E7 Βελτιστοποίηση στην Κατανάλωση

Θεωρούμε ότι η χρησιμότητα που αποφέρει η κατανάλωση αγαθών είναι κάποια συνάρτηση των ποσοτήτων κατανάλωσης. Θα αναφερθούμε σε ορισμένες απλές συναρτήσεις χρησιμότητας με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, όπως είναι οι γραμμικές, οι λογαριθμικές τύπου Cobb-Douglas ή τύπου Stone-Geary, οι τύπου Leontief, οι ημιγραμμικές, οι ομογενείς και γενικότερα οι ομοθετικές. Λύνοντας το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας βρίσκουμε την κανονική ζήτηση αγαθών κατά Marshall, ως συνάρτηση των τιμών τους και του διαθέσιμου εισοδήματος η οποία μπορεί να εκφράζεται σε χρήμα ή σε κατοχή αγαθών προς ανταλλαγή. Από τις ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων προκύπτουν διάφοροι χαρακτηρισμοί των αγαθών όπως: κανονικό-κατώτερο, αναγκαίο-πολυτελείας, συνηθισμένο-Giffen, υποκατάστατο-συμπληρωματικό. Το συμμετρικό του προβλήματος μεγιστοποίησης της χρησιμότητας αφορά την ελαχιστοποίηση της δαπάνης. Μας δίνει την αντισταθμισμένη ζήτηση αγαθών κατά Hicks, ως συνάρτηση των τιμών τους και της επιδιωκόμενης χρησιμότητας. Βασικό χαρακτηριστικό των παραπάνω δύο προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι η δυνατότητα υποκατάστασης μεταξύ των αγαθών στη χρησιμότητα και στη δαπάνη. Σε επόμενη ενότητα εξετάζουμε αντίστοιχα προβλήματα στην παραγωγή με δυνατότητα υποκατάστασης μεταξύ συντελεστών παραγωγής. Η μαθηματική αντιστοιχία μεταξύ των δύο θεωριών επιτρέπει την μεταφορά των αποτελεσμάτων από το ένα πλαίσιο στο άλλο.

1. Εισοδηματικός περιορισμός. Υποθέτοντας ανταγωνιστικές συνθήκες στην αγορά αγαθών με την έννοια ότι οι μοναδιαίες τιμές τους είναι εξωγενώς καθορισμένες και δεν επηρεάζονται από την ζήτηση, το κόστος κατανάλωσης δύο αγαθών σε ποσότητες $\{X, Y\}$ με μοναδιαίες τιμές $\{v, w\}$, θα είναι:

$$C = vX + wY$$

Αν το διαθέσιμο εισόδημα προς κατανάλωση είναι c, τότε οι *επιτρεπτοί* ή *εφικτοί* συνδυασμοί κατανάλωσης είναι αυτοί που ικανοποιούν την ανισότητα:

$$C = vX + wY \le c \quad \text{με } X \ge 0,\ Y \ge 0$$

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τα αντίστοιχα σημεία ορίζουν μια τριγωνική περιοχή του επιπέδου που είναι η κάτω σταθμική της αντίστοιχης ευθείας *ισοκόστους* (isocost):

$$C = vX + wY = c \quad \text{με κλίση } m = -\frac{v}{w}$$

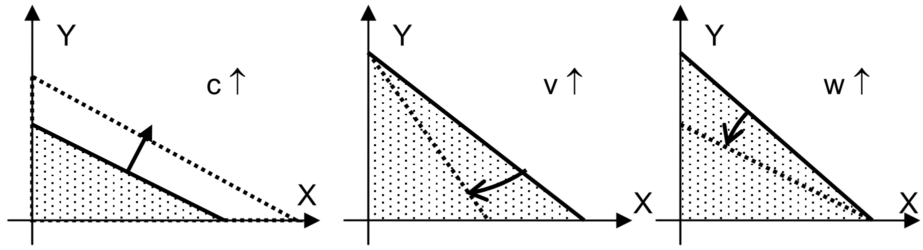
Καλείται και *περιοχή κατανάλωσης.* Ο ρυθμός υποκατάστασης μεταξύ των αγαθών με διατήρηση του κόστους είναι σταθερός ίσος με την κλίση της ευθείας ισοκόστους:

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{v}{w}$$

Θα χρησιμοποιούμε και τον όρο *εισοδηματικός περιορισμός* (budget constraint), για να περιγράψουμε είτε την περιοχή κατανάλωσης είτε τον εισοδηματικό περιορισμό. Έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Όταν αυξάνει το εισόδημα c η ευθεία ισοκόστους μετατοπίζεται παράλληλα στον εαυτό της προς τα έξω. Η περιοχή κατανάλωσης μεγαλώνει.
2. Όταν αυξάνει η τιμή v του αγαθού X στον οριζόντιο άξονα, τότε η κλίση της μεγαλώνει καθώς περιστρέφεται περί το σημείο τομής με τον κατακόρυφο άξονα. Η περιοχή κατανάλωσης μικραίνει.

