Σύμβαση Εμπορικού Υπολογισμού

1 έτος = 12 μήνες των 30 ημερών = 360 ημέρες
π.χ. έστω, K=100 , T= από 1/1 έως 1/3 και i= 12%

$$T = 12\% \cdot 100 \cdot \frac{2}{12} = 2,0 \text{ χιλ.}$$

Με ακριβή τρόπο θα ήταν: $I = 12\% \cdot 100 \cdot \frac{59}{365} = 1.940$ €

Δυσκολία: Υπολογισμός ημερών για συγκεκριμένες ημερομηνίες.

Υπολογισμός ημερών:
Πόσες ημέρες μεσολάβησαν μεταξύ ημερομηνιών D_1 και D_2; Συμβατικά δεν μετράει η πρώτη ημέρα αλλά μετρά η τελευταία.
Έστω AA(D) ο αύξων αριθμός της ημέρας ως προς (σταθερή) βάση
(βλ. διάγραμμα)

$AA(D_1)=AA$ $\quad AA+1 \quad$ $AA+n=AA(D_2)$

D_1 $\quad D_1+1 \quad$ D_2

Είναι $AA(D_2) - AA(D_1) = n$
Υλοποίηση σε Excel: ενσωματωμένη συνάρτηση **Date (YR, MO, DAY)** επιστρέφει τον αύξοντα αριθμό της ημερομηνίας DAY/MO/YR με 1 την 1/1/1900

π.χ.

	A	B	C	D
1	1	3	1999	•
2	5	8	2003	•
3	Ημέρες που μεσολάβησαν			1618

=Date (C1;B1;A1)

=Date (C2;B2;A2)

=D2-D1

Άσκηση: Πως γίνεται ο υπολογισμός των ημερών στο εμπορικό σύστημα στο Excel;

Τραπεζική μέθοδος: (Banker's Rule)
- Ακριβής υπολογισμός ημερών
- Έτος με 360 ημέρες

Εφεξής θα χρησιμοποιούμε για απλούστευση την εμπορική μέθοδο.

Εφαρμογές:
Α. Τράπεζα Α χρησιμοποιεί την ακριβή μέθοδο με επιτόκιο i_A ενώ η τράπεζα Ε την τραπεζική μέθοδο με επιτόκιο i_E. Ποια τράπεζα προτιμούν οι καταθέτες;

Είναι $I_A = i_A K \frac{d}{365}$ ενώ $I_E = i_E K \frac{d}{360}$

Για κατάθεση d ημερών (ίδια και στις δύο) ποσού K.
Για να προτιμάται η Α πρέπει

$I_A > I_E$ ή $i_A K \frac{d}{365} > i_E K \frac{d}{360}$ ή $i_A > i_E \left(1 + \frac{5}{360}\right) \approx i_E (1 + 1.5\%)$

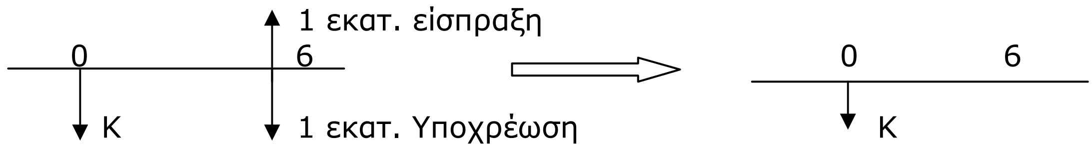
Άρα αν i_E=10% η τράπεζα Α πρέπει να δώσει επιτόκια τουλάχιστον $10\ (1+\frac{1,5}{100}) \approx 10,15\%$.

