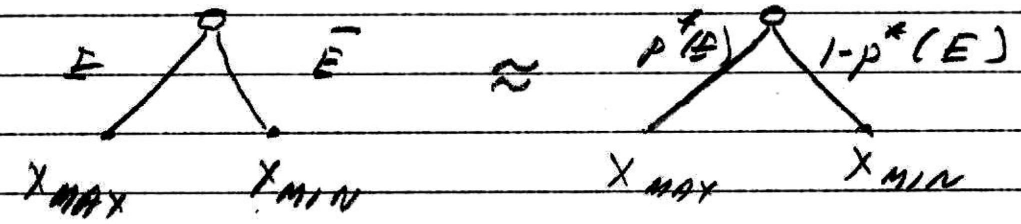
ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

- E : ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΟ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ π.χ. ΤΟ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟ BRENT ΘΑ ΕΧΕΙ ΤΙΜΗ ≥ 100 \$/BBL ΤΗΝ 1/12/21

$\bar{E}$: ΔΕΝ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ ΤΟ Ε.

- ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΠΙΘ/ΤΑ $p^*(E)$ ΑΝ

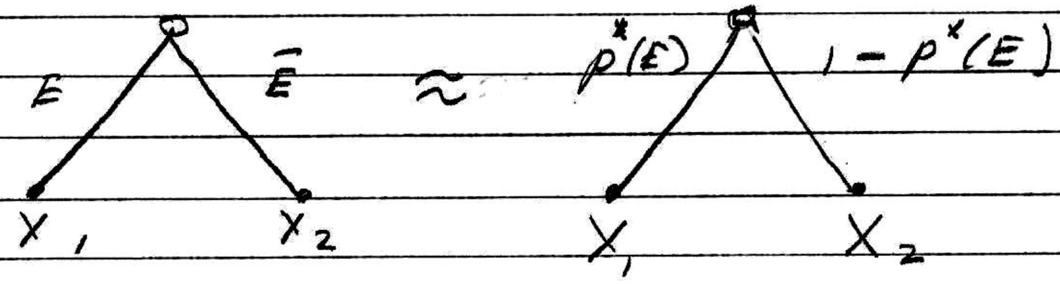


ΠΡΟΤΑΣΗ 1. ΓΙΑ ΟΡΘΟΛΟΓΙΚΟΥΣ ΑΠΟΦΑΣΙΖΟΝΤΕΣ ΙΣΧΥΕΙ

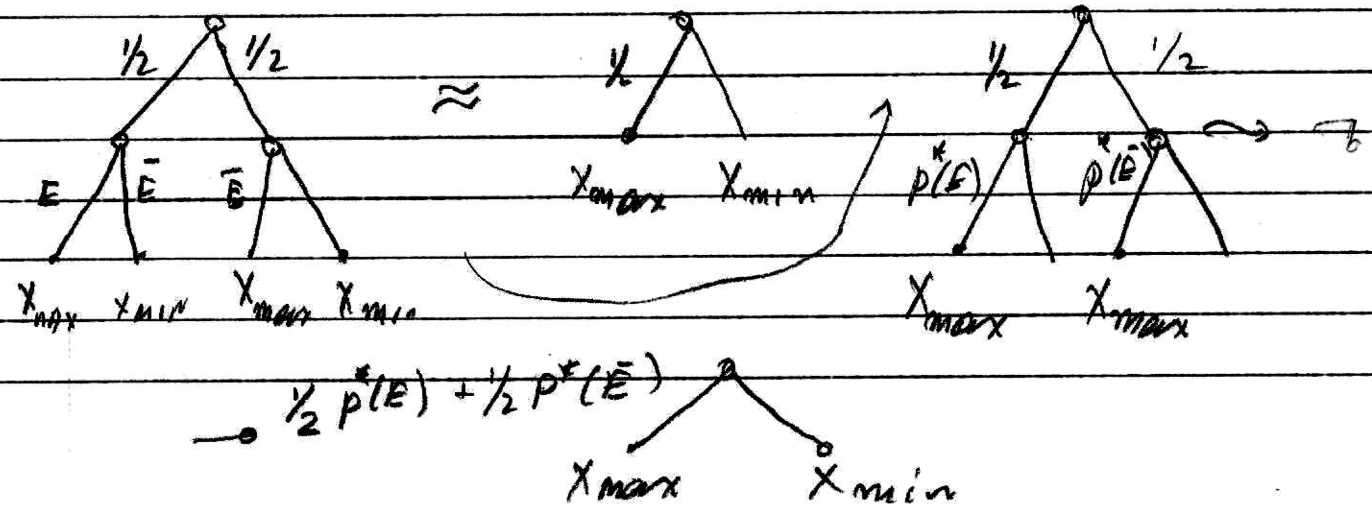
- $p^*(E) + p^*(\bar{E}) = 1$
- $p^*(E) + p^*(Z) = p^*(E \cup Z)$

