ΜΑΠ: ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ 19/10/2

6η ΠΑΡΑΔΟΣΗ

ΓΙΑΤΙ ΔΕΝ ΑΦΑΙΡΟΥΜΕ ΜΗ ΑΥΣΤΗΡΑ ΚΥΡΙΑΡΧΟΥΜΕΝΕΣ;

	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{\Gamma}$
A	$(0, \underline{2})$	$(\underline{2}, \underline{2})$	$(0, \underline{2})$
B	$(1, \underline{3})$	$(\underline{2}, 0)$	$(\underline{3}, 1)$
Γ	$(\underline{3}, 1)$	$(\underline{2}, 0)$	$(1, \underline{3})$

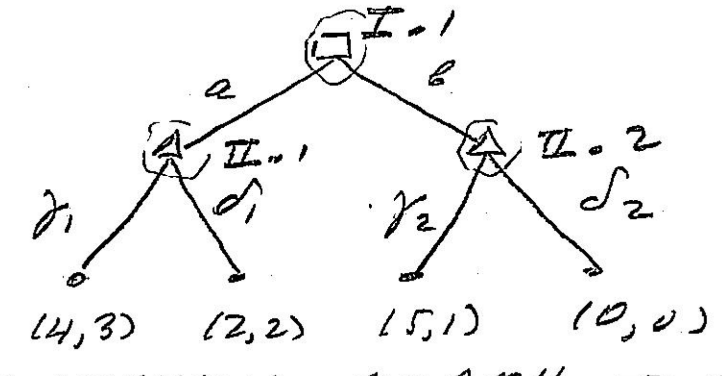
- ΣΗΜΕΙΟ NASH: $(A, \bar{B})$
- ΑΛΛΑ Η A ΚΥΡΙΑΡΧΕΙΤΑΙ ΑΠΟ B, Γ ΑΣΘΕΝΩΣ
  Η $\bar{B}$ ΑΠΟ $\bar{A}, \bar{\Gamma}$
- ΑΝ ΑΦΑΙΡΕΣΟΥΜΕ $A, \bar{B}$ ΕΧΟΥΜΕ

	$\bar{A}$	$\bar{\Gamma}$
B	$(1, \underline{3})$	$(\underline{3}, 1)$
Γ	$(\underline{3}, 1)$	$(1, \underline{3})$

- ΟΠΟΥ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ Σ.Ι.

SUBGAME PERFECT NASH EQUILIBRIA

- ΑΞΙΟΠΙΣΤΕΣ ΑΠΕΙΛΕΣ



- ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ → ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ II

	a	b
τ_1	γ_1	γ_2
τ_2	γ_1	δ_2
τ_3	δ_1	γ_2
τ_4	δ_1	δ_2

$\sigma_1 \sim a$

$\sigma_2 \sim b$

I \ II	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
σ_1	$(4,\underline{3})$	$(\underline{4},\underline{3})$	$(2,2)$	$(\underline{2},\underline{2})$
σ_2	$(\underline{5},\underline{1})$	$(0,0)$	$(\underline{5},\underline{1})$	$(0,0)$

- ΣΗΜΕΙΑ NASH (σ_2,τ_1) (σ_2,τ_2) (σ_2,τ_3)

  <u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> $\tau_2 \ll \tau_1$ ....

- Η "ΜΥΩΠΙΚΗ" ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΟΥ <u>II</u> ΕΙΝΑΙ Η τ_1 ΚΑΙ ΟΔΗΓΕΙ ΣΕ ΕΚΒΑΣΗ $(5,1)$
- Η τ_2 ΟΔΗΓΕΙ ΣΕ Σ.Ι. (σ_1,τ_2) ΜΕ ΕΚΒΑΣΗ $(4,3)$
- Η τ_2 <u>ΔΕΝ</u> ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΕΙ ΤΟ ΚΕΡΔΟΣ ΤΟΥ <u>II</u> ΣΤΟΝ ΚΟΜΒΟ <u>II</u>.2. ΕΙΝΑΙ ΠΙΣΤΕΥΤΗ;
- <u>SUBGAME PERFECT</u> ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ NASH ΠΟΥ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ NASH ΚΑΙ ΣΕ ΥΠΟΠΑΙΓΝΙΑ.
- <u>ΕΔΩ</u> ΜΟΝΟ Η (σ_2,τ_1) ΕΙΝΑΙ SGP NASH.