B. Φορολόγηση τόκων
Με την πληρωμή τόκων Ι το δημόσιο παρακρατά Φ=f · I (f:σταθερός συντελεστής)
Άρα $I_{καθαρός}$ = Ι – Φ = (1-f) Ι = (1-f) I=i ΚΤ
όπου $i_{καθ.}$ = i (1-f)
έχουμε $I_{καθ.}$ = $i_{καθ.}$ · Κ · Τ
Αν π.χ. i=5% και f=15% τότε
$i_{καθ.}$=5%(1-0,15)=4,25%

<u>Τύποι Απλού Τόκου</u>
S = K + I = K + iKT = K · [1 + iT]
Λύνοντας τον παραπάνω έχουμε τον τύπο <u>αρχικής αξίας</u>
$K = \frac{S}{1+iT}$ (γνωστός και ως τύπος αναγωγής σε παρούσα αξία)
καθώς και τον
$i = \frac{1}{T}\frac{S-K}{K}$ (τύπος απόδοσης)

<u>Αναγωγή σε παρούσα αξία:</u> Χρήσιμη έννοια
Έχω υποχρέωση 1 εκατ.€ σε 6 μήνες. Μπορώ να τοποθετώ με Απλό Τόκο προς 10%. Τι ποσό χρειάζομαι *τώρα* για να αντιμετωπίσω την μελλοντική υποχρέωση;

Τοποθετώ ποσό Κ ώστε έντοκα να γίνει 1 εκατ. Σε 6 μήνες.



Άρα μετέτρεψα την μελλοντική σε σημερινή υποχρέωση ύψους
$K = \frac{1.000.000}{1+10\%\ \frac{6}{12}} = \frac{1.000.000}{1,05} = 952.381€$ (<1.000.000)
Εξοικονομήσαμε περίπου τόκους 6 μηνών κεφαλαίου 1 εκατ. Για την ακρίβεια κάτι λιγότερο. Πόσο λιγότερο;

<u>Τύπος προσέγγισης:</u>
Εξετάζουμε την παράσταση $f(x) = \frac{1}{1+x}$ |x|<<1
Είναι (1+x)(1-x)=1-x^2
Διαιρώντας με 1+x και αναδιατάσσοντας
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x} \approx 1 - x$ αφού x^2<<|x|
Για x=iT $\frac{1}{1+iT} \approx 1 - iT$

Καλύτερη προσέγγιση:

αντικαθιστούμε $\frac{1}{1}+x$ στο $\frac{x^2}{1+x}$ και έχουμε: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{1+x} \ldots$

γενικά: $\frac{1}{1+x} = \lim_{N \to 00} \sum_{j=0}^{N} (-1)^j x^j$ για $|x|<1$

<u>Εφαρμογή υφαίρεσης – τύπων αρχικής αξίας</u>

Zero Coupon Bonds – Γραμμάτια (Δημοσίου)
Είναι «τίτλος» χαρακτηριστικών:

- Ονομαστική αξία S
- Διάρκεια T
- Απόδοση i
- Τιμή διάθεσης $P = \frac{S}{1+iT}$

π.χ. γραμμάτιο 10.000 εξαμηνιαίο, απόδοση 5% τιμή διάθεσης;

$$P = \frac{10}{1 + 5\% \quad \frac{1}{2}} = \frac{10}{1 + 2{,}5\%} = 9{,}7561$$

Quotations: Δίνονται για S=100

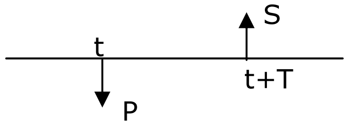
$$P = \frac{100}{1{,}025} = 97{,}561$$

Γρήγορος υπολογισμός

Αν x μικρό τότε: $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$

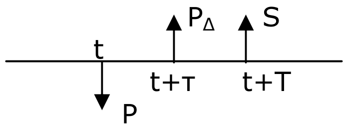
<u>Δευτερογενής αγορά ομολόγων</u>

Στα ομόλογα ΔΕΝ υπάρχει εγγύηση για επαναγορά πριν τη λήξη τους. Έτσι έχει οργανωθεί αγορά αγοραπωλησιών για ομόλογα διαφόρων λήξεων. (Δευτερογενής)
Η απόδοση μιας πράξης αγοραπωλησίας θα εξαρτηθεί βέβαια από την τιμή πώλησής του στην δευτερογενή αγορά.
Στην αρχή του το γραμμάτιο έχει απόδοση απλού τόκου όσο και η ονομαστική του:



