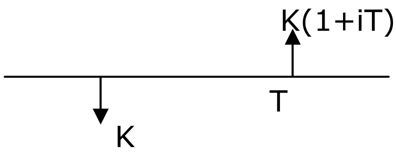
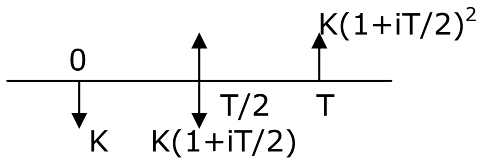
Σύνθετος Τόκος – Ανατοκισμός

Ιδανικό Ταμιευτήριο: Μας επιτρέπει να κλείσουμε ένα λογαριασμό κατά βούληση και να εισπράξουμε όλους τους αναλογούντες τόκους. Στην πράξη κάθε κλείσιμο έχει κόστος (διαδικαστικό) αλλά καμιά φορά και επιβαρύνσεις.

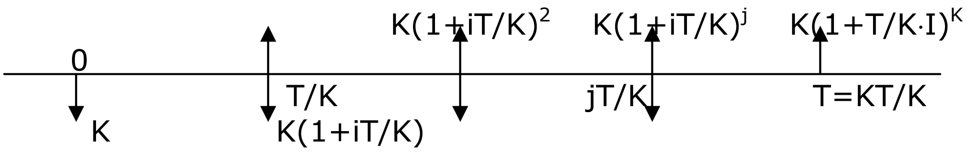
Σε ιδανικό ταμιευτήριο με επιτόκιο απλού τόκου i έστω ότι χειριζόμαστε κεφάλαιο K για χρόνο T. Έστω ότι κάνουμε χρονικά ισαπέχουσες κινήσεις.



1 κίνηση



2 κινήσεις



K κινήσεις

Με μια κίνηση, το τελικό υπόλοιπο είναι: $S^1(T) = K\left(1 + i\frac{T}{1}\right)^1$

Με δύο κινήσεις: $S^2(T) = K\left(1 + i\frac{T}{2}\right)^2$

Με K κινήσεις: $S^n(T) = K\left(1 + i\frac{T}{n}\right)^n$

Η συνάρτηση $S^n(T)$ για σταθερά K, T είναι ακολουθία ως προς τους ακέραιους n=1,2,…

Αποδεικνύεται ότι:
Η ακολουθία $S^n[=S^n(T)]$ είναι αύξουσα

Προφανώς: $S^2 = K\left(1 + iT + \frac{i^2T^2}{4}\right) > S^1 = K(1 + iT)$

Και $S^{2K}>S^K$. Γενικά η απόδειξη του ότι $S^{n+1}>S^n$ για αυθαίρετο n είναι δύσκολη.

Ισχύει ότι η ακολουθία S^n είναι φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει αριθμός μ με μ> S^K $\forall$ K - Και αυτή η απόδειξη είναι δύσκολη.

Άρα υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} S^n$. Αυτό σημαίνει ότι το κέρδος δεν απειρίζεται ακόμα και αν έχουμε απεριόριστα αυξανόμενη συχνότητα κινήσεων.

Αριθμητικό Παράδειγμα:

Για K=100 T=1 i=20% έχουμε

K	**S_K**
0	100,00
1	120,00
2	121,00
4	121,55
10	121,90
100	122,12
1000	122,14
∞	122,14

Συνεχής Ανατοκισμός

Από την άλγεβρα: το $S^n = K\left(1+\frac{iT}{n}\right)^n$ ανάγεται στη μελέτη του ορίου της γενικής ακολουθίας $q_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ που είναι αύξουσα και φραγμένη.

Ιδιότητα 1.

