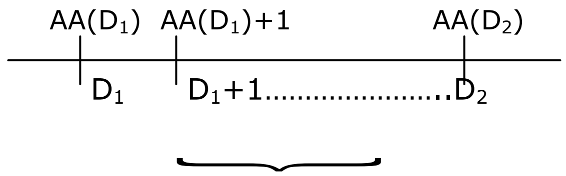
Λογαριασμοί Απλού Τόκου (Αλληλόχρεοι Τοκοφόροι Λογαριασμοί)

- Παραδοχές
  - Ελεύθερες καταθέσεις
  - Αναλήψεις μέχρι το υπόλοιπο, δηλαδή το αλγεβρικό άθροισμα προηγούμενων καταθέσεων, αναλήψεων – σε λογαριασμούς υπερανάληψης επιτρέπεται αρνητικό υπόλοιπο μέχρις ενός ορίου
  - Τοκοφορία: Οι τόκοι υπολογίζονται με συμφωνημένη μέθοδο αλλά ΔΕΝ αποδίδονται παρά μόνο σε συγκεκριμένες συμφωνημένες στιγμές. Αποδίδονται επίσης στο κλείσιμο λογαριασμού.
- Απλός τρόπος υπολογισμού τόκων (αρκετά κοντά στην πράξη).
  - Υπολογίζεται ημερήσιος απλός τόκος επί του υπολοίπου στην αρχή κάθε ημέρας.
  - Οι συνολικοί τόκοι μιας περιόδου [δηλαδή από την ημέρα απόδοσης τόκων μέχρι την επομένη (ή την ημέρα κλεισίματος)] είναι το άθροισμα των τόκων των αντίστοιχων ημερών.
- VALEUR: Η πρώτη τοκοφόρος ημέρα ενός ποσού που κατατίθεται (αποσύρεται)
  - Για καταθέσεις μετρητών Valeur είναι η πρώτη επόμενη εργάσιμος. Για αναλήψεις είναι η ίδια ημέρα.
- Υπολογισμός τοκοφόρων ημερών απλής πράξης: Κατάθεση την ημερομηνία D_1, ανάληψη και κλείσιμο την επόμενη ημερομηνία D_2: Σημαντικό πρακτικό πρόβλημα.
  - Λύνεται ως εξής: Θεωρούμε ότι υπάρχει καταγεγραμμένη μια συνάρτηση (σε υπολογιστή ή σε πίνακα) που δίνει για ημερομηνία D τον αύξοντα αριθμό της σε σχέση με πάγια ημερομηνία D_0. Συμβολίζουμε την συνάρτηση με AA(D). Είναι $AA(D_0)=1$ εξ' ορισμού.
    Συνήθως στα υπολ. Συστήματα (Excel) D_0=1/1/1900
    οπότε: AA(2/1/1900)=2 AA(1/2/1900)=32
- Οι ημέρες μεταξύ D_1 και D_2 είναι προφανώς ίσες με $AA(D_2)-AA(D_1)$ χωρίς να μετράμε την ημέρα D_1.



τοκοφόρες = $AA(D_2)-AA(D_1)$

Φυσικά η συμβατική D_0 δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς.

Παράδειγμα:
Στο Excel η συνάρτηση αυτή είναι η Date (Year, Month, Day)
π.χ. Date (1900; 1; 1) = 1
Date (2000; 5; 3) = 36649
Date (2000; 10; 15) = 368141
Άρα από 3/5/2000 έως 15/10/2000 μεσολάβησαν 36814 – 36649 = 165 ημέρες

Παλαιότερα οι υπολογισμοί γίνονταν με βάση τον πίνακα ημερών της επόμενης σελίδας, όπου δίνεται ο αύξων αριθμός κάθε ημέρας ενός έτους. Έτσι η 3/5/2000 είναι η $123^η$ ημέρα ενώ η 15/10/2000 είναι η $288^η$ ημέρα, οπότε οι ημέρες που μεσολάβησαν ήταν 288 – 123 = 165
Προσοχή: Αν το 2000 ήταν δίσεκτο θα έπρεπε να προσθέσουμε 1 ημέρα.

Πίνακας Ημερών

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Αν ένα ποσό (υπόλοιπο) μείνει σταθερό d ημέρες, θα έχει τόκους ίσους με $\frac{iKd}{360}$ που είναι και το άθροισμα ημερήσιων τόκων $\frac{i \cdot K \cdot 1}{360}$ για d ημέρες.