Γιατί; $p = \frac{S}{1+iT}$ άρα $i_{αποδ} = \frac{1}{T}(\frac{S}{P} - 1) = \frac{1}{T}(\frac{S}{\frac{S}{1+iT}} - 1) = i$

Σε μεταπώληση αργότερα, ο υπολογισμός είναι:



Είναι $\underset{t\to t+\tau}{i_{\alpha\pi\acute{o}\delta o\sigma\eta}} = \frac{1}{\tau}\ (\frac{P_\Delta}{P} - 1)$

Όπου P_Δ: τιμή πώλησης σε δευτερογενή.

Εφόσον $P = \frac{S}{1+iT}$ ο τύπος γράφεται: $i_{\alpha\pi\acute{o}\delta.} = \frac{1}{\tau}\ [\ \frac{P_\Delta(1+iT)}{S}\ -1]$

Αν τώρα ορίσουμε ένα $\hat{i}$ τέτοιο ώστε $P_\Delta = \frac{S}{1+\hat{\iota}(T-\tau)}$ ο τύπος γίνεται

$$i_{\alpha\pi o\delta.} = \frac{1}{\tau}\left[\frac{1+iT}{1+\hat{i}(T-t)} - 1\right]$$

Στις οικονομικές στήλες αναφέρονται συχνά οι τιμές πωλήσεως γραμματίων διαφόρων λήξεων καθώς και τα επιτόκια που συνεπάγονται.

Παράδειγμα:
Την 1/12/03 τον εξής πίνακα τιμών ομολόγων Zero Coupon (Ονομαστική S=100)

1/12/03	
ΛΗΞΗ	ΤΙΜΗ
31/12/03	99,01
01/01/04	98,20
01/02/04	97,09
01/05/04	95,24

Αυτό συνεπάγεται τα εξής επιτόκια

ΔΙΑΡΚΕΙΑ (μήνες)	ΕΠΙΤΟΚΙΟ %
1	12,00
2	11,00
3	11,94
6	10,00

<u>*Εφαρμογή:*</u> Ετήσιο γραμμάτιο απόδοσης 10% πωλείται μετά 3 μήνες προς 92,50. Αν ο επενδυτής μπορούσε να είχε τοποθετήσει τα χρήματά του σε τραπεζικό λογαριασμό ελεύθερης ανάληψης και επιτοκίου 8%, κέρδισε ή έχασε από την πράξη του γραμματίου;

Α' Λύση: (Εστιάζουμε στην κατάθεση)

Το γραμμάτιο αγοράστηκε προς $\frac{100}{1+10\%1}=90{,}909$. Αν τα χρήματα είχαν τοποθετηθεί στην κατάθεση, σε 3 μήνες θα είχαν γίνει $90{,}909\,(1+\frac{3}{12}8\%)\ =92{,}727$ που είναι ανώτερο των 92,50 που εισπράξαμε από το γραμμάτιο.

Β' Λύση: (Εστιάζουμε στο γραμμάτιο)
Για το γραμμάτιο δώσαμε 90,909 και εισπράξαμε 92,50 σε 3 μήνες, έχοντας απόδοση $i=\frac{1}{\frac{3}{12}}\ (\frac{92{,}500}{90{,}909}\ -1)=7{,}00\%$ που είναι λιγότερο από ότι θα είχαμε από την τράπεζα (8%)

Άλλη μορφή ίδιας άσκησης:
Σε 4 μήνες από αγορά ετήσιου γραμματίου απόδοσης 8% τα επιτόκια πέφτουν στο 4%. Αν ρευστοποιήσουμε το γραμμάτιο, τι απόδοση είχαμε στο τετράμηνο;