ΣΥΝΕΧΗ ΠΑΙΓΝΙΑ

- $x \in \Sigma \subseteq R^n \quad y \in T \subseteq R^m$
- $K_I : \Sigma \times T \to R \quad K_{II} : \Sigma \times T \to R$
- $K = (K_I, K_{II}) \quad K : \Sigma \times T \to R^2$

(x^*, y^*) NASH ΑΝ

ΟΧΙ SUP

$$\max_{x \in \Sigma} K_I(x, y^*) = K_I(x^*, y^*)$$

$$\max_{y \in T} K_{II}(x^*, y) = K_{II}(x^*, y^*)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $K_I(x,y) = -\left[(1-x)^2 + 2(x-y)^2\right]$

$K_{II}(x,y) = -\left[y^2 + (x-y)^2\right]$

"ΑΝΤΙΔΡΑΣΗ" ΤΟΥ Ι : $\partial K_I/\partial x \,(x,y) = 0 \to x = \frac{1+2y}{3}$

" " " ΤΟΥ ΙΙ : $\partial K_{II}/\partial y \,(x,y) = 0 \to y = x/2$

ΛΥΝΟΝΤΑΣ $x^* = \frac{1+2y^*}{3}$ $y^* = x^*/2 \to \underbrace{x^* = 1/2 \quad y^* = 1/4}_{\text{ΕΡΜΗΝΕΙΑ}}$

STACKELBERG ΜΕ Ι ΗΓΕΤΗ

• Ο Ι ΠΑΙΖΕΙ x Ο ΙΙ ΠΑΙΖΕΙ $y_{ANT}(x)$

$$\max_{x \in \Sigma} K_I(x, y_{ANT}(x))$$

ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\min_x (1-x)^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$\to x_{ST} = 2/3 \quad y_{ST} = 1/3$ **

ΟΛΙΓΟΠΩΛΙΟ COURNOT ΠΑΙΓΝΙΟ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Q_I, Q_{II} $P(Q_I, Q_{II}) = 1/Q_I + Q_{II}$

$$K_I(Q_I, Q_{II}) = \frac{Q_I}{Q_I + Q_{II}} - 2Q_I$$

$$K_{II}(Q_I, Q_{II}) = \frac{Q_I}{Q_I + Q_{II}} - Q_{II}$$

** ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ : ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ LAGRANGIAN:

$$\max_{x,y} K_I(x,y) \quad \text{ΚΑΙ} \quad \frac{\partial K_{II}}{\partial y}(x,y) = 0$$

ΤΟΤΕ $\mathcal{L} = K_I + \lambda\, \partial K_{II}/\partial y$, $\partial \mathcal{L}/\partial x = \partial \mathcal{L}/\partial y = 0$

$$\frac{\partial K_I}{\partial Q_I} = (Q_I + Q_{II})^{-1} - Q_I (Q_I + Q_{II})^{-2} - 2 = 0$$

$$\frac{\partial K_{II}}{\partial Q_{II}} = (Q_I + Q_{II})^{-1} - Q_{II} (Q_I + Q_{II})^{-2} - 1 = 0$$

"ΛΥΣΗ ; $\underline{Q_I^* = 0{,}111}$ $\underline{Q_{II}^* = 0{,}222}$

ΑΓΟΡΕΣ Ν ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

- ΣΕ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ, ΠΑΡΑΓΩΓΗ q ΑΠΟ ΚΑΘΕΝΑ
- ΤΙΜΗ $p = g(Nq)$
- ΕΣΟΔΟ $q\,g(Nq) - f(q)$

- ΑΝ ΚΑΠΟΙΟΣ ΑΠΟΚΛΙΝΕΙ ΜΕ s

$$\max_s \left[s\, g((N-1)q + s) - f(s) \right]$$

$$\Longrightarrow g((N-1)q+s) + s\, g'((N-1)q+s) - f'(s) = 0$$

ΑΛΛΑ ΓΙΑ Σ.Ι. ΠΡΕΠΕΙ $s = q^*$ ΑΡΑ

$$g(Nq^*) + q^* g'(Nq^*) - f'(q^*) = 0$$

ΣΕ ΠΛΗΡΩΣ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗ ΑΓΟΡΑ Η ΤΙΜΗ ΙΣΟΥΤΑΙ ΜΕ ΟΡΙΑΚΟ ΚΟΣΤΟΣ

$$g(N\hat{q}) - f'(\hat{q}) = 0$$

- ΕΙΝΑΙ $\hat{q} > q^*$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ $g(q) = A - Bq \geq 0$ $f(q) = Cq$

