Η Λύση Διαπραγματεύσεως Nash

Σε ένα παιχνίδι συνεργασίας είναι σχετικά εύκολο να υπολογίσει κανείς το σύνολο Pareto. Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν οι δύο παίκτες θα μπορέσουν να έλθουν σε συμφωνία και να χρησιμοποιήσουν δύο στρατηγικές που θα τους οδηγήσουν στο σύνολο Pareto. Σε περίπτωση δε που επιτύχουν στην συνεννόηση, είναι δυνατόν να προβλεφθεί το είδος στρατηγικών συμφωνίας;

Μία τέτοια θεωρία για το σημείο συμφωνίας που προκύπτει μετά από διαπραγματεύσεις και έτσι ονομάζεται Λύση Διαπραγματεύσεως του Nash - Nash Bargaining Solution) προτάθηκε από τον J. Nash.

Έστω λοιπόν παιχνίδι συνεργασίας με κέρδη $k_I(x,y)$, $k_{II}(x,y)$ για τους παίκτες I, II που χρησιμοποιούν τις στρατηγικές x, y αντίστοιχα. Το <u>εξασφαλισμένο κέρδος του I</u> ορίζεται ως

$$u^* = \max_x \min_y k_I(x,y)$$

και αντίστοιχα για τον II $\quad v^* = \max_y \min_x K_{II}(x,y)$

[Αποδείξτε ότι ο I (ο II) μπορεί να εξασφαλίσει κέρδος μεγαλύτερο ή ίσο του u^* (v^*)]

Ορίζουμε ως σύνολο των <u>δυνατών εκβάσεων</u> S το σύνολο $S = \{(p,q) \mid p = k_I(x,y),\ q = k_{II}(x,y)\} \subseteq R^2$

Η έκβαση των διαπραγματεύσεων θα οδηγήσει σε κάποιες στρατηγικές $\bar{x}, \bar{y}$ με κέρδη έστω $\bar{u} = K_I(\bar{x},\bar{y})$ $\bar{v} = K_{II}(\bar{x},\bar{y})$. Αν δεχθούμε ότι η έκβαση θα εξαρτηθεί <u>μόνο</u> από το S, το u^*, και το v^* θα είναι:

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \phi(S, u^*, v^*) \in S$$

όπου η συνάρτηση ϕ "επιστρέφει" ένα σημείο του S - φυσικά $S \subseteq R^2$.

Έστω ότι θέλουμε το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης $(\bar{u}, \bar{v}) = \phi(S, u^*, v^*)$ να έχει τις παρακάτω εύλογες ιδιότητες

N.1. $(\bar{u}, \bar{v}) \geq (u^*, v^*)$

N.2 Αν $(u,v) \in S$ και $(u,v) \geq (\bar{u}, \bar{v})$ θα είναι $(u,v) = (\bar{u}, \bar{v})$

[δηλαδή το $(\bar{u}, \bar{v})$ είναι στο σύνορο Pareto]

N.3 Αν $(u,v) \in S \longleftrightarrow (v,u) \in S$ και $u^* = v^*$, τότε $\bar{u} = \bar{v}$

(Συμμετρία!)

N.4. Αν $K'_I = a_1 K_I + \beta_1$, $K'_{II} = a_2 K_{II} + b_2$ $(a_1, a_2 > 0)$ τότε

$$\phi(T, a_1 u^* + \beta_1, a_2 v^* + \beta_2) = (a_1 \bar{u} + b_1, a_2 \bar{v} + b_2)$$

με T τον γραμμικό μετασχηματισμό του S

$$T = [(p,q) \mid p = a_1 K_I(x,y) + b_1, q = a_2 K_{II}(x,y) + b_2]$$

Τα N.1 - N.4 είναι εύλογα πλην ίσως του N.3 που δεν θα αναμένεται να ισχύει αν οι διαπραγματευόμενοι δεν είναι ισότιμοι. Όμως μπορεί να υποστηριχθεί ότι με κατάλληλο μετασχηματισμό των K_I, K_{II} μπορεί το παιχνίδι να γίνει συμμετρικό.

Το επόμενο θεώρημα έχει αποδειχθεί από [illegible] [illegible]:

N.5 Αν $T \subseteq S$ και $(\bar{u}, \bar{v}) = \phi(S, u^*, v^*) \in T$ (!!)
πρέπει επίσης $(\bar{u}, \bar{v}) = \phi(T, u^*, v^*)$ $(= \phi(S, u^*, v^*))$

Το N.5 μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής. Έστω ότι σε ένα παίγνιο διαπραγμάτευσης με δυνατές εκβάσεις, T προσδιορίζεται η έκβασή του ως $(\bar{u}, \bar{v}) = \phi(T, u^*, v^*)$. Έστω επιπλέον ότι "προστίθενται" άλλες δυνατές στρατηγικές και εκβάσεις R ($R \cap T = \phi$) και θέτουμε το $S = T \cup R$. Η διαπραγμάτευση τώρα στο $S = T \cup R$ μπορεί να "αναθεωρήσει" την προηγούμενη συμφωνία σε ένα σημείο $(\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{v}})$ στο R ($\notin T$). Όμως αν δεν οδηγήσει σε μια έκβαση στο R φαίνεται παράλογο να αλλάξει η συμφωνία προς ένα σημείο $(\hat{u}, \hat{v})$ που ήδη ανήκει στο T αλλά δεν επελέγη στην αρχική διαπραγμάτευση. Αν αποκλείσουμε λοιπόν κάτι τέτοιο οδηγούμαστε στο N.5.