Τιμή αγοράς: $\frac{100}{1+8\%}=92{,}593$

Τιμή πώλησης (Προσοχή!): $\frac{100}{1+4\%\frac{8}{12}}=97{,}403$

Άρα η απόδοση είναι: $i_{αποδ.}=\frac{1}{\frac{4}{12}}(\frac{97{,}403}{92{,}593}-1)\ =15{,}584\%$

Αυτό δείχνει τα δυνητικά κέρδη από αλλαγές στα επιτόκια!

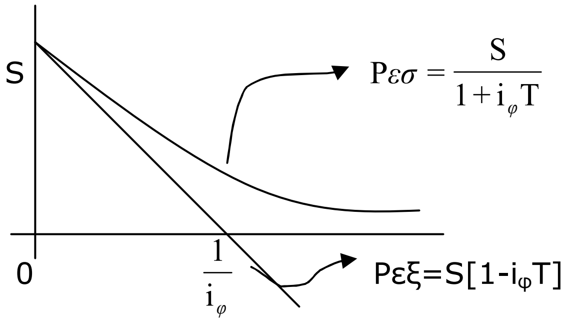
<u>Προεξόφληση Ιδιωτικών Γραμματίων – Εξωτερική Προεξόφληση</u>

Για λόγους απλούστευσης οι τράπεζες προεξοφλούν (αγοράζουν) γραμμάτια σε τιμή που προσδιορίζεται ως εξής: Έστω γραμμάτιο που είναι υπόσχεση πληρωμής ποσού S μετά χρόνο T.

Ορίζεται από την τράπεζα <u>Συντελεστής Προεξόφλησης</u> $i_φ$ και υπολογίζεται το <u>Προεξόφλημα</u> $E=i_φST$. Το ποσό εξαγοράς του γραμματίου είναι $P=S-E$, δηλαδή $P=S[1-i_φT]$.

Για μικρά T ($i_φT$) ο τύπος δείχνει αντίστοιχα αποτελέσματα με τον $P\approx\frac{S}{1+i_φT}$

Για μεγάλα T υπάρχει απόκλιση. (βλ. σχήμα)



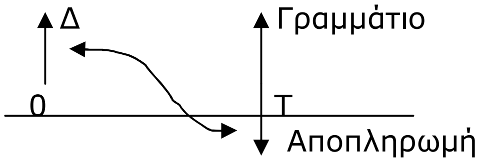
Ισχύει πάντα $P_{\varepsilon\xi} \leq P_{\varepsilon\xi}$ (Γιατί;)

Και ο τύπος $P_{\varepsilon\xi} = S[1-i_\varphi T]$ έχει νόημα μόνο για $T < \dfrac{1}{i_\varphi}$

<u>Ισοδυναμία Δανεισμού – Προεξόφλησης</u>

Μια συνηθισμένη διαδικασία είναι μια τράπεζα να χορηγεί δάνεια με εγγύηση τα γραμμάτια. Αν το τελικό ποσό του γραμματίου είναι S σε χρόνο T και το επιτόκιο δανεισμού i_Δ, τότε η τράπεζα δανείζει ποσό τέτοιο ώστε η αποπληρωμή του δανείου να πραγματοποιείται με τα έσοδα του γραμματίου στο T.