ΑΝ $E \cap Z = \emptyset$

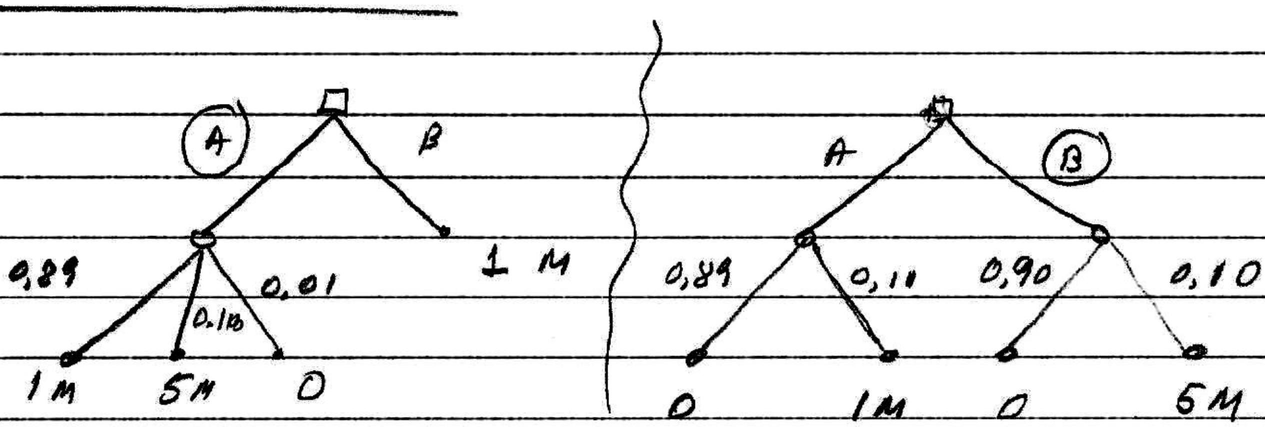
ΠΡΟΤΑΣΗ 2.



ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ...



ΠΑΡΑΔΟΞΟ ALLAIS



$$0{,}89\,U(1) + 0.10\,U(5) + 0.01\,U(0) > U(1) \qquad (1)$$

$$0{,}89\,U(0) + 0{,}11\,U(1) > 0{,}90\,U(0) + 0{,}10\,U(5) \qquad (2)$$

$$(1) \longrightarrow 0{,}10\,U(5) + 0{,}01\,U(0) > 0{,}11\,U(1)$$

$$(2) \longrightarrow 0{,}11\,U(1) > 0{,}01\,U(0) + 0.10\,U(5)$$

- ΑΛΛΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ : ELLSBERG κλπ.
- ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΠΑΡΑΔΟΞΩΝ ΣΕ PROSPECT THEORY (KAHNEMAN TVERSKY..)