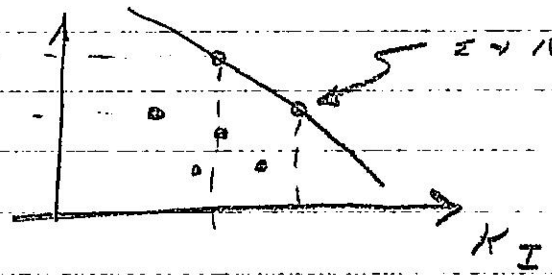
$$Nq^{ANT} = \frac{A-C}{B} \qquad Nq^* = \frac{N}{N+1}\,\frac{A-C}{B}$$

- ΓΙΑ 80% ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΜΟΥ $\underline{N^* = 4}$

COOPERATIVE GAMES

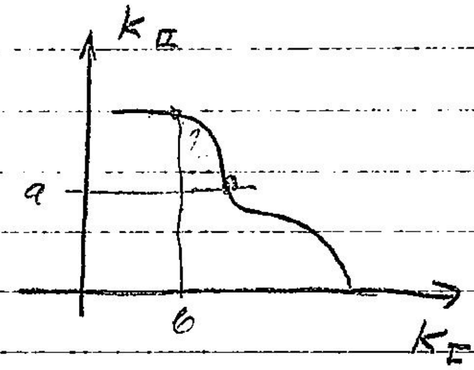
• ΚΥΡΙΑΡΧΙΑ PARETO $(\sigma_1, \tau_1) \gg (\sigma_2, \tau_2)$

ΑΝ Η (σ_1, τ_1) ΠΡΟΤΙΜΑΤΑΙ ΑΠΟ ΟΛΟΥΣ ΤΟΥΣ ΠΑΙΚΤΕΣ (ΕΔΩ ΔΥΟ...)



• ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΣΥΝΟΡΟ PARETO;

• $$\max_{x,y} K_I(x,y)$$
$$K_{II}(x,y) \geq a$$



• $$\max_{x,y} K_{II}(x,y)$$
$$K_I(x,y) \geq \beta$$

• ΑΝ ΤΟ ΣΥΝΟΡΟ PARETO ΕΙΝΑΙ ΚΥΡΤΟ ΤΟΤΕ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΛΥΣΕΙΣ

$$\max_{x,y} \lambda K_I(x,y) + (1-\lambda) K_{II}(x,y)$$
$$\lambda \in [0,1]$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΣΗΜΕΙΑ PARETO ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ NASH

Π.Χ. ΔΙΛΗΜΜΑ ΦΥΛΑΚΙΣΜΕΝΩΝ

(8,8)	(1,10)
(10,1)	(3,3)

ΓΙΑ x^*, y^* NASH ΠΡΕΠΕΙ

$$\frac{\partial K_I}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial K_{II}}{\partial y}(x^*, y^*) = 0$$

$$\left(\text{ΚΑΙ } \ \partial^2 K_I / \partial x^2 (x^*, y^*),\ \partial^2 K_I / \partial y^2 < 0\right)$$

ΓΙΑ PARETO (ΜΕ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ) ΣΤΟ (x^*, y^*)

$$\lambda \frac{\partial K_I}{\partial x} + (1-\lambda) \frac{\partial K_{II}}{\partial x} = 0$$

$$\lambda \frac{\partial K_{II}}{\partial y} + (1-\lambda) \frac{\partial K_{II}}{\partial y} = 0$$

$$\Longrightarrow \ \partial K_{II} / \partial x = \partial K_I / \partial y = 0$$

ΑΡΑ ΣΤΟ (x^*, y^*) ΑΚΡΟΤΑΤΟ ΚΑΙ ΤΩΝ <u>ΔΥΟ</u> ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ K_I, K_{II} ...

<u>ΛΥΣΗ ΔΙΑΠΡΑΓΜΑΤΕΥΣΗΣ NASH</u>

- <u>ΕΣΤΩ</u> $u^* = \max\limits_{x} \min\limits_{y} K_I(x, y)$

$$v^* = \max_{y} \min_{x} K_{II}(x, y)$$

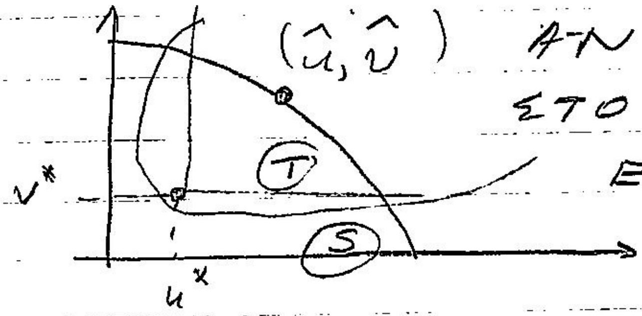
<u>ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ</u> $\hat{u} = K_I(\hat{x}, \hat{y})$ $\hat{v} = K_{II}(\hat{x}, \hat{y})$

