

# ΕΡΓΑΣΙΑ 1

1. Ορίζουμε την σχέση  $\equiv_3$  στο σύνολο των ακέραιων  $\mathbb{Z}$ , ως εξής:  $(a, b) \in \equiv_3$  εάν και μόνον εάν η διαφορά  $a - b$  είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή εάν  $a - b = 3k$  για  $k \in \mathbb{Z}$ .

(α') Να αποδειχθεί ότι η  $\equiv_3$  είναι σχέση ισοδυναμίας.

(β') Να βρεθεί το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμιών στοιχείων του  $\mathbb{Z}$  ως προς την  $\equiv_3$ .

2. Είναι ο προτασιακός τύπος  $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$  αντίφαση;
3. Έστω σχέση  $S$ , η οποία ορίζεται σε ένα σύνολο  $A$  και η οποία είναι αυτοπαθής και μεταβατική. Έστω σχέση  $R$  η οποία επίσης ορίζεται στο  $A$  ως εξής:

$$(x, y) \in R \text{ εάν και μόνον εάν } (x, y) \in S \text{ και } (y, x) \in S.$$

Να αποδειχθεί ότι η  $R$  είναι σχέση ισοδυναμίας.

4. Έστω  $P_1, P_2$  σχέσεις μερικής διάταξης που ορίζονται σε ένα σύνολο  $A$ . Η  $P_1 \cup P_2$  θα είναι επίσης σχέση μερικής διάταξης;
5. Έστω σχέση  $S$ , η οποία ορίζεται στο σύνολο των προτασιακών τύπων ως εξής:

$$(p, q) \in S \text{ εάν και μόνον εάν } p \wedge q \text{ είναι ταυτολογία.}$$

Να εξετασθεί εάν η  $S$  είναι αυτοπαθής, συμμετρική, μεταβατική.

6. Είναι οι προτασιακοί τύποι  $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$  και  $q \rightarrow (p \vee r)$  ταυτολογικά ισοδύναμοι;
7. Ένας προτασιακός τύπος είναι σε κανονική διαζευκτική μορφή αν είναι της μορφής  $\psi_0 \vee \psi_1 \vee \dots \vee \psi_n$  όπου κάθε  $\psi_i, i = 0, 1, \dots, n$  είναι σύζευξη προτασιακών μεταβλητών ή αρνήσεων προτασιακών μεταβλητών. Βρείτε προτασιακό τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή που είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον  $\neg(p_0 \rightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2))$ .