5/10/21

CAPM: CAPITAL ASSET PRICING MODEL
(SHARPE)

• ΟΣΟΙ ΕΧΟΥΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑ ως ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΠΟΔΟΣΗ R_p ΚΑΙ ΕΧΟΥΝ ΙΔΙΑ ΕΙΚΟΝΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΟΔΟΣΕΙΣ $\bar{R}$, ΤΗΝ RISK FREE ΑΠΟΔΟΣΗ r ΚΑΙ ΤΙΣ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ $C = \{c_{ij}\}$ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝ ΤΟ ΙΔΙΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΑΒΕΒΑΙΩΝ:

$$\pi_m = \frac{C^{-1}\left(\frac{1}{r}\bar{R} - \bar{1}\right)}{1' \cdot C^{-1}\left(\frac{1}{r}\bar{R} - \bar{1}\right)}$$

(ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ $\lambda C^{-1}\left(\frac{1}{r}\bar{R} - \bar{1}\right)$)

• ΑΝ Ο ΕΠΕΝΔΥΤΗΣ ℓ $(\ell = 1, 2, .., L)$ ΚΑΤΑΝΕΜΕΙ ΣΤΟ i Π.Σ. ΜΕΡΙΔΙΟ x_i^ℓ ΠΡΕΠΕΙ

$$\frac{x_i^\ell}{\sum_{j=1}^{N} x_j^\ell} = \pi_i \quad \text{ΚΑΘΕ } i, \ell$$

• $$\sum_{j=0}^{N} x_j^\ell = 1 \longrightarrow \sum_{j=1}^{N} x_j^\ell = 1 - x_0^\ell$$

$$\longrightarrow \underline{x_i^\ell = (1 - x_0^\ell)\pi_i}$$

• ΑΝ K^ℓ Η ΠΕΡΙΟΥΣΙΑ ΤΟΥ ℓ ΕΠΕΝΔΥΤΗ

$$K_i^\ell = \pi_i (1 - x_0^\ell) K^\ell$$

ΑΞΙΑ ΤΟΥ i - Π.Σ. (ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗ)

$$M_i = \sum_{\ell=1}^{L} K_i^\ell = \pi_i \sum_{\ell=1}^{L} (1 - x_0^\ell) K^\ell$$

ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΠΟΙΗΣΗ ΑΓΟΡΑΣ:

$$M = \sum_{\ell=1}^{L} (1-x_0^{\ell}) k^{\ell}$$

ΑΡΑ $\pi_i = m_i / M$ ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΕΦ/ΣΗ ΑΓΟΡΑΣ!

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u> $\pi_i \geq 0$!!

ΑΡΑ π_i "ΕΙΝΑΙ" ΤΑ ΜΕΡΙΔΙΑ ΤΩΝ Π.Σ. ΣΤΗΝ ΑΓΟΡΑ.

- <u>ΠΟΙΑ ΑΓΟΡΑ;</u>
- <u>ΥΠΑΡΧΕΙ RISK FREE ASSET;</u>
- <u>ΕΧΟΥΝ ΟΛΟΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑ;</u>

- ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΕΛΕΓΞΙΜΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΟΥ π:
- ΤΑ ΜΕΡΙΔΙΑ π_i ΙΚΑΝΟΠΟΙΟΥΝ ΣΧΕΣΗ LAGRANGE ΚΑΙ ΑΘΡΟΙΖΟΥΝ ΣΕ ΜΟΝΑΔΑ

$$\cdot \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \pi_j = \lambda^* \left(\frac{\bar{R}_i}{r} - 1 \right) \quad (1)$$

ΠΟΛ/ΜΕ ΤΙΣ (1) ΕΠΙ π_i ΚΑΙ ΠΡΟΣΘΕΤΟΥΜΕ

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} \pi_j \pi_i = \lambda^* \frac{\sum \bar{R}_i \pi_i}{r} - \lambda^* \quad (2)$$

