2/4/04

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ $C_{X_1,\dots,X_N}$ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΠΙΝΑΚΑΣ (ΣΥΝ)ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΘΕΤΙΚΑ ΗΜΙΟΡΙΣΜΕΝΟΣ (ΣΥΝΗΘΩΣ ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΟΣ)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ΕΙΝΑΙ $Var\,\tilde{X} = E[(\tilde{X}-\bar{X})^2] \geq 0$ ΜΕ ΙΣΟΤΗΤΑ ΑΝ Η $\tilde{X}$ ΠΑΙΡΝΕΙ ΤΗΝ ΤΙΜΗ $\bar{X}$ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ 1.

ΑΝ $\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{N} a_i \tilde{X}_i$ ΜΕ a_i ΑΥΘΑΙΡΕΤΑ, ΕΙΝΑΙ $Var(\tilde{Z}) \geq 0$ ΜΕ ΙΣΟΤΗΤΑ ΜΟΝΟ ΑΝ ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΑ a Η $\sum a_i \tilde{X}_i$ ΕΙΝΑΙ ΒΕΒΑΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ. ΑΛΛΑ ΤΟΤΕ $0 \leq Var(\tilde{Z}) = (a_1,\dots,a_N)\, C \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$ ΓΙΑ ΑΥΘΑΙΡΕΤΑ a_i ΚΑΙ ΑΥΤΟΣ ΕΙΝΑΙ Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜ. ΠΙΝΑΚΑ.

ΕΝΑΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ ΕΙΝΑΙ (Θ.Ο.) ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΟΣ ΑΝ ΟΛΕΣ ΟΙ ΕΛΑΣΣΟΝΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΕΙΝΑΙ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΕΣ. ΕΤΣΙ Π.Χ. Ο ΠΙΝΑΚΑΣ $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ Θ.Ο. ΚΑΘΩΣ $2 - 5 \cdot 5 < 0$! ΕΠΙΣΗΣ, ΑΝ Ο C ΗΤΑΝ ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΔΥΟ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ $\tilde{X}, \tilde{Y}$ Η Τ.Μ. $\tilde{Z} = \tilde{X} - \tilde{Y}$ ΘΑ ΕΙΧΕ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

$$Var(\tilde{Z}) = (1 \ \ -1) \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 2 \cdot 5(-1) = -7 < 0$$

ΠΡΑΓΜΑ ΑΔΥΝΑΤΟ!

ΓΕΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΜΕ ΒΕΒΑΙΟ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ (Π.Σ.)

ΘΕΩΡΟΥΜΕ N ΑΒΕΒΑΙΑ Π.Σ. ΜΕ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ $\tilde{R}_j$ $j = 1, 2, \dots, N$ ΚΑΙ ΕΝΑ ΒΕΒΑΙΟ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ρ. ΓΡΑΦΟΥΜΕ $\tilde{R}_0 = \rho$ ΓΙΑ ΕΝΙΑΙΟ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟ

· ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΤΩΡΑ ΓΙΝΕΤΑΙ:

$\tilde{R}_p = \sum_{j=0}^{N} w_j \tilde{R}_j$: Η ΑΠΟΔΟΣΗ ΤΟΥ ΧΑΡΤ. – ΑΒΕΒΑΙΗ

ΜΕ $E(\tilde{R}_p) = \sum_{j=0}^{N} w_j \bar{R}_j$ ΚΑΙ

$$Var(\tilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \underbrace{Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)}_{c_{ij}}$$

· ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΕΠΙΛΕΓΟΝΤΑΣ w_j ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΑΠΟΔΟΣΗ:

$$\min_{w_0, \dots} Var(\tilde{R}_p)$$

ΜΕ $E(\tilde{R}_p) \geq R_{min}$ ΠΕΡΙΟΡ. ΑΠΟΔΟΣΗΣ

$\sum_{j=0}^{N} w_j \leq 1$ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΡΟΫΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΤΟ R_{min} ΕΙΝΑΙ Η ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΑΠΟΔΟΣΗ ΠΟΥ ΜΑΣ ΕΠΙΒΑΛΛΟΥΝ!

Ή ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΑ w:

$$\min_{w_0, w_1, \dots} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j c_{ij}$$

$$\sum_{j=0}^{N} w_j \bar{R}_j \geq R_{min}$$

$$\sum_{j=0}^{N} w_j \leq 1$$

· ΤΟ $\frac{1}{2}$ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΤΙΘΕΤΑΙ ΓΙΑ ΜΙΚΡΗ ΑΠΛΟΥΣΤΕΥΣΗ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΕΝ ΑΛΛΑΖΕΙ ΤΗΝ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

· Η ΛΥΣΗ ΑΠΑΙΤΕΙ ΣΥΝΘΗΚΕΣ KUHN-TUCKER (ΒΛΕΠΕ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘ/ΚΟΥ ΠΡΟΓ/ΣΜΟΥ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΣΤΟ eclass / ΕΓΓΡΑΦΑ)

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ KUHN-TUCKER

ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ $\max_{x_1,\dots,x_N} f(x_1,\dots,x_N)$

ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ $g_i(x_1,\dots,x_N) \geq 0 \quad i=1,\dots,k$

ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_N$ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΕΙΝΑΙ Η ΥΠΑΡΞΗ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΩΝ $\mu_i \geq 0 \quad i=1,\dots,k$ ΩΣΤΕ

- $\mu_i \, g_i(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_N) = 0 \qquad i=1,\dots,k$
- $\partial \mathcal{L}/\partial x_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[f + \sum_{i=1}^{N} \mu_i g_i \right] = 0 \qquad i=1,\dots,N$

→ ΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΟ $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_N$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ

ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΥΜΕ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΩΣ

$$\max \; -\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} w_i w_j C_{ij}$$

$$1 - \sum_{j=0}^{N} w_j \geq 0$$

$$\sum_{j=0}^{N} w_j \bar{R}_j - R_{min} \geq 0$$

ΟΠΟΤΕ
$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} w_i w_j C_{ij} + \mu\left(\sum_{j=0}^{N} w_j \bar{R}_j - R_{min}\right) + \lambda\left(1 - \sum_{j=0}^{N} w_j\right)$$

ΟΙ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΔΙΝΟΥΝ

$$\partial \mathcal{L}/\partial w_0 = \mu\rho - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \mu = \lambda/\rho$$

$$i=1,2,..,N: \ \partial \mathcal{L}/\partial w_i = -\sum_{j=1}^{N} c_{ij} w_j + \mu \bar{R}_i - \lambda = 0$$

$$\text{ή} \quad \sum_{j=1}^{N} c_{ij} w_j = \mu \bar{R}_i - \lambda$$

$$\text{ή} \quad \sum_{j=1}^{N} c_{ij} w_j = \lambda \left[\frac{\bar{R}_i - \rho}{\rho} \right]$$ ← ΕΡΜΗΝΕΙΑ;

ΟΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ ΣΥΣΤΗΜΑ N ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ N ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ! ΓΡΑΦΕΤΑΙ ΣΥΝΤΟΜΟΤΕΡΑ ΩΣ:

$$C w = \lambda \left[\frac{1}{\rho} \bar{R} - \bar{1} \right]$$

ΟΠΟΥ C: $N \times N$ ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_N \end{pmatrix} \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \vdots \\ \bar{R}_N \end{pmatrix} \quad \bar{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

· ΔΕΧΟΜΑΣΤΕ ΟΤΙ Ο ΠΙΝΑΚΑΣ C ΕΧΕΙ ΟΡΙΖΟΥΣΑ $\neq 0$

ΑΡΑ $$w = \lambda C^{-1} \left[\frac{1}{\rho} \bar{R} - 1 \right]$$

· ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΟΥΜΕ ΑΝ ΕΙΝΑΙ $\lambda > 0$ ή $\lambda = 0$.

· ΑΝ $\lambda = 0$ ΤΟΤΕ $w_1 = \dots = w_N = 0$ ΟΠΟΤΕ $\tilde{R}_p = w_0 \rho < \rho$

ΑΝ ΟΜΩΣ $\rho < R_{min}$ ΕΙΝΑΙ

$$E(\tilde{R}_p) = w_0 \rho < \rho < R_{min}$$

ΚΑΙ ΑΡΑ Ο ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ <u>ΔΕΝ</u> ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ!

ΕΠΟΜΕΝΩΣ $\lambda > 0$ (ΚΑΙ $\mu = \lambda/\rho > 0$)
ΚΑΙ ΛΟΓΩ KUHN TUCKER $(\lambda g = 0)$
ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ

$$\cdot \sum_{j=0}^{N} w_j = 1 \qquad (1)$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{N} w_j \bar{R}_j = R_{min} \qquad (2)$$

ΚΑΙ ΑΠΟ ΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ

$$C w = \lambda \left[\frac{1}{\rho} \bar{R} - \bar{1} \right] \qquad (3)$$

ΟΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΟΥΣ (1) - (2) - (3) ΕΙΝΑΙ $N+2$ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
ΜΕ ΠΡΟΣ $N+2$ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ $w_0, w_1, \ldots, w_N, \lambda$
ΚΑΙ ΑΡΑ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΤΙΣ ΛΥΣΟΥΜΕ!