Για τραπεζικούς λογαριασμούς ο τύπος γράφεται πολλές φορές ως $\frac{Kd}{\left(\frac{360}{i}\right)}$.

Ο όρος Kd ονομάζεται *τοκάριθμος.*

Ο όρος D=$\left(\frac{360}{i}\right)$ ονομάζεται *διαιρέτης.*

Παράδειγμα:
K = 1000 € d = 10 ημέρες i = 3% τοκάριθμος = 10.000

$\textit{διαιρέτης} = \frac{360}{0{,}03} = 12.000$ άρα ο τόκος είναι $\frac{10.000}{12.000} = 0{,}667€$

Αν ένας λογαριασμός είχε υπόλοιπα K_j για d_j ημέρες, ο συνολικός τόκος θα ήταν $I = \frac{\left(\sum_{j=1}^{M} K_j d_j\right)}{D}$ δηλαδή το άθροισμα των τοκάριθμων δια του διαιρέτη.

Παράδειγμα Υπολογισμού Λογαριασμού:

Έστω βιβλιάριο με τις εξής κινήσεις

Ημερομηνία	Κίνηση	Υπόλοιπο	Ημέρες	Τοκάριθμος
1/1	100	100	30	3.000
31/1	100	200	15	3.000
15/2	-50	150	30	4.500
17/3	-50	100	60	6.000
16/5	150	250	45	11.250
30/6	Τόκοι;			

Αν ο λογαριασμός ανοίγει την 1/1 και οι τόκοι υπολογίζονται στις 30/6 ποιο είναι το ύψος των τόκων από 1/1 έως 30/6; Επιτόκιο 5%.

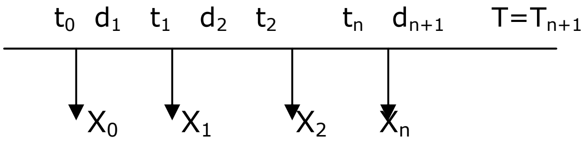
- Σε ένα βιβλιάριο αναφέρονται οι κινήσεις, οι ημερομηνίες και το υπόλοιπο. Οι τοκοφόρες ημέρες και οι τοκάριθμοι είναι εσωτερικοί υπολογισμοί της τράπεζας.
- Το άθροισμα των τοκάριθμων είναι 27.750 ενώ ο διαιρέτης $D = \frac{360}{0.05} = 7.200$ άρα $I = \frac{27.750}{7.200} = 3{,}854$.
- Αν το επιτόκιο ήταν 5% μέχρι τις 17/3 και 10% εφεξής, οι υπολογισμοί θα ήταν προφανώς οι εξής: $D_{5\%}$ = 7.200 $D_{10\%}$ = 3.600 ενώ από τους τοκάριθμους 10.500 ήταν πριν τις 17/3 και οι υπόλοιποι (27.750-10.500)=17.250 μετά την 17/3. Άρα $I = \frac{10.500}{7.200} + \frac{17.250}{3.600} = 6{,}25$.
- Αντίστοιχη τεχνική μπορεί να εφαρμοστεί σε λογαριασμούς υπερανάληψης, όπου οι αρνητικοί τοκάριθμοι αντιστοιχούν σε διαφορετικό επιτόκιο (δανεισμού).

Παράδειγμα:
Ένας λογαριασμός έχει επιτόκιο κατάθεσης 5% και υπερανάληψης 10%. Ποιοι είναι οι τόκοι στις παρακάτω κινήσεις; Ημερομηνία Τοκοφορίας 30/6.

Ημερομηνία	Κίνηση	Υπόλοιπο	Ημέρες	Τοκάριθμοι
1/1	100	100	60	6.000
1/3	-200	-100	60	-6.000
1/5	200	100	60	6.000
30/6	Τόκοι;			

Είναι: $D_{5\%}$=7.200, $D_{10\%}$=3.600, Θετικοί Τόκοι P=12.000, Αρνητικοί Τόκοι P=-6000 και $I = \frac{12.000}{7.200} - \frac{6.000}{3.600} = 0$ μηδενικοί τόκοι!