ΟΠΟΤΕ ΤΟ λ^* ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΘΕΙ

- ΕΣΤΩ $\tilde{R}_M = \sum_{j=1}^{N} \pi_j \tilde{R}_j \rightarrow$ ΑΠΟΔΟΣΗ ΧΑΡΤΟΦ. ΑΓΟΡΑΣ

$$\begin{cases} \cdot\ E(\tilde{R}_M) = \bar{R}_M = \sum_{j=1}^{N} \pi_j \bar{R}_j \\ \cdot\ Var(\tilde{R}_M) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \pi_i \pi_j c_{ij} \\ \cdot\ Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) = \sum_{j=1}^{N} \pi_j c_{ij} \end{cases}$$

ΑΠΟ (2) $\lambda^* = \sigma_M^2 \cdot r \,/\, (\bar{R}_M - r)$

ΑΠΟ (1) $cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M) = \lambda^* \cdot \dfrac{\bar{R}_i - r}{r}$

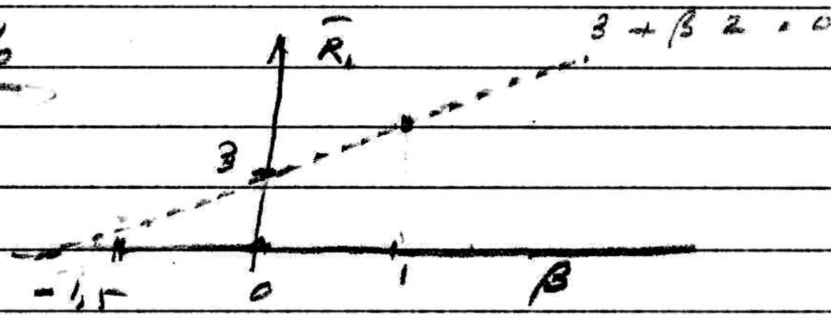
ΑΡΑ $$\bar{R}_i = r + \frac{cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_i)}{\sigma_M^2}(\bar{R}_M - r)$$

$$\beta_i = \frac{cov(\tilde{R}_M, \tilde{R}_i)}{\sigma_M^2} \rightarrow \beta_M = 1$$

$$\beta_i : \begin{cases} >1 & \bar{R}_i > \bar{R}_M \\ 1 & \bar{R}_i = \bar{R}_M \\ <1 & \bar{R}_i < \bar{R}_M \\ \leq 0 & \bar{R}_i \leq r \quad (!!) \end{cases} \qquad \underline{\bar{R}_M > r}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\bar{R}_M = 5\%$ $\quad r = 3\%$

β_i	$\bar{R}_i$ %
0	3
1	5
1,5	6
0,5	4



ΕΤΣΙ "ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΕΤΑΙ" Η ΕΠΙΘΥΜΗΤΗ ΑΠΟΔΟΣΗ ΣΤΗΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ.

ΔΥΣΚΟΛΙΑ ΜΗ ΤΕΤΡΑΓ. ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑΣ

$$\max_{\sum_{i=0}^{N} x_i} E\left[U\left(\sum x_i \tilde{R}_i\right)\right]$$

$$M(x\ldots) = E\left[U\left(\sum x_i \tilde{R}_i\right)\right] = \int_R \ldots \int_R U\left(r x_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) p(r_1 \ldots r_n)\, dr_1 \ldots dr_n$$

$$\mathcal{L} = E\,U\left(\sum x_i \tilde{R}_i\right) + \lambda\left(\sum_{i=0}^{n} x_i - 1\right)$$

$$\partial M / \partial x_0 = r \int_R \int_R U'\left(r x_0 + \sum_j r_j x_j\right) p(r_1 \ldots r_n)\, dr_1 \ldots dr_n$$

$$\partial M / \partial x_i = \int_R \ldots \int_R r_i\, U'\left(r x_0 + \sum_j r_j x_j\right) p(r \ldots)\, dr_1 \ldots dr_n$$

ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\partial \mathcal{L} / \partial x_i = \partial M / \partial x_i + \lambda = 0$$