Το αποτέλεσμα του Nash συνοψίζεται στο παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα Υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση ϕ που έχει πεδίο ορισμού τα προβλήματα διαπραγμάτευσης (S, u^*, v^*) η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες N1 - N5

Αποδεικνύεται (βλέπε π.χ. Owen G.: Game Theory Ch. VII.2) ότι η συνάρτηση ϕ ορίζεται από το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\begin{cases} \max \; (u-u^*)\cdot(v-v^*) \\ \text{με } (u,v) \in S \text{ και } u \geq u^* \end{cases}$$

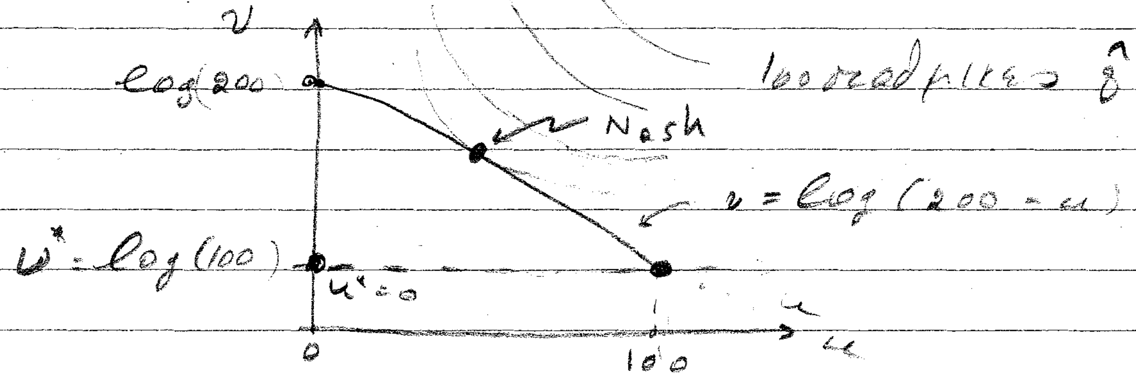
Τα $\bar{u}, \bar{v}$ όπου επιτυγχάνεται το μέγιστο δίνουν το ϕ.

Εφαρμογή (Owen VII.2.5 με παραλλαγές)

Προσφέρεται σε δύο παίκτες το ποσό των 100 € αν μπορέσουν να το μοιράσουν μεταξύ των. Ο πρώτος είναι εύπορος και χαρακτηρίζεται από γραμμική ωφελιμότητα. Ο δεύτερος έχει λογαριθμική ωφελιμότητα με σταθερά ίση με 100, οπότε η ωφελιμότητα ενός ποσού x είναι $\log(x+100)$. Πώς θα κατανεμηθεί το ποσό; ($\log$: Νεπέριος λογάριθμος!)

Είναι $u^* = 0$ καθώς ο I δεν μπορεί να εξασφαλίσει ποσό διάφορο του 0, αν αρνηθεί να συμφωνήσει ο II. Το ίδιο ισχύει και για τον II, οπότε $v^* = \log(100)$.

Το σύνολο Pareto θα προκύψει αν υπάρξει συμφωνία στο x για τον II και $100-x$ για τον I, δηλαδή $u = 100 - x$ $\quad v = \log(100+x)$ ή απαλείφοντας το x, $v = \log(100+100-u) = \log(200-u)$ που φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Το σημείο Nash μεγιστοποιεί την παράσταση

$$g(u,v) = (u-0)(v-\log 100)$$

που στο σύνολο Pareto γίνεται

$$\hat{g}(u) = g^{PARETO}(u,v) = u(\log(200-u) - \log 100) = u\log\left(2-\frac{u}{100}\right)$$

Παραγωγίζοντας την $\hat{g}(u)$ έχουμε

$$\log\left(2-\frac{u}{100}\right) - \frac{u}{200-u} = 0$$

Λύνοντας αριθμητικά την παραπάνω σχέση προκύπτει $\bar{u} = 54,4$ και $\bar{v} = 45,6$.
Το αποτέλεσμα ερμηνεύεται ως εξής: Ο παίκτης II ικανοποιείται για μικρά σχετικώς ποσά, καθώς η ωφελιμότητά του αυξάνεται με χαμηλό ρυθμό καθώς αυξάνονται τα ποσά. Καθώς η λύση Nash εξισώνει τον οριακό ρυθμό αύξησης της ωφελιμότητας, ο I δείχνει ότι έχει μεγαλύτερη διαπραγματευτική δύναμη.

<u>Άσκηση</u> Επαναλάβετε τους υπολογισμούς αν η ωφελιμότητα του II είναι $\log(x+50)$
(Απάντηση: $\bar{u} = 57,27$)