Η παραπάνω μέθοδος δεν εκφράζει τόκους κατ’ ευθείαν από κινήσεις, αλλά είναι ιδιαίτερα εύχρηστη, καθώς προσαρμόζεται σε αλλαγές επιτοκίων, αρνητικούς τοκάριθμους κ.λ.π.
Μια κατ’ ευθείαν μέθοδος υπολογισμού προκύπτει ως εξής:



Υπολογισμοί Τόκων στο $t_{n+1}=T$

Τοκάριθμοι $X_0d_1 + (X_0+\chi_1)d_2 + (X_0+X_1+X_2)d_3 + \ldots\ldots + (X_0+\ldots X_n)d_{n+1}$

Υπόλοιπο στο t_0 Υπόλοιπο στο t_1 Υπόλοιπο στο t_2

$=X_0(d_1+\ldots+d_{n+1})+X_1(d_2+\ldots+d_{n+1})+\ldots+X_nd_{n+1}$
$=X_0(T-t_0)+X_1(T-t_1)+\ldots+X_k(T-t_k)+\ldots+X_n(T-t_n)$

και οι τόκοι είναι: $I=\sum_{j=0}^{n} iX_j(T-t_j)$

Το κεφάλαιο συν τους τόκους, εφόσον το κεφάλαιο είναι απλώς $K=\sum_{j=0}^{n} X_j$ και

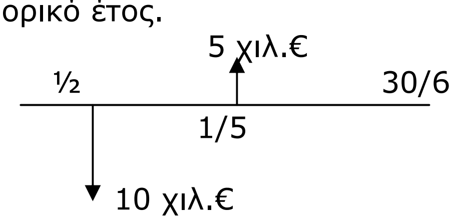
άρα: $S=I+K=\sum_{j=0}^{n} X_j\left[1+i\left(T-t_j\right)\right]$ ευθεία μέθοδος

Ερμηνεία του τύπου: Κάθε ποσό X_j που προκύπτει στον χρόνο t_j τοκίζεται με απλό τόκο μέχρι τον χρόνο υπολογισμού T, και τα τοκισμένα ποσά αθροίζονται.

<u>Εφαρμογές</u>

<u>Εφαρμογές</u>

1) Καταθέτω την 1/2/03 10.000€ και κάνω ανάληψη 5.000€ την 1/5/03. Τι ποσό τόκων θα εισπράξω την 30/6;. Επιτόκιο 10%, άνοιγμα λογαριασμών την 1/2/03, εμπορικό έτος.



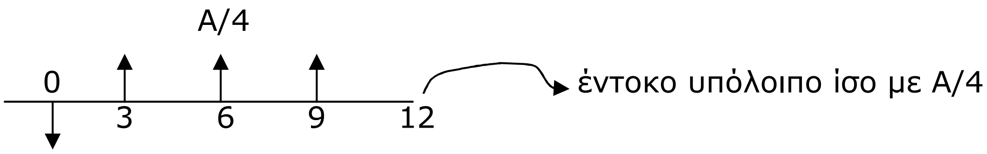
$$S_{30/6}=10\left(1+\frac{5}{12}\cdot 10\%\right)-5\left(1+\frac{2}{12}\cdot 10\%\right)=5{,}333\text{χιλ.€}$$

Εναλλακτικά, το υπόλοιπο των 10.000€ για 3 μήνες αποδίδει τόκο $10 \cdot 0{,}10 \cdot \dfrac{3}{12} = 0{,}25\chi\iota\lambda.€$, ενώ το υπόλοιπο των 5.000 τόκους $5 \cdot 0{,}10 \cdot \dfrac{2}{12} = 0{,}083\chi\iota\lambda.€$, δηλαδή συνολικά 0,250+0,083=0,333

Εφαρμογή 2) Μια οφειλή ύψους Α στην εφορία μπορεί να εξοφληθεί αμέσως οπότε θα δοθεί έκπτωση 5%. Αν δεν εξοφληθεί αμέσως, γίνεται διακανονισμός για πληρωμή σε 4 ίσες τριμηνιαίες δόσεις χωρίς έκπτωση. Τι συμφέρει να κάνουμε αν η εναλλακτική χρήση κεφαλαίου είναι λογαριασμός απλού τόκου με επιτόκιο i=12% πρώτη δόση μετά από 3 μήνες.

Έστω ότι τοποθετούμε ποσό Χ στον λογαριασμό έτσι ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε αναλήψεις ισόποσες με τις δόσεις που οφείλουμε στον διακανονισμό. Αν το Χ είναι μικρότερο από το ποσό που θα πληρώσουμε με άμεση εξόφληση τότε συμφέρει η πληρωμή με δόσεις.

Για να υπολογίσουμε το Χ θεωρούμε λογαριασμό που θα έχει (έντοκο) υπόλοιπο στο κλείσιμο ίσο με την τελευταία δόση.