- **ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΙΜΩΝ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ:**
  - $p(r_1 \ldots r_n)$: ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ
  - U : ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ
- ΠΟΤΕ ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ;
- ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΟΤΑΝ **ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΒΕΒΑΙΟ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ**;

TWO FUND SEPARATION THEOREM

(ΒΛΕΠΕ LUENBERGER)

ΠΑΙΓΝΙΑ · ΤΥΧΑΙΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΟΥΔΕΤΕΡΑ:
ΔΕΝ ΕΞΑΡΤΩΝΤΑΙ ΑΠΟ ΕΠΙΛΟΓΗ
- ΑΛΛΟΙ ΠΑΙΚΤΕΣ

- ΠΑΙΓΝΙΑ 2 Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΠΑΙΚΤΩΝ
  N PERSON GT : COALITIONS
- ZERO-NONZERO SUM
- COOPERATIVE - NON COOPERATIVE
- BAYESIAN GAMES
- ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ: MARKET SIGNALLING, AUCTION THEORY, MARKET FOR LEMONS: ASYMMETRIC INFORMATION

- ΨΕΥΤΟΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΔΗΜΟΠΡΑΣΙΑ: ΠΡΟΣΦΟΡΑ B ΚΟΣΤΟΣ C.

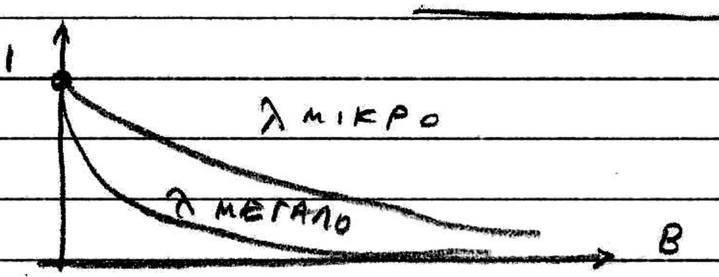
- ΑΝ ΚΕΡΔΙΣΩ: ΟΦΕΛΟΣ $B-C$
- ΚΕΡΔΙΖΩ ΑΝ $\tilde{X} > B$

  $\tilde{X}$: Τ.Μ.; ΧΑΜΗΛΟΤΕΡΗ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ

- ΑΝΑΜ. ΚΕΡΔΟΣ $(B-C)P(\tilde{X} > B)$

ΣΕ ΩΦΕΛΙΜΟΤΗΤΑ $U(B-C)P(\tilde{X}>B) + \overset{0}{U(0)}P(\tilde{X}<B)$

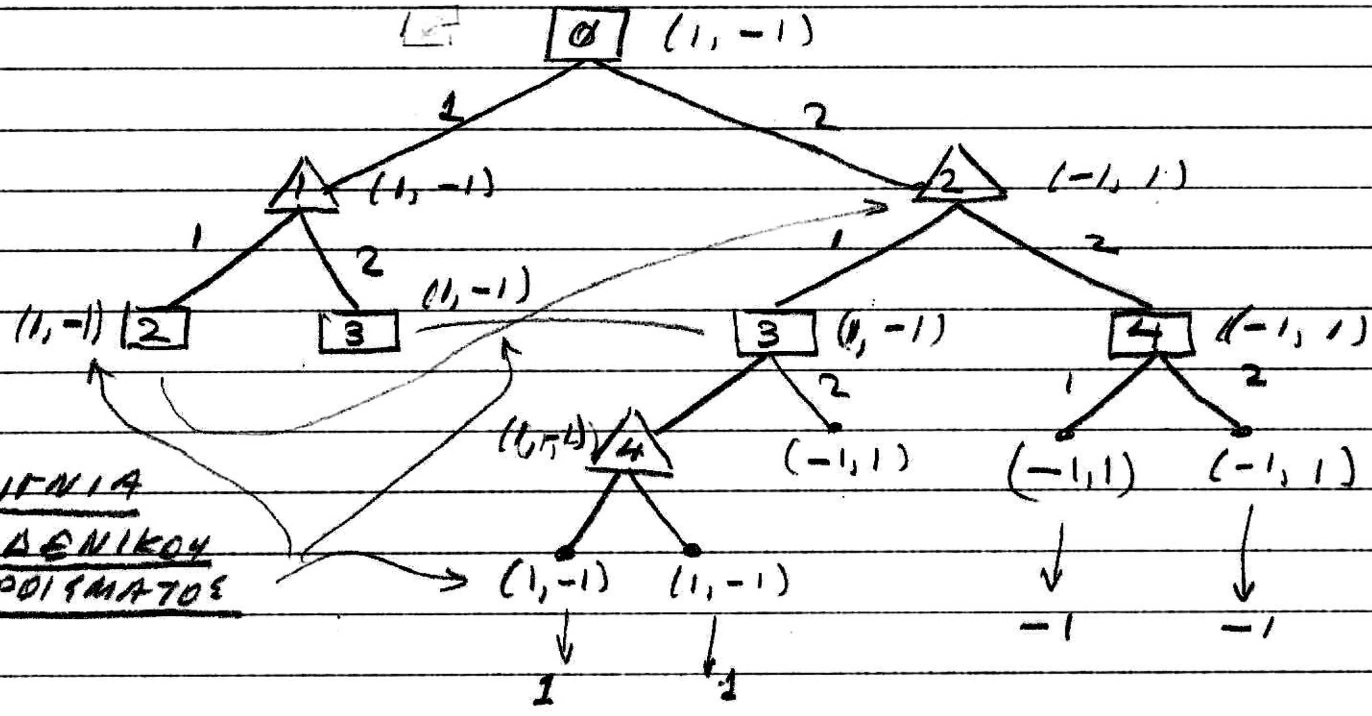
ΑΝ $P(\tilde{X} > B) = e^{-\lambda B}$ ΤΟΤΕ ΓΙΑ
ΓΡΑΜΜΙΚΟ $U \longrightarrow B^* = C + 1/\lambda$



- VICKRAY AUCTION : $B = C$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΠΑΙΓΝΙΑ

- ΠΑΙΚΤΕΣ ΑΝΑΓΓΕΛΟΥΝ ΕΝΑΛΛΑΞ 1 Η 2.
- ΟΠΟΙΟΣ ΠΡΟΞΕΝΗΣΗ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΝΑ ΦΤΑΣΕΙ Η ΞΕΠΕΡΑΣΕΙ ΤΟ 5 ΧΑΝΕΙ 1 ΜΟΝΑΔΑ.
- ΔΕΝΔΡΟ ΠΑΙΓΝΙΟΥ



ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

- ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΑΝ ΤΟ ΠΑΙΓΝΙΟ ΛΗΓΕΙ ΣΤΟ Μ;
- ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΑΝ Η ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΙΝΑΙ ΑΠΟ ΑΥΘΑΙΡΕΤΟ ΣΥΝΟΛΟ;
- ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΑΝ ΟΙ ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ
  - ΑΝΑ ΠΑΙΚΤΗ
  - ΑΝΑ ΚΙΝΗΣΗ;
- ΠΟΙΟ ΠΑΙΔΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΑΣ ΘΥΜΙΖΕΙ;

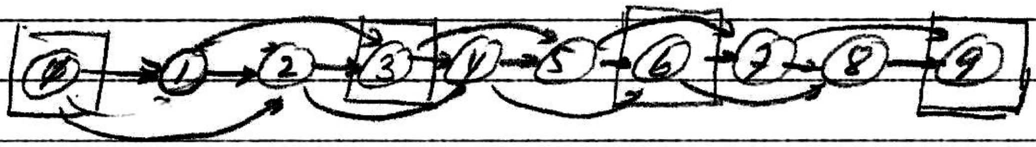
ΠΑΙΓΝΙΑ ΣΕ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

