΟ</u>)

· $\text{ΚΠΑ}(X,\infty) = -X_0 < 0$

· $\text{ΚΠΑ}(X,\rho)$ ΦΘΙΝΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ρ

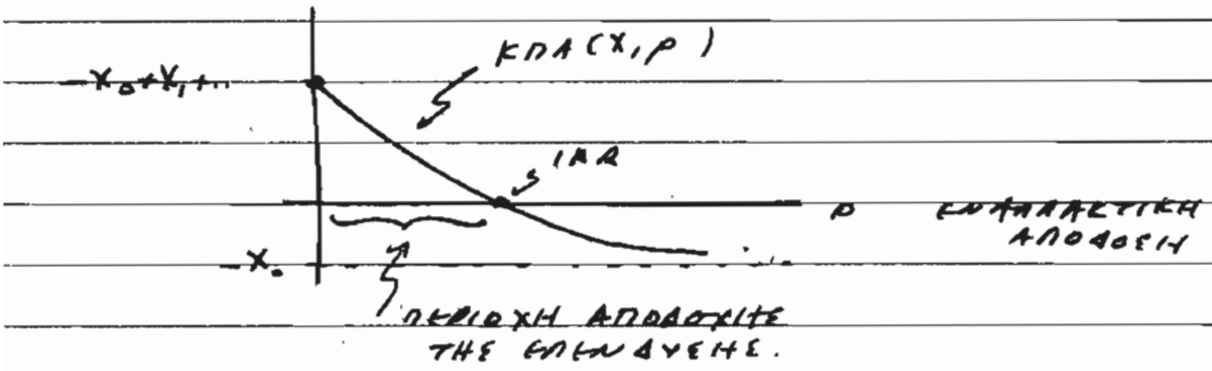
· ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ $X_0 < \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ (ΕΥΛΟΓΗ ΠΑΡΑΔΟΧΗ)
ΤΟΤΕ

· $\text{ΚΠΑ}(X,0) > 0$

· ΑΥΤΟ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ $\text{ΚΠΑ}(X,\rho) = 0$ ΠΟΥ ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ IRR (INTERNAL RATE OF RETURN)
ΔΗΛΑΔΗ $\text{ΚΠΑ}(X, IRR) = 0$

· ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΝ $\rho < IRR$ $\text{ΚΠΑ}(X,\rho) > 0$
ΚΑΙ ΑΝ $\rho > IRR$ $\text{ΚΠΑ}(X,\rho) < 0$

· ΑΡΑ Η ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΣΥΜΦΕΡΕΙ ΕΦΟΣΟΝ ΟΙ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΕΠΕΝΔΥΣΕΙΣ ΕΧΟΥΝ ΑΠΟΔΟΣΗ ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ ΑΠΟ IRR
(Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΡΟΤΑΣΗ ΘΕΛΕΙ ΠΡΟΣΟΧΗ – ΙΣΧΥΕΙ <u>ΜΟΝΟ</u> ΟΤΑΝ ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΥΙΟΘΕΤΗΣΗ Ή ΑΠΟΡΡΙΨΗ ΜΙΑΣ ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΗΣ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ)



ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ IRR

- ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΥΠΟΣ ΠΟΥ ΔΙΝΕΙ ΤΟ IRR ΓΕΝΙΚΑ:
- Η ΕΞΙΣΩΣΗ $-X_0 + X_1/(1+IRR)^1 + \dots + X_k/(1+IRR)^k = 0$ ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΩΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΝ ΘΕΣΟΥΜΕ $z = 1/(1+IRR)$:

$$0 = -X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_k z^k$$

- ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΤΥΠΟΣ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΡΙΖΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΒΑΘΜΟΥ 5 ΚΑΙ ΑΝΩ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ (ΘΕΩΡΗΜΑ ABEL - GALOIS - Η ΒΑΣΗ ΤΗΣ ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ!)
- ΓΙΑ ΕΠΕΝΔΥΣΕΙΣ ΒΡΑΧΕΙΑΣ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΙΝΑΙ ΕΦΙΚΤΗ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΕΧΕΙ ΔΑΠΑΝΗ 100.000 € ΚΑΙ ΘΑ ΑΠΟΔΩΣΕΙ 70.000 € ΕΤΗΣΙΩΣ ΓΙΑ ΔΥΟ ΕΤΗ ΠΟΙΟ ΤΟ IRR;

- ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΤΗΝ $-100 + 70z + 70z^2 = 0$

ή $-10 + 7z + 7z^2 = 0 \Rightarrow$ ΡΙΖΕΣ $\frac{-7 \pm \sqrt{49+4\cdot 10\cdot 7}}{14}$

ΕΦΟΣΟΝ $0 \le IRR \le \infty$ ΓΙΑ ΕΥΛΟΓΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ $0 < z < 1$ ΑΡΑ ΕΞΕΤΑΖΟΥΜΕ ΜΟΝΟ ΤΗ ΘΕΤΙΚΗ ΡΙΖΑ $\frac{-7+\sqrt{49+\dots}}{14} = 0{,}796$ ΟΠΟΤΕ $IRR = \frac{1}{z} - 1 = 25{,}69\%$

- ΓΙΑ ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΠΕΝΔΥΣΕΙΣ ΤΟ IRR ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΜΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΟΠΩΣ ΑΥΤΗ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ ΜΕ ΔΑΠΑΝΗ 1 ΕΚΑΤ € ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΑ ΕΣΟΔΑ 170 ΧΙΛ € ΕΠΙ ΔΕΚΑΕΤΙΑ, ΕΙΝΑΙ $ΚΠΑ(\rho) = -1000 + 170\, a(10,\rho)$

. ΕΙΔΑΜΕ ΟΤΙ $ΚΠΑ(10\%) = 44,5 > 0$

. ΕΠΙΣΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $ΚΠΑ(15\%) \cong -147 < 0$

$\Rightarrow 10\% \leq IRR < 15\%$

. ΔΟΚΙΜΑΖΟΥΜΕ ΣΤΟ ΜΕΣΟ ΤΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ $\frac{10+15}{2} = 12,5\%$

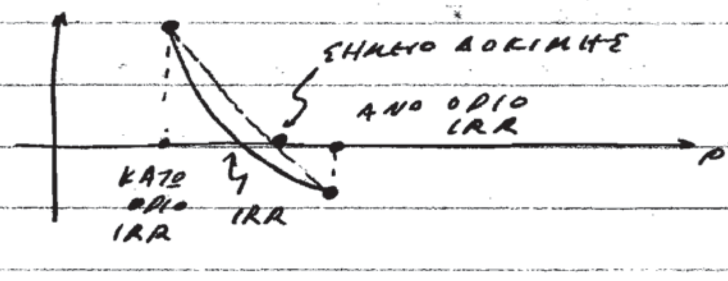
. ΕΙΝΑΙ $ΚΠΑ(12,5\%) \cong -60 < 0$

ΑΡΑ $10\% < IRR < 12,5\%$ ΚΑΙ Η ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΣΤΟ IRR ΥΠΟΔΙΠΛΑΣΙΑΣΤΗΚΕ

. ΔΟΚΙΜΑΖΟΥΜΕ ΠΑΛΙ ΣΤΟ ΜΕΣΟ: $\frac{10+12,5}{2} = 11,25$ ΚΑΙ $ΚΠΑ(11,25\%) = -10 < 0$

. ΑΡΑ $10\% < IRR < 11,25\%$ ΚΛΠ. ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ IRR ΣΤΟ EXCEL ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ $IRR = 11,028\%$

. ΤΑΧΥΤΕΡΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΜΕΤΑΛΛΕΥΟΝΤΑΙ ΤΗΝ ΣΚΕΨΗ ΟΤΙ ΕΦΟΣΟΝ $ΚΠΑ(10\%) = 44,5$ ΚΑΙ $ΚΠΑ(11,25\%) = -10$, ΤΟ IRR ΕΙΝΑΙ ΠΙΟ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟ 11,25%. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΓΝΩΣΤΗ ΩΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΕΜΝΟΥΣΑΣ. ΒΛΕΠΕ ΣΧΗΜΑ



. ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ (EXCEL) ΥΛΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟ ΤΟΥ IRR ΣΕ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

· ΣΕΙΡΕΣ ΠΛΗΡΩΜΩΝ ΚΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟ:
ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΣΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

· Π.Χ. ΕΣΤΩ ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΣΕ ΕΡΓΟ ΠΟΥ ΣΗΜΕΡΑ ΑΠΟΔΙΔΕΙ ΠΟΣΟ $\bar{X}$ ΕΤΗΣΙΩΣ. ΠΡΟΒΛΕΠΟΥΜΕ ΟΤΙ ΤΑ ΚΕΡΔΗ ΘΑ ΑΥΞΑΝΟΝΤΑΙ ΚΑΤΑ g ΕΤΗΣΙΩΣ, ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΔΗΛΑΔΗ $X_1 = \bar{X}(1+g)$, $X_2 = \bar{X}(1+g)^2, \dots, X_k = \bar{X}(1+g)^k$.

· Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ ΤΩΝ ΕΣΟΔΩΝ ΘΑ ΕΙΝΑΙ

$$\sum_{j=1}^{k} \bar{X} \frac{(1+g)^j}{(1+\rho)^j} = \bar{X} \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{1+g}{1+\rho}\right]^j$$

· ΠΑΛΙ ΕΧΟΥΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ Γ.Π. ΜΕ ΛΟΓΟ $\frac{1+g}{1+\rho}$ ΑΝΤΙ $\frac{1}{1+\rho}$ ΟΠΩΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ. ~~ΑΡΑ~~ ΑΝ ΓΡΑΨΟΥΜΕ $\frac{1}{1+\hat{\rho}} \overset{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}{\equiv} \frac{1+g}{1+\rho}$ ΤΟΤΕ Η ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΙΝΕΤΑΙ

$$\bar{X} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1+g}{1+\rho}\right)^j = \bar{X} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(1+\hat{\rho})^j} = \bar{X}\, a(k, \hat{\rho})$$

· ΕΙΝΑΙ $\hat{\rho} = \frac{1+\rho}{1+g} - 1 = \frac{\rho - g}{1+g}$ ΠΟΥ ΣΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΙΑ $g \ll 1$ ΑΠΛΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΣΕ $\rho - g$.

· ΓΙΑ ΑΠΕΙΡΟΥΣ ΟΡΟΥΣ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΕΙΝΑΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΑΝ $\frac{1+g}{1+\rho} < 1$ ή $g < \rho$ ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ

· $a(\infty, \hat{\rho}) = \frac{1}{\hat{\rho}} = \frac{1+g}{\rho - g}$

· ΓΙΑ $g > \rho$ Η ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΙΝΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΑ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΝΟΗΜΑ ΚΑΘΩΣ <u>ΔΕΝ</u> ΙΣΧΥΕΙ ΓΙΑ $g > \rho$!

· Η ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ:

$$TA = \sum_{j=1}^{k} \bar{X}(1+g)^j (1+\rho)^{k-j} = (1+\rho)^k \sum_{j=1}^{N} \bar{X} \left(\frac{1+g}{1+\rho}\right)^j$$

$$= (1+\rho)^k\, a(k,\hat\rho) \quad \left[\begin{array}{l} \text{ΙΣΟΥΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΕ} \\ \left(\frac{1+\rho}{1+\hat\rho}\right)^k s(k,\hat\rho) = (1+g)^k s(k,\hat\rho) \end{array} \right]$$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u> Α. (ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΜΕΤΟΧΗΣ) ΑΝΑΠΤΥΞΙΑΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΕΤΟΧΗ ΕΧΕΙ ΤΙΜΗ P ΚΑΙ ΚΕΡΔΗ ΑΝΑ ΜΕΤΟΧΗ E (ΕΤΗΣΙΑ), ΕΝΩ ΠΡΟΒΛΕΠΕΤΑΙ ΕΠ' ΑΟΡΙΣΤΟ ΑΥΞΗΣΗ ΚΕΡΔΩΝ g. ΤΙ ΙΣΧΥΕΙ ΜΕΤΑΞΥ P, E ;

ΓΙΑ ΝΑ ΣΥΜΦΕΡΕΙ Η ΑΓΟΡΑ ΤΗΣ ΠΡΕΠΕΙ

$$-P + \frac{E(1+g)}{(1+\rho)} + E\left(\frac{1+g}{1+\rho}\right)^2 + \cdots > 0$$

ή

$$-P + E\,\frac{1+g}{\rho-g} > 0$$

ή

$$\frac{P}{E} < \frac{1+g}{\rho-g} \qquad \text{ΑΝ} \quad g < \rho$$

$$P/E = \infty \qquad \text{ΑΝ} \quad g > \rho$$

ΠΧ ΓΙΑ $\rho = 5\%$ $g = 2\%$ $\quad P/E < \frac{1{,}02}{0{,}03} = 34$

ΑΛΛΑ ΓΙΑ $g = 5$ ή 6 <u>ΔΕΝ</u> ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΝΩ ΟΡΙΟ ΣΤΟ P/E. ΑΥΤΟ ΕΞΗΓΕΙ ΤΑ ΤΕΡΑΣΤΙΑ P/E ΠΟΥ ΠΑΡΑΤΗΡΗΘΗΚΑΝ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΑ !

Β. ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΕΧΕΙ ΔΑΠΑΝΗ 1 ΕΚΑΤ. € ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΡΡΟΗ 140 ΧΙΛ. € ΕΤΗΣΙΩΣ ΕΠΙ 10 ΕΤΗ. ΤΑ ΕΣΟΔΑ ΑΥΤΑ ΑΥΞΑΝΟΝΤΑΙ ΚΑΤΑ 5% ΕΤΗΣΙΩΣ. ΣΥΜΦΕΡΕΙ Η ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΑ ΜΕ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΠΟΥ ΑΠΟΔΙΔΕΙ $J_{(1)} = 10\%$;

ΑΝ ΔΕΝ ΛΑΒΟΥΜΕ ΥΠΟΨΗ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ, Η ΚΠΑ ΕΙΝΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΗ:

$$\text{ΚΠΑ}: \quad -1.000 + 140\ \underset{\rightarrow 6{,}145}{a(10;10\%)} = -139{,}76 \text{ χιλ.€}$$

ΑΝ ΟΜΩΣ ΛΑΒΟΥΜΕ ΥΠΟΨΗ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ ΤΟ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΕΙΝΑΙ $\hat{\rho} = \frac{0{,}10-0{,}05}{1{,}05} = 4{,}76\%$ ΟΠΟΤΕ Η ΚΠΑ ΓΙΝΕΤΑΙ ΘΕΤΙΚΗ:

$$\text{ΚΠΑ}: \quad -1000 + 140\ \underset{\rightarrow 7{,}812}{a(10;\ 0{,}0476)} = 93{,}75 \text{ χιλ.€}$$

ΓΕΝΙΚΑ ΑΝ ΠΡΟΒΛΕΠΟΥΜΕ ΜΙΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΑΥΞΗΣΗ g ΣΤΙΣ ΧΡΗΜΑΤΟΡΡΟΕΣ ΣΥΝΗΘΙΖΕΤΑΙ ΝΑ ΜΗΝ ΑΝΑΠΡΟΣΑΡΜΟΖΟΥΜΕ ΤΑ ΠΟΣΑ ΑΥΞΑΝΟΝΤΑΣ ΤΑ ΚΑΤΑ g, ΑΛΛΑ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΚΠΑ ΜΕ ΤΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΜΕΙΩΜΕΝΟ ΚΑΤΑ g. ΑΝ Η ΑΥΞΗΣΗ ΟΦΕΙΛΕΤΑΙ ΣΕ ΠΛΗΘΩΡΙΣΜΟ, ΤΟ ΜΕΙΩΜΕΝΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ $\rho - g$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ <u>ΑΠΟΠΛΗΘΩΡΙΣΜΕΝΟ</u> Ή <u>ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΕΠΙΤΟΚΙΟ</u>, ΠΟΥ ΟΜΩΣ ΔΕΝ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΣΥΓΧΕΕΤΑΙ ΜΕ ΤΟ ΕΤΗΣΙΟ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΤΟΥ $j(n)$ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ $\left(1+ j(n)/n\right)^n - 1$.

ΤΟ IRR ΤΗΣ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΩΣ ΕΞΗΣ:
ΕΙΝΑΙ $\text{ΚΠΑ}(\rho) = -1000 + 140\ a\left(10, \frac{\rho - g}{1+g}\right)$ ΟΠΟΤΕ ΑΝ $0 = \text{ΚΠΑ}(IRR)$ ΠΡΕΠΕΙ

$$a\left(10, \frac{IRR - g}{1+g}\right) = \frac{1000}{140} \simeq 7{,}143.$$

ΕΦΟΣΟΝ ΟΜΩΣ

$$a(10;\ 6{,}637\%) = 7{,}143$$

(ΟΠΩΣ ΔΙΑΠΙΣΤΩΝΟΥΜΕ ΜΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ, Π.Χ. ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗ)

ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ $\frac{IRR - g}{1+g} = 0{,}06637$ ΚΑΙ $g = 0{,}05$. ΕΠΟΜΕΝΩΣ ΕΙΝΑΙ $IRR = [6{,}637 \times 1{,}05 + 5]\% = 11{,}97\%$. ΑΥΤΟΣ Ο ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΝΕΙ ΤΟ ΟΤΙ ΓΙΑ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ $j(1) = 10\%$ (ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ ΤΟΥ IRR) Η ΚΠΑ ΕΙΝΑΙ ΘΕΤΙΚΗ.

ΣΕΙΡΕΣ ΠΛΗΡΩΜΩΝ ΚΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟ

ΑΝ ΜΙΑ ΧΡΗΜΑΤΟΡΡΟΗ ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ ΚΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΑ ΕΣΤΩ Β, ΕΙΝΑΙ ΔΗΛΑΔΗ $X_{k+1} = X_k + B$, $X_0 = A$ ΟΠΟΤΕ $X_k = A + kB$, $k = 0,1,2$ ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ ΤΗΣ;

$$ΠΑ = \sum_{j=1}^{N} (A + jB)/(1+\rho)^{j} = A\,a(N,\rho) + B\sum_{j=1}^{N} j(1+\rho)^{-j}$$

Η ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ $I_N = \sum_{j=1}^{N} j(1+\rho)^{-j}$ ΥΠΟΛΟΓΙΖΕΤΑΙ ΟΠΩΣ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ Γ.Π.: ΕΙΝΑΙ

$$I_N = \frac{1}{1+\rho} + \frac{2}{(1+\rho)^2} + \dots + \frac{N}{(1+\rho)^N}$$

$$\frac{I_N}{1+\rho} = \frac{1}{(1+\rho)^2} + \frac{2}{(1+\rho)^3} + \dots + \frac{N-1}{(1+\rho)^N} + \frac{N}{(1+\rho)^{N+1}}$$

Ή ΑΦΑΙΡΩΝΤΑΣ $I_N\left(1 - \frac{1}{1+\rho}\right) = \frac{1}{1+\rho} + \frac{1}{(1+\rho)^2} + \dots \frac{1}{(1+\rho)^N} - \frac{N}{(1+\rho)^{N+1}}$

$$\Rightarrow I_N \frac{\rho}{1+\rho} = a(N,\rho) - N(1+\rho)^{-(N+1)} \Rightarrow I_N = \frac{1+\rho}{\rho}\left[a(N,\rho) - \frac{N}{(1+\rho)^{N+1}}\right]$$

ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΕΠΕΝΔΥΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ ΠΛΗΡΩΜΩΝ

· ΕΣΤΩ ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΕΦ/ΣΗ ΜΕ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ n ΚΑΙ ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΡΩΜΩΝ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΝΑ Κ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΕΙΣ: ΠΟΙΑ Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ;

· ΑΝ X_m Η m-ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΡΟΗ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΤΗΝ mk ΚΕΦ/ΣΗ ΜΕ ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ $X_m/(1+\rho)^{mk}$ ΟΠΟΥ $\rho = j(n)/n$. ΘΕΤΟΝΤΑΣ

$$1 + \hat{\rho} \equiv \left(1 + \frac{j(n)}{n}\right)^k$$

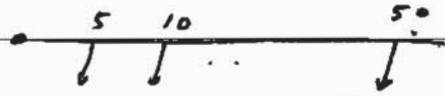
Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ ΓΙΝΕΤΑΙ $X_m/(1+\hat{\rho})^m$

· ΔΗΛΑΔΗ ΑΛΛΑΖΟΥΜΕ ΤΟ ρ ΑΠΟ $j(n)/n$ ΣΕ $(1 + j(n)/n)^k - 1$

ΠΟΣΟΝ Α

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ Α ΑΝΑ 5 ΜΗΝΕΣ ΣΕ ΛΟΓ/ΣΜΟ ΜΕ $j_{(12)} = 6\%$. ΓΙΝΟΝΤΑΙ 10 ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΕΙΣ

· ΠΟΙΑ Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ;



$$\hat{\rho} = \left(1+\frac{6\%}{12}\right)^{5} - 1 = 2{,}525\%$$

$$\text{ΠΑ} = A\ a(10,\ 2{,}525\%) = 8{,}741\ A$$

· ΠΟΙΑ Η ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ

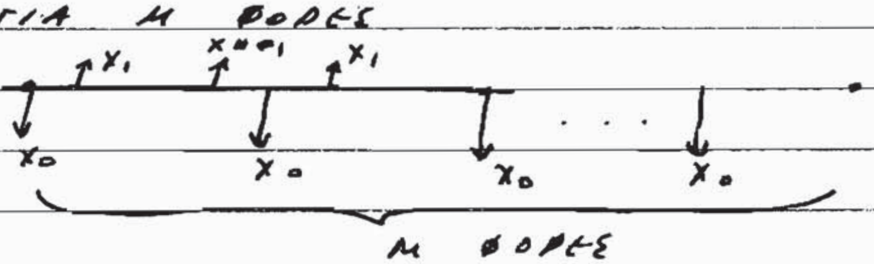
$$\text{ΤΑ}_N = \text{ΠΑ}_0 \cdot (1+\rho)^N \qquad \rho = j_{(12)}/12 = 0{,}5\%$$

$$N = 50$$

$$\text{ΤΑ}_{50} = 8{,}741\,A \cdot 1{,}005^{50} = 11{,}216$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΕΠΕΝΔΥΣΕΙΣ

ΕΣΤΩ ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ Ν ΓΙΑ Μ ΦΟΡΕΣ



Η ΠΑ ΕΙΝΑΙ $-X_0 + \frac{X_1}{(1+\rho)} + \dots + \frac{X_{N-1}}{(1+\rho)^{N-1}} - \frac{X_0}{(1+\rho)^N} + \frac{X_1}{(1+\rho)^{N+1}} + \dots$

$$- \frac{X_0}{(1+\rho)^{MN}} + \frac{X_1}{(1+\rho)^{MN+1}} + \dots + \frac{X_{N-1}}{(1+\rho)^{MN+N-1}}$$

$$= \text{ΚΠΑ}(X;\rho) + \frac{1}{(1+\rho)^N}\text{ΚΠΑ}(X,\rho) + \dots + \frac{1}{(1+\rho)^{N\cdot M}}\text{ΚΠΑ}(X,\rho)$$

ΟΠΟΥ $\text{ΚΠΑ}(X,\rho) = -X_0 + \frac{X_1}{1+\rho} + \dots + \frac{X_{N-1}}{(1+\rho)^{N-1}}$

ΑΡΑ $\text{ΠΑ} = \text{ΚΠΑ}(X,\rho)\left(1 + \frac{1}{(1+\rho)^N} + \dots + \frac{1}{(1+\rho)^{N\cdot M}}\right)$

$$= \text{ΚΠΑ}(X,\rho)\left(1 + a(M,\hat{\rho})\right) \qquad 1+\hat{\rho} = (1+\rho)^N$$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ</u>: ΕΧΕΙ ΚΑΠΟΙΟΣ ΤΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ (LICENCE) ΝΑ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΕΙ <u>ΜΙΑ ΦΟΡΑ</u> ΚΑΠΟΙΑ ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΜΕ $X_0 = -1000$ ΧΙΛ €, $X_1 = X_2 = \dots = X_{10} = 170$ χιλ. €. ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΓΟΡΑΣΕΙ ΤΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΝΑ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕΙ ΑΛΛΕΣ 4 ΦΟΡΕΣ ΤΗΝ ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΠΛΗΡΩΝΟΝΤΑΣ 30 ΧΙΛ €. ΘΑ ΑΓΟΡΑΣΕΙ ΤΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ $j_{(1)} = 10\%$;

Η ΕΠΕΝΔΥΣΗ ΕΧΕΙ ΚΠΑ = 44,5 ΧΙΛ. € (ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ). Η ΑΞΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΙΣΟΥΤΑΙ ΜΕ ΚΠΑ $\cdot\, a(4, \hat{\rho})$ ΟΠΟΥ $\hat{\rho} = 1{,}10^{11} - 1 = 1{,}853 = 185{,}3\%$ (!)

ΑΡΑ $a(4, 185{,}3\%) = \dfrac{1 - (1+1{,}853)^{-4}}{1{,}853} = 0{,}532$

ΕΠΟΜΕΝΩΣ Η ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΕΙΝΑΙ $44{,}5 \cdot 0{,}532 = 23{,}7$ ΧΙΛ. €

<u>ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ - ΕΠΙΛΟΓΗ ΜΗΧΑΝΗΜΑΤΩΝ</u>

- ΕΣΤΩ ΔΑΠΑΝΗ ΓΙΑ ΑΓΟΡΑ ΜΗΧ/ΤΟΣ ΠΟΣΟΥ K ΠΟΥ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΑΝΑ N ΕΤΗ

- Η ΠΑ ΓΙΑ M ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΕΙΝΑΙ

$$ΠΑ_M = K\left(1 + a(M, \hat{\rho})\right) \qquad \hat{\rho} = (1+\rho)^N - 1$$

ΑΝ $j_{(1)} = \rho$

- ΓΙΑ $M \to \infty$

$$ΠΑ_\infty = K\left(1 + \frac{1}{\hat{\rho}}\right) = K\left(1 + \frac{1}{(1+\rho)^N - 1}\right) = K\,\frac{(1+\rho)^N}{(1+\rho)^N - 1}$$

$$= K \frac{1}{1-(1+\rho)^{-N}} \qquad \left[\begin{aligned} \tilde{h} &= K \frac{\rho}{1-(1+\rho)^{-N}} \cdot \frac{1}{\rho} \\ &= K\, a^{-1}(N,\rho)/\rho \;!! \end{aligned} \right]$$

- ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΤΑΘΕΡΟ ΚΟΣΤΟΣ Λ ΕΤΗΣΙΟ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΕΙΝΑΙ ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ $\Lambda\, a(\infty,\rho) = \Lambda/\rho$

- ΤΟ ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ ΕΙΝΑΙ $\dfrac{K a^{-1}(N,\rho) + \Lambda}{\rho}$

- [ΓΙΑ $N=\infty$, ΑΙΩΝΙΑ ΜΗΧΑΝΗ ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΕΙΝΑΙ $K + \Lambda/\rho$ ΠΡΟΦΑΝΩΣ – ΚΑΙ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΚΑΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΤΥΠΟ ΜΕ $a^{-1}(\infty,\rho) = \rho$]

- Ο ΤΥΠΟΣ ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΕΦ/ΚΟΥ ΕΞΟΠΛΙΣΜΟΥ ΟΠΟΥ ΟΙ ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ, ΤΗΝ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΖΩΗΣ, ΤΑ ΛΕΙΤ. ΕΞΟΔΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΠΟΙΑ ΜΗΧΑΝΗ ΕΠΙΛΕΓΕΤΑΙ ΜΕ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΗΝ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΟΣΤΟΥΣ ∞ ΔΙΑΡΚΕΙΑΣ ΟΡΙΖΟΝΤΑ;

$\rho(1) = 3\%$

ΤΥΠΟΙ ΜΗΧΑΝΩΝ	ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΖΩΗΣ	ΚΟΣΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ 1000€	ΕΤΗΣΙΑ ΛΕΙΤ. ΕΞΟΔΑ 1000€	$a^{-1}(N,3\%)$	$Ka^{-1}+\Lambda$
Α	5	50	0,9	0,218	11,8
Β	7	70	1,0	0,161	12,3
Γ	10	90	1,2	0,117	11,7

- ΠΡΟΦΑΝΩΣ Η ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΓΙΝΕΙ ΜΕ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟ $Ka^{-1}+\Lambda$ (ΟΧΙ ΤΟ $\dfrac{Ka^{-1}+\Lambda}{\rho}$)

- ΠΕΡΙΘΩΡΙΑΚΑ ΚΑΛΥΤΕΡΟΣ ΕΙΝΑΙ Ο ΤΥΠΟΣ ΜΗΧΑΝΗΣ Γ !