- $\hat{u} \geq u^*$ $\hat{v} \geq v^*$
- $(\hat{u}, \hat{v})$ PARETO
- ΙΣΩ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΠΑΙΓΝΙΟ

$$\hat{u} = \hat{v}$$

- ΔΕΝ ΑΛΛΑΖΟΥΝ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝ $K \rightsquigarrow aK + \beta$

• ΤΕΛΕΥΤΑΙΟ ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ ΑΜΦΙΛΕΓΟΜΕΝΟ



ΑΝ $(\hat{u},\hat{v})$ Η ΕΚΒΑΣΗ ΣΤΟ S ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΕΚΒΑΣΗ ΣΤΟ T

- ΣΥΖΗΤΗΣΙΜΟ

ΠΡΟΤΑΣΗ (NASH) ΤΟ ΜΟΝΑΔΙΚΟ $\hat{u},\hat{v}$ ΕΙΝΑΙ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

$$\max (u-u^*)\cdot(v-v^*)$$

$$(u,v)\in S \quad (u,v)\geq (u^*,v^*)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ $\cdot\ x+y=100$

$u \to K_I(x,y) = x$, $v \to K_{II}(x,y) = \ln(y+100)$

$u^*=0$ $\quad v^*=\ln 100$ ΕΞΑΣΦΑΛΙΣΜΕΝΑ

$$\Longrightarrow \max_{0\leq x\leq 100} x\,(\ln(200-x)-\ln 100)$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΔΙΝΕΙ

$x=54{,}4 \quad y=45{,}6$

• ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΛΥΣΗΣ..

ΤΙ ΚΑΝΕΙ Η ΛΥΣΗ; ΕΞΙΣΩΝΟΝΤΑΙ ΟΡΙΑΚΕΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

$K_I(i,j) = a_{ij} \quad K_{II}(i,j) = b_{ij}$

$(A,B) \longrightarrow$ BIMATRIX GAME

. ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ $a_{ij} + b_{ij} = c \quad \forall i,j$

NASH i^*, j^*

. $\max_i a_{ij^*} = a_{i^*j^*}$

. $\max_j b_{i^*j} = b_{i^*j^*}$

ΑΝ $b_{ij} = c - a_{ij}$

$\max_j [c - a_{i^*j}] = [c - a_{i^*j^*}]$

$\cancel{c} - \min_j a_{i^*j} = \cancel{c} - a_{i^*j^*}$

$\min_j a_{i^*j} = a_{i^*j^*}$

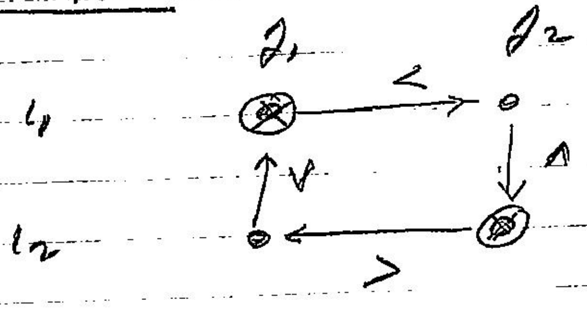
. **MIN-MAX SADDLEPOINT**

$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$

ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΤΗΛΗΣ

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΓΡΑΜΜΗΣ

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΣ



ΑΝ (i_1, j_1) ΚΑΙ (i_2, j_2) Σ.Ι. ΤΟΤΕ

$$a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = a_{i_1 j_2} = a_{i_2 j_1}$$

ΚΑΙ ΟΛΑ Σ.Ι.

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

ΓΕΝΙΚΑ $v_I = \max_i \min_j \{a_{ij}\}$

$$\le \min_j \max_i \{a_{ij}\} = v_{II}$$

ΑΝ $v_I = v_{II}$ ΕΧΟΥΜΕ Σ.Ι.

ΓΙΑΤΙ $v_I \le \underbrace{\max_i a_{ij}}_{\forall j} \le \min_j \max_i \{a_{ij}\}$

ΜΕΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

I: $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$, II: $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$

$$\pi_i \ge 0 \quad \sum \pi_i = 1 \qquad \sigma_j \ge 0 \quad \sum \sigma_j = 1$$

$$A(\sigma, \pi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \pi_i a_{ij} \sigma_j = \pi' A \sigma$$

$$\bar{v}_I = \max_{\pi} \min_{\sigma} \pi' A \sigma \leq \min_{\sigma} \max_{\pi} \pi' A \sigma = \bar{v}_{II}$$