$G = (V, E)$ $E \subseteq V \times V$ $E \not\ni (v_i, v_i)$

V: ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ

- ΠΑΙΚΤΕΣ ΠΑΙΖΟΥΝ ΕΝΑΛΛΑΞ, ΕΠΙΛΕΓΟΝΤΑΣ ΚΛΑΔΟ ΑΠΟ ΚΟΜΒΟ. Ο ΑΛΛΟΣ ΠΑΙΖΕΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΟΜΒΟ ΟΠΟΥ ΟΔΗΓΗΘΗΚΕ
- ΧΑΝΕΙ ΟΠΟΙΟΣ ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΣΥΝΕΧΙΣΕΙ.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΤΕΡΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ: ΤΕΛΟΣ ΣΤΟ 10
ΚΟΜΒΟΙ $0, 1, \ldots, 9$



ΧΑΝΟΜΕΝΕΣ ΘΕΣΕΙΣ: 9, 6, 3, Ø

<u>ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ</u> ΠΥΡΗΝΑΣ-KERNEL: $K \subseteq V$

ΩΣΤΕ (1) $v_1, v_2 \in K \Rightarrow (v_1, v_2), (v_2, v_1) \notin E$

(2) $w \notin K \rightarrow \exists\, v \in K$ ΜΕ $(w, v) \in E$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> ΑΝ K ΕΙΝΑΙ ΠΥΡΗΝΑΣ ΚΑΙ ΠΑΙΖΩ ΑΠΟ $w \notin K$ ΔΕΝ ΧΑΝΩ.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> ΕΠΙΛΕΓΩ ΚΙΝΗΣΗ (w, v) $v \in K$. ΑΡΑ ΔΕΝ ΧΑΝΩ ΑΜΕΣΩΣ. ΣΤΗΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ (v, v_1), ΤΟ $v_1 \notin K$ ΑΡΑ ΠΑΛΙ ΔΕΝ ΧΑΝΩ.

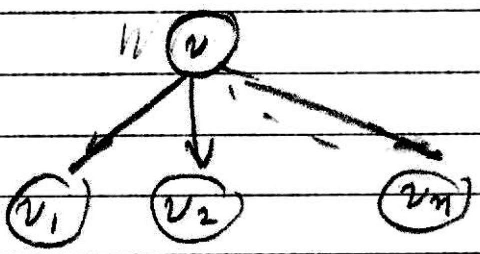
- <u>ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΥΡΗΝΑ ΣΕ ΑΚΥΚΛΙΚΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ - ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ</u>
  - ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΚΟΡΥΦΕΣ ΧΩΡΙΣ ΕΠΟΜΕΝΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ
  - "ΤΟΠΟΘΕΤΟΥΜΕ" ΑΥΤΕΣ ΤΙΣ ΚΟΡΥΦΕΣ ΣΤΟΝ ΠΥΡΗΝΑ
  - ΑΦΑΙΡΟΥΜΕ ΑΥΤΕΣ ΚΑΙ ΟΣΕΣ ΟΔΗΓΟΥΝ ΣΕ ΑΥΤΕΣ ΚΑΙ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΑΠΟ ΤΟ ΓΡΑΦΗΜΑ
  - ΤΟ ΝΕΟ ΓΡΑΦΗΜΑ ΕΞΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΑΚΥΚΛΙΚΟ ΟΠΟΤΕ ΣΥΝΕΧΙΖΟΥΜΕ...
  - ΤΕΛΟΣ ΟΤΑΝ ΕΞΑΝΤΛΗΘΕΙ ΤΟ ΓΡΑΦΗΜΑ.
- <u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>;

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓ/ΣΜΟΣ. ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ: ΣΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΕΚΒΑΣΕΙΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΠΑΙΚΤΩΝ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΜΗΔΕΝ (ΓΕΝΙΚΑ: ΤΟ ΙΔΙΟ..)

- ΣΕ ΠΑΙΓΝΙΟ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $W: V \to R$

  $W(v)$: ΜΕΓΙΣΤΟ ΚΕΡΔΟΣ ΟΠΟΙΟΥ ΠΑΙΖΕΙ ΑΠΟ v

- **ΕΠΙΠΛΕΟΝ** ΟΙ ΤΕΡΜΑΤΙΚΟΙ ΚΟΜΒΟΙ ΕΧΟΥΝ ΜΙΑ ΑΞΙΑ ΠΟΥ ΚΕΡΔΙΖΕΙ ΟΠΟΙΟΣ "ΟΔΗΓΗΘΕΙ" ΣΕ ΑΥΤΟΥΣ...



$$W(v) = \max\{-W(v_1), \ldots, -W(v_n)\}$$

$$W(v) = -\min\{W(v_1), \ldots, W(v_n)\}$$

- **ΠΩΣ ΛΥΝΕΤΑΙ;**

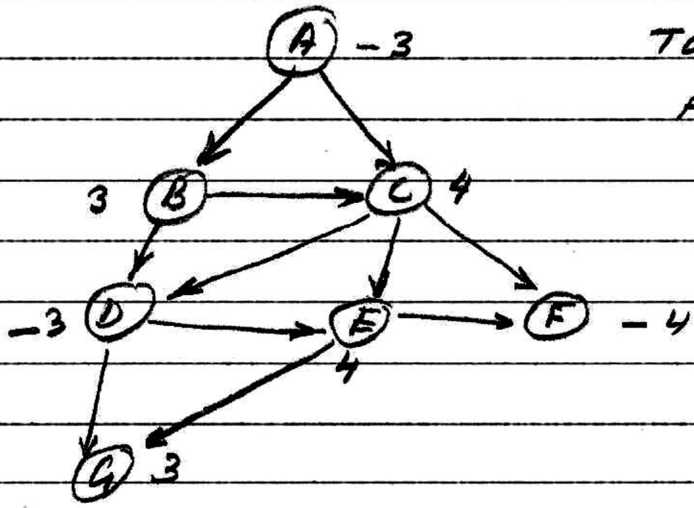
  "ΤΕΛΟΣ" ΣΤΟ 7 $\Rightarrow W(x) = +1 \quad x \geq 7$

$$W(6) = -\min\{W(7), W(8)\} = -1$$

$$W(5) = -\min\{\underset{-1}{W(6)}, \underset{+1}{W(7)}\} = +1$$

$$W(4) = -\min\{\underset{1}{W(5)}, \underset{-1}{W(6)}\} = +1$$

$$W(3) = -\min\{\underset{+1}{W(4)}, \underset{+1}{W(5)}\} = -1$$



ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ

F, G, E, D, C, B, A

$w(F) = -4 \qquad w(G) = 3$

$w(E) = -\min\{w(F), w(G)\} = 4$

$w(D) = -\min\{\underset{4}{w(E)}, \underset{3}{w(G)}\} = -3$

$w(C) = -\min\{\underset{-3}{w(D)}, \underset{4}{w(E)}, \underset{-4}{w(F)}\} = 4$

$w(B) = -\min\{\underset{4}{w(C)}, \underset{-3}{w(D)}\} = 3$

$w(A) = -\min\{\underset{3}{w(B)}, \underset{4}{w(C)}\} = -3$

<u>ΚΙΝΗΣΕΙΣ</u> $\underset{I}{A} \rightarrow \underset{II}{B} \rightarrow \underset{I}{D} \rightarrow \underset{II}{G}$: Ο I ΚΕΡΔΙΖΕΙ 3 ΜΟΝΑΔΕΣ

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΠ ΕΧΕΙ ΛΥΣΗ ΣΕ ΑΚΥΚΛΙΚΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

- ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΚΑΙ ΛΥΝΟΥΜΕ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΕΙΡΑ..