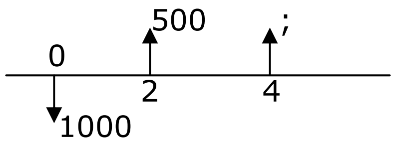
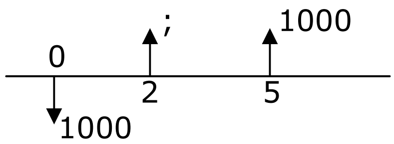
Παραδείγματα:

Παράδειγμα 1: $j_{(1)}$=10%. Τοποθετώ σε στιγμή κεφαλαιοποίησης 1.000 €, μετά από 2 χρόνια κάνω ανάληψη 500 €, κλείνω τον λογαριασμό σε άλλα 2 χρόνια. Ποιο το υπόλοιπο;



$S_4 = 1000 \cdot 1{,}10^4 - 5 \cdot 1{,}10^2 = 859{,}1$ €
Όντως σε 2 χρόνια έχω $S_2 = 1000 \cdot 1{,}10^2 - 500 = 710$ €
Στο 4 έχω $S_4 = 710 \cdot 1{,}10^2 = 710 \cdot 1{,}21 = 859{,}1$ €

Παράδειγμα 2: Σε ένα λογαριασμό $j_{(2)}$=10%. τοποθετώ 1.000 €. Ποια ανάληψη μπορώ να κάνω σε 2 έτη ώστε σε 5 έτη να κλείσω εισπράττοντας πάλι 1.000 €



Πρέπει $1000 \cdot 1{,}05^{10} - X \cdot 1{,}05^6 = 1000$ ή διαιρώντας δια $1{,}05^6$

$$1000 \cdot 1{,}05^4 - X - \frac{1000}{1{,}05^6} = 0 \Rightarrow X = 469{,}3€$$

Το παράδειγμα δείχνει το εξής: Αν σε ένα πρόβλημα κλείνουμε τον λογαριασμό σε χρόνο (κεφαλαιοποίηση) k θα είναι: $-X_K = S_K$ (X_K ύψος ανάληψης).
Και ο τύπος γράφεται αν επιπλέον $S_0 = X_0$

$$\sum_{j=0}^{K} X_j (1+p)^{K-j} = 0$$

που είναι ισοδύναμος με τον

$$\sum_{j=0}^{K} X_j (1+p)^{m-j} = 0 \quad \text{(όπου m αυθαίρετο)}$$

Ο όρος $(1+p)^{m-j}$ φέρνει το ποσό X_j «έντοκα» στο m - δίνει ένα ισοδύναμο στο m.
Η εξίσωση αυτή λέει ότι το άθροισμα των ισοδύναμων πρέπει να μηδενίζεται.

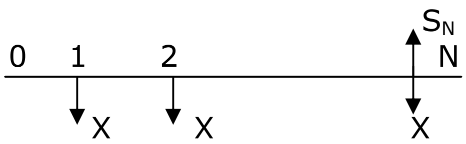
Στο προηγούμενο παράδειγμα διαλέγουμε χρόνο ισοδυναμίας τα 2 έτη.
Το αρχικό ποσό των 1000 € γίνεται $1000 \cdot 1{,}05^4$ (γιατί;),
ενώ το τελικό −1000 γίνεται $\frac{-1000}{1{,}05^6}$ (γιατί;).
Ενώ το άγνωστο ποσό παραμένει X.
Άρα η σχέση ισοδυναμίας γράφεται $1000 \cdot 1{,}05^4 - X - \frac{1000}{1{,}05^6} = 0$
που είναι ίδια όπως προηγουμένως.

<u>Σειρές Πληρωμών – ΣΠ</u>

Αναφερόμαστε σε ποσά $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ που ανακύπτουν σε ισαπέχουσες χρονικές στιγμές. Αν $X_K = X$ $\forall$ k έχουμε <u>ομοιόμορφη σειρά</u>.

<u>Τελική Αξία ΣΠ – Ομοιόμορφης</u>

Έστω ότι τα $X_K(=X)$ ανακύπτουν σε στιγμές κεφαλαιοποίησης λογαριασμού j(n) k=1,2,…,N. Τι ποσό θα έχει συσσωρευτεί στο N;



Με βάση την ισοδυναμία στο N είναι

$S_N = X(1+p)^{N-1} + X(1+p)^{N-2} + \ldots + X$

$= X\left[(1+p)^{N-1} + (1+p)^{N-2} + \ldots + 1\right]$

Και $p = \dfrac{j_{(n)}}{n}$

<u>Παρένθεση</u>: Άθροιση Όρων Γεωμετρικής Προόδου:

Έστω $Q_n = \alpha + \alpha\lambda + \ldots + \alpha\lambda^n$

Είναι $\lambda Q_n = \alpha\lambda + \alpha\lambda^2 + \ldots + \alpha\lambda^n + \alpha\lambda^{n+1}$

Άρα $Q_n - \lambda Q_n = \alpha - \alpha\lambda^{n-1}$

ή $\quad Qn = \dfrac{\alpha\lambda^{n+1} - a}{\lambda - 1}$

Αν $|\lambda|<1$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} Qn = \dfrac{a}{1-\lambda}$

για $|\lambda|\geq 1$ $\quad$ το όριο αποκλίνει.

Άρα: $S_N = X\dfrac{(1+p)^N - 1}{1+p-1} = X\dfrac{(1+p)^N - 1}{p}$

Ο συντελεστής του X γράφεται $S(N,\rho) = \dfrac{(1+p)^N - 1}{p}$

<u>Παράδειγμα:</u> Τοποθετούμε σε τέλος εξαμήνου ποσό 100 € σε λογαριασμό με j(2)=5%. Τι ποσό έχουμε μετά από 5 έτη;

Είναι $N=2\cdot 5=10$ $\quad p = \dfrac{j_{(n)}}{n} = \dfrac{5\%}{2} = 2{,}5\%$

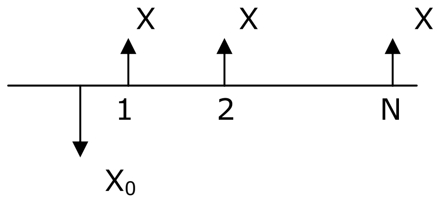
Άρα: $S = 100\cdot S(10, 2{,}5\%) = 100\dfrac{1{,}025^{10} - 1}{0{,}025} = 1120{,}3€$

Προφανώς: $S(N,\rho)\geq N$ με ισότητα για $\rho=0$

$S(N,\rho)$ αύξουσα συνάρτηση του ρ.

Παρούσα Αξία Ομοιόμορφης Σειράς

Θέλω να κάνω αναλήψεις ποσού Χ σε κεφαλαιοποιήσεις λογαριασμού με j(n) γνωστό Ν φορές. Τι ποσό πρέπει να καταθέσω αρχικά;



Με ισοδυναμία πάλι στο Ν

$X_0(1+\rho)^N-[X(1+\rho)^{N-1}+X(1+\rho)^{N-2}+\ldots+X]=0$

ή $\quad X_0(1+\rho)^N-XS(N_1\rho)=0$

ή $\quad X_0=X\dfrac{S(N,p)}{(1+p)^N}=X\cdot\dfrac{1-(1+p)^{-N}}{p}$

ο συντελεστής του Χ συμβολίζεται με $a(N,p)=\dfrac{1-(1+p)^{-N}}{p}$

Προφανώς: α(N, p) ≤ N με ισότητα αν ρ=0

α(N, p) φθίνουσα συνάρτηση του ρ

Αν ρ>0 τότε $\lim\limits_{N\to\infty} a(N,p)=a(\infty,\ p)=\dfrac{1}{p}$

Εφαρμογές

Εφαρμογή Α: Τι ποσό πρέπει να καταθέσω για να εισπράττω από λογαριασμό, 1000€ τον μήνα για 10 χρόνια με j(12)=5%;

Είναι Ν=10·12=120 $\qquad p=\dfrac{j_{(12)}}{12}=\dfrac{0{,}05}{12}=0{,}416\%$

Άρα X_0 = 1000 · α(120, 0,416%) = 1000 · 94,316 = 94.316 €

Για ∞ χρόνια το ποσό είναι

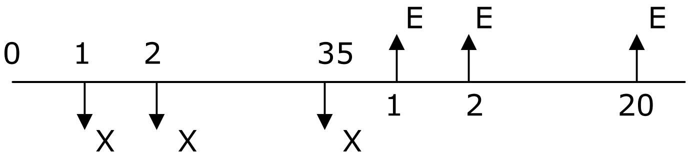
$X_0=1000\,a(\infty,0{,}416)=\dfrac{1000}{0{,}00416}=240.384{,}6€$

Εφαρμογή Β: Μια ομολογία δίνει τοκομερίδιο 1€ ανά μήνα. Ποια η αξία της αν j(12)=6%; Θεωρήστε απεριόριστη τη ζωή της.

Είναι: $p=\dfrac{6\%}{12}=0{,}005$ και η αξία της είναι ρ=1€·α(∞, 0,5%)=200 €

Εφαρμογή Γ: Μια ομολογία δίνει 1€ ετησίως. Ποια η αξία της; (απεριόριστη ζωή) ρ=5% και η αξία είναι 1€·α(∞, 0,05)=20 €.

Εφαρμογή Δ: Εργαζόμενος θέλει να δημιουργήσει ένα κεφάλαιο καταθέτοντας ποσό Χ ετησίως επί 35 έτη ώστε να μπορεί να εισπράττει ετησίως ποσό Ε επί 20 μετά την 35ετία (σύνταξη). Ποιο το Χ αν ισχύει $j_{(1)}$=5%;



Θεωρούμε στιγμή ισοδυναμίας το 35. Θα πρέπει η αξία (τελική) των εισφορών στο 35 να ισούται με την αξία των Ε στο 35, δηλαδή

$$X\,S(35{,}5\%) - E\alpha(20{,}5\%) = 0$$

ή $$X = \frac{E\,\alpha(20{,}5\%)}{S(35{,}5\%)} = 0{,}138E$$

Ερμηνεύετε το αποτέλεσμα.

Επαναλάβετε το πρόβλημα αλλά με μηνιαίες καταβολές και τέτοιο $j_{(12)}$ που να δίνει $i_{\pi\rho}(j_{(12)})=5\%$.

Απάντηση: Πάλι $X \approx 0{,}138E$