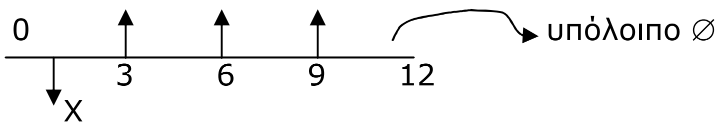


άρα

$$\Upsilon\pi o\lambda_{\sigma\tau o 12} = \mathrm{X}\left(1 + 12\% \cdot \frac{12}{12}\right) = \frac{\mathrm{A}}{4}\left(1 + 12\% \cdot \frac{9}{12}\right) - \frac{\mathrm{A}}{4}\left(1 + 12\% \cdot \frac{6}{12}\right) - \frac{\mathrm{A}}{4}\left(1 + 12\% \cdot \frac{3}{12}\right) = \frac{\mathrm{A}}{4}$$

<u>Εναλλακτικά:</u> (όχι απόλυτα σωστά, γιατί[1];)

Θα μπορούσαμε να θέσουμε την συνθήκη το υπόλοιπο στο κλείσιμο να είναι μηδενικό αφού γίνει και η τελευταία ανάληψη Α/4 στο χρόνο 12.



Η εξίσωση που θα προκύψει είναι η ίδια.
Λύνοντας την σχέση παραπάνω έχουμε:

$$1{,}2X = \frac{A}{4}\left[4 + \frac{12\%}{12}(9 + 6 + 3 + 0)\right]$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}\frac{1}{1{,}12} \cdot \frac{1}{4}\left(4 + 12\% \cdot \frac{18}{12}\right)$$

$$X = 93{,}3\% A$$

[1] Δεν είναι απόλυτα σωστό γιατί πρώτα κλείνει ο λογαριασμός και μετά προσμετρώνται οι τόκοι. Βέβαια αυτή είναι λεπτομέρεια καθώς το ποσό είσπραξης – τόκων + υπολοίπου είναι το ίδιο.

άρα αφού η άμεση εξόφληση απαιτεί 100-6% του Α ή 94%Α, συμφέρει η εξόφληση με δόσεις και η εκμετάλλευση του ποσού άμεσης πληρωμής.

Εναλλακτική λύση: Αν είχα τοποθετήσει το 94% του Α (0,94 Α) σε λογαριασμό, έκανα 3 αναλήψεις ύψους $\frac{A}{4}$, το έντοκο υπόλοιπο θα είναι στον μήνα 12:

$$S_{12} = 0{,}94A(1+12\%) - 0{,}25A\left(1+12\%\cdot\frac{9}{12}\right) - 0{,}25A\left(1+12\%\cdot\frac{6}{12}\right) - 0{,}25A\left(1+12\%\cdot\frac{3}{12}\right)$$

$$= A\left[0{,}94\cdot 1{,}12 - 0{,}25\{1{,}09+1{,}06+1{,}03\}\right] = 0{,}2578\mathrm{A}$$

Από το υπόλοιπο, πληρώνω την τελευταία δόση ύψους 0,25Α και μου περισσεύουν χρήματα 0,0078Α>0. Άρα συμφέρει η χρησιμοποίηση των χρημάτων σε εναλλακτικές τοποθετήσεις.

Εφαρμογή 3) Παράδοξο ενός – πολλών λογαριασμών

Οφείλω 10 εκατ.€ σε 6 μήνες και 5 εκατ.€ σε 12 μήνες. Σκοπεύω να καλύψω τις υποχρεώσεις με σημερινή τοποθέτηση σε λογαριασμό απλού τόκου i=24%. Τι ποσό χρειάζομαι;

Προφανώς $S_{12}=5=X1{,}24-10\cdot 1{,}12$

Άρα X=13,065 εκατ.€

Αλλά αν είχα ανοίξει ένα λογαριασμό για να καλύψω τα 10 εκατ.€ θα χρειαζόταν ποσό X_1 με $X_1\cdot 1{,}12=10$ (Γιατί;) ή 8,929 εκατ.€

Αντίστοιχα για τα 5 εκατ.€, ποσό X_1 με X_2 1,24=5 ή $4{,}032=X_2$

Συνολικά X1+X2=12,961 εκατ.€ δηλαδή λιγότερο κατά 104 χιλ.€!

Ερμηνεία: Πολλοί λογαριασμοί είναι συμφερώτεροι καθώς έχουμε ταχύτερη είσπραξη τόκων. Αλλά υπάρχουν και μειονεκτήματα. Ποια;