Άρα το ποσό του δανείου Δ είναι τόσο ώστε $\Delta\cdot(1+i_\Delta T)=S$ ή $\Delta = \dfrac{S}{1+i_\Delta T}$



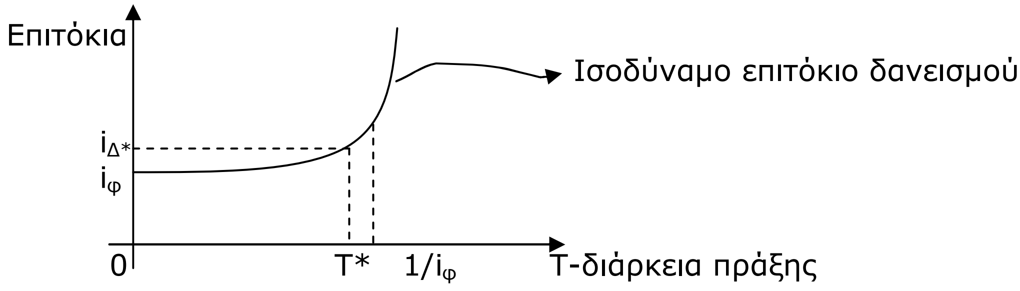
Καμιά φορά δανείζει ποσό ώστε το S να υπερκαλύπτει (π.χ. κατά 50%) την αποπληρωμή τότε $\Delta(1+i_\Delta T)\cdot(1+50\%)=S$ και φυσικά $\Delta = \dfrac{S}{1{,}50 \quad (1+i_\Delta T)}$

Ποιο επιτόκιο δανεισμού i_Δ και προεξόφλησης i_φ κάνουν αδιάφορη την απόφαση του επενδυτή μεταξύ δανεισμού – προεξόφλησης.

Πρέπει: $\Delta = P \Rightarrow \dfrac{S}{1+i_\Delta T} = S[1-i_\varphi T]$

Ή $i_\Delta = \dfrac{1}{T}\left(\dfrac{1}{1-i_\varphi T} - 1\right) = \dfrac{i_\varphi}{1-i_\varphi T}$ και προτιμάται ο δανεισμός αν $i_\Delta < \dfrac{i_\varphi}{1-i_\varphi T}$

Διαγραμματικά:



Αν η τράπεζα Ε προτείνει προεξόφληση με συντελεστή i_φ ενώ μια άλλη τράπεζα Α προτείνει δανεισμό με επιτόκιο $i_{\Delta *}$, προτιμάμε δανεισμό αν

$$i_\Delta^* < \frac{i_\varphi}{1 - i_\varphi T}$$

για δεδομένα $i_{\Delta *}$, i_φ αυτά εξισώνονται αν $T = T^* = \frac{1}{i_\varphi} - \frac{1}{i_\Delta}$

Για γραμμάτια διάρκειας μικρότερης του T^* προτιμάμε προεξόφληση, διαφορετικά δανεισμό.

<u>Παράδειγμα:</u>
Γραμμάτιο 100 χιλ.€, διάρκειας 6 μηνών, προεξοφλείται με συντελεστή 20% σε σχέση με δανεισμό προς 23% κάναμε καλά; Τι θα κάναμε αν είχαμε γραμμάτιο διάρκειας 9 μηνών; Αν το επιτόκιο δαν. ήταν 22%;

$E = 100 - 20\%\frac{1}{2} = 10$ άρα P=100-10=90.

Ενώ $\Delta = \dfrac{100}{1 + 23\%\frac{1}{2}} = 89{,}7$, άρα καλά κάναμε.

Το ισοδύναμο επιτόκιο δανεισμού 6 μηνών είναι $i_\Delta = \dfrac{0{,}20}{1 - 0{,}20\frac{1}{2}} = 22{,}22\%$, οπότε επιτόκιο δανεισμού 20% θα ήταν προτιμότερο.

Εφόσον $T^* = \frac{1}{20\%} - \frac{1}{23\%} \approx 0{,}65$ ή 7,8 μήνες.

Προφανώς Τ=8 μήνες σημαίνει ότι πρέπει να προτιμήσουμε δανεισμό. Όντως το ποσό δανεισμού είναι $\Delta = \dfrac{100}{1 + 23\%\frac{8}{12}} = 86{,}705$

ενώ η προεξόφληση δίνει $\Pi = 100\ (\ 1 - 20\%\frac{8}{12})\ = 86{,}667$