Υπάρχει αριθμός e τέτοιος ώστε $\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ Γιατί;

Θέτουμε $m = \frac{n}{x}$ (που ΔΕΝ είναι ακέραιος) οπότε:

$$q_n = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x$$

Αν θέσουμε $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$ τότε είναι:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x = \left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^x = e^x$$

(Λογω των ιδιοτήτων των Ορίων)

Υπολογισμός του e

Από το διωνυμικό θεώρημα

$$\left(1+x^m\right) = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j \qquad \text{με} \qquad \binom{m}{j} = \frac{m(m-1)\ldots(m-j+1)}{j!}$$

Άρα: $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{j=o}^{m}\frac{m(m-1)\ldots(m-j+1)}{j!\, m\ldots\ mm}$

$= \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m-1}\right)\ldots\left(1-\frac{j-1}{m}\right)$. Όμως για $m\to\infty$ ο j-όρος γίνεται $\frac{1}{j!}$

Άρα «εκτιμούμε» ότι:

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{j=\infty}^{\infty}\frac{1}{j!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots = \underbrace{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}}_{2,71806}+\ldots$$

άλλοι όροι…

Αριθμητικά αν αθροίσουμε για πάρα πολλούς όρους βρίσκουμε ότι e=2,718281828… Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος (δεν μπορεί να γραφει ως κλάσμα μ/ν με μ,ν ακέραιους), αλλά επιπλέον είναι και υπερβατικός, δηλαδή ΔΕΝ υπάρχει πολυώνυμο του οποίου το e να είναι ρίζα.

Με τον ίδιο τρόπο συνάγεται ότι:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \sum_{j=\infty}^{\infty}\frac{x^j}{j!} = \frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots$$

έτσι: $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{0{,}2}{m}\right)^m = \underbrace{1+0{,}2+\frac{0{,}2^2}{2}+\frac{0{,}2^3}{6}+\frac{0{,}2^4}{24}}_{1{,}2214}+\ldots \cong 1{,}2214$

άλλοι όροι…

Εναλλακτικά αυτό υπολογίζεται και ως:

$$\lim\left(1+\frac{0{,}2}{m}\right)^m = e^{0{,}2} = (1{,}718281828\ldots) = 1{,}2214$$

- Ονομάζουμε <u>Συνεχή Ανατοκισμό</u> μια διαδικασία τοποθέτησης που αποδίδει για χρόνο T ποσό $\mathbf{S=Ke^{iT}}$ για κεφάλαιο K και i παράμετρο – επιτοκίου συνεχούς ανατοκισμού.
- Προκύπτει από εκμετάλλευση ιδανικού ταμιευτηρίου.

Εφαρμογή 1: Μια τράπεζα δίνει επιτόκιο άλλου τόκου 10%. Αν κάνουμε κλείσιμο σε χρόνο λιγότερο από εξάμηνο το επιτόκιο μειώνεται στο 9%. Τι συμφέρει αν θέλω να τοποθετήσω κεφάλαια για (α): 1 εξάμηνο
(β): 1 έτος
(γ): 1,5 έτος

(α) για ένα εξάμηνο, μια κίνηση η απόδοση είναι 5%. Αν όμως κάνουμε πολύ συχνές κινήσεις θα έχουμε ποσό $K\left(1+9\%\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)^n$ για n μεγάλο ή

$Ke^{0{,}09\cdot\frac{1}{2}} = K1{,}0460$ δηλαδή απόδοση 4,6% (λιγότερη από 5%)

(β) για 1 έτος η αξία είναι $K\left(1+\frac{0{,}09}{n}\right)^n$

ή $Ke^{0{,}09} = K1{,}0942$ απόδοση πάλι μικρότερη από 10%.

(γ) Αν όμως εξετάζαμε περίοδο 1,5 ετών η συσσώρευσ στον απλό τόκο θα ήταν 15%, ενώ με συνεχή κεφαλαιοποίηση η τελική αξία θα είναι $Ke^{0,10 \cdot 1,5} = 1{,}1618K$ και απόδοση 16,18%.

Εφαρμογή 2: Αν η επιβάρυνση για κάθε κλείσιμο ήταν 0,10%, αναλύστε λογαριασμό απλού τόκου με επιτόκιο i=10%.

Για n κινήσεις σε χρόνο T το τελικό ποσό είναι $K\left[1+\frac{iT}{n}-0{,}1\%\right]^n$

Για n μεγάλο ο όρος $1+\frac{iT}{n}-0{,}1\%$ είναι μικρότερος του 1 και γίνεται τελικά $0{,}999^n$ που τείνει στο 0. Ενδεικτικά για i=10% και T=1 έχουμε:

n	**Απόδοση**	**n**	**Απόδοση**
1	9,9%	4	9,95%
2	10,04%	5	9,87%
3	10,02%		

Βέλτιστο για n=2