ΑΛΛΑ $\quad \bar{v}_I \geq v_I \qquad \bar{v}_{II} \leq v_{II}$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ MIN-MAX - VON NEUMANN</u>

$$\bar{v}_I = \bar{v}_{II}$$

<u>ΑΠΟΔ.</u>

$$(P) \begin{cases} \bar{v}_I = \max v \\ (\sigma_j) \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \pi_i \geq v \quad \forall j \\ (w) \sum \pi_i = 1 \\ \quad \pi_i \geq 0 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} \bar{v}_{II} = \min w \\ (\pi_i) \sum a_{ij} \sigma_j \leq w \quad \forall i \\ (v) \sum \sigma_j = 1 \quad \sigma_j \geq 0 \end{cases}$$

· ΤΑ (P) (D) ΕΙΝΑΙ ΠΡΩΤΕΥΟΝ-ΔΥΙΚΟ ΑΡΑ ΕΧΟΥΝ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΑΞΙΑ ΚΑΙ

$$\bar{v}_I = \bar{v}_{II}$$

· <u>ΑΣΚΗΣΗ</u> ΓΡΑΨΤΕ ΤΑ ΔΥΙΚΑ ΤΩΝ P, D .

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΓΙΑ $2\times n$ ΠΑΙΓΝΙΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 ΒΙΒΛΙΟΥ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΙΑΦΗΜΙΣΗ

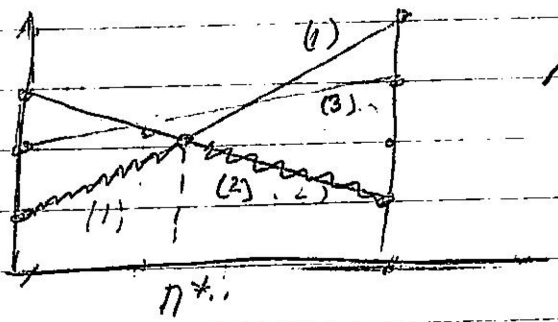
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 ΒΙΒΛΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

$$\begin{array}{c} \pi \\ \\ 1-\pi \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} v_I = 1 \\ v_{II} = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 3 & 4 \end{array} \quad 3$$

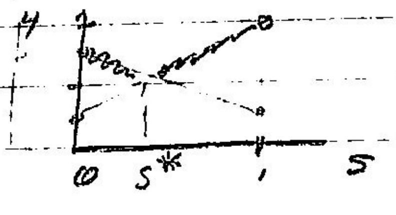
$$\bar{v}_I = \max_{\pi} \min \left(1+3\pi,\ 3-2\pi,\ 2+\pi\right)$$



$$1+3\pi^* = 3-2\pi^*$$
$$\pi^* = 2/5$$
$$\bar{v}_I = 11/5 = 2\tfrac{1}{5}$$

ΜΕ ΧΡΗΣΗ (1) - (2) ΑΠΟ II

$$\bar{v}_{II} \le \min_{s} \max \{1+3s,\ 3-2s\}$$



$$1+3s^* = 3-2s^*$$
$$s^* = 2/5$$
$$\bar{v}_{II} \le 11/5 = \bar{v}_I$$

Απλοποίηση ασθενώς κυριαρχούμενων στρατηγικών σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος.

Σε παίγνιο $A = \{a_{ij}\}$ έστω ότι η i_1 γραμμή κυριαρχείται ασθενώς από την i_2, δηλαδή $a_{i_1 j} \le a_{i_2 j}$ κάθε j.

Αν τώρα (i_1, j^*) είναι σημείο ισορροπίας έχουμε

$$a_{i j^*} \le a_{i_1 j^*} \le a_{i_1 j} \quad \forall i, j. \quad (1)$$

Λόγω κυριαρχίας είναι $a_{i_1 j} \le a_{i_2 j}$ και ειδικότερα $a_{i_1 j^*} \le a_{i_2 j^*}$. Όμως θέτοντας $i = i_2$ στην αριστερή σχέση της (1) είναι $a_{i_2 j^*} \le a_{i_1 j^*}$ οπότε $a_{i_1 j^*} = a_{i_2 j^*}$.

Έτσι η (1) γράφεται για κάθε i, j

$$a_{i j^*} \le a_{i_1 j^*} = a_{i_2 j^*} \le a_{i_1 j} \le a_{i_2 j}$$

οπότε τελικά

$$a_{i j^*} \le a_{i_2 j^*} \le a_{i_2 j}$$

που δείχνει ότι και η (i_2, j) είναι σημείο ισορροπίας.

Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και αν αφαιρεθεί η i_1 θα υπάρξει ένα Σ.Ι. στο παίγνιο A.