3. Όταν αυξάνει η τιμή w του αγαθού Y στον κατακόρυφο άξονα, τότε η κλίση της μικραίνει καθώς περιστρέφεται περί το σημείο τομής με τον οριζόντιο άξονα. Η περιοχή κατανάλωσης μικραίνει.



εισοδηματικός περιορισμός: $C = vX + wY \le c$

2. Μεγιστοποίηση χρησιμότητας. Θεωρούμε δύο αγαθά $\{X,Y\}$ με μοναδιαίες τιμές $\{v,w\}$ και υποθέτουμε ότι η κατανάλωσή τους αποφέρει χρησιμότητα $U = U(X,Y)$ με κόστος $C = vX + wY$. Το βασικό πρόβλημα βελτιστοποίησης στην κατανάλωση αφορά την μεγιστοποίηση της χρησιμότητας με περιορισμό στο κόστος:

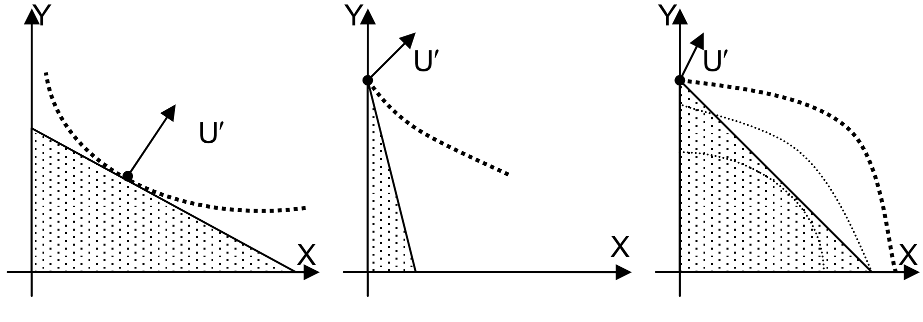
$$\max_{\{X,Y\}}\{U = U(X,Y) \,||\, C = vX + wY \le c\}$$

Υποθέτοντας την συνάρτηση χρησιμότητας γνήσια αύξουσα, η βέλτιστη κατανάλωση θα εξαντλήσει τον εισοδηματικό περιορισμό του κόστους και έτσι θα βρούμε την ίδια λύση αν στον περιορισμό αντικαταστήσουμε την ανισότητα με ισότητα:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = U(X,Y) \,||\, C = vX + wY = c\}$$

Η λύση του προβλήματος βρίσκεται στο σημείο του εισοδηματικού περιορισμού που συναντάει την ισοσταθμική με την υψηλότερη χρησιμότητα. Γενικά η λύση θα είναι εσωτερική όπως στο πρώτο γράφημα του παρακάτω σχήματος οπότε και θα είναι περιορισμένη στάσιμη:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{U_X}{U_Y} = \dfrac{C_X}{C_Y} \\ C = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{U_X}{U_Y} = \dfrac{v}{w} \\ vX + wY = c \end{array}\right\}$$



εσωτερική και συνοριακή κατανάλωση

Σε ειδικές περιπτώσεις η λύση θα είναι συνοριακή. Αυτό συμβαίνει όταν οι μοναδιαίες τιμές είναι ακραίες όπως στο δεύτερο γράφημα ή όταν η συνάρτηση χρησιμότητας δεν είναι κανονική, π.χ. είναι οιονεί κυρτή αντί για οιονεί κοίλη, όπως στο τρίτο γράφημα. Αυτό το τελευταίο εμφανίζεται όταν δύο αγαθά είναι ασυμβίβαστα και δεν συνδυάζονται οπότε υπάρχει προτίμηση για ακραίους συνδυασμούς, παρά για ενδιάμεσους, δηλαδή υπάρχει προτίμηση για κατανάλωση μόνο του ενός ή μόνο του άλλου. Σαν συνέπεια η συνάρτηση χρησιμότητας θα έχει χαμηλότερες τιμές στους ενδιάμεσους συνδυασμούς, δηλαδή θα είναι οιονεί κυρτή αντί να είναι οιονεί κοίλη, οπότε η στάσιμη λύση Lagrange δίνει ελάχιστη χρησιμότητα όπως φαίνεται στο τρίτο γράφημα, και το μέγιστο θα βρίσκεται στο σύνορο όπου θα καταναλώνεται μόνο το ένα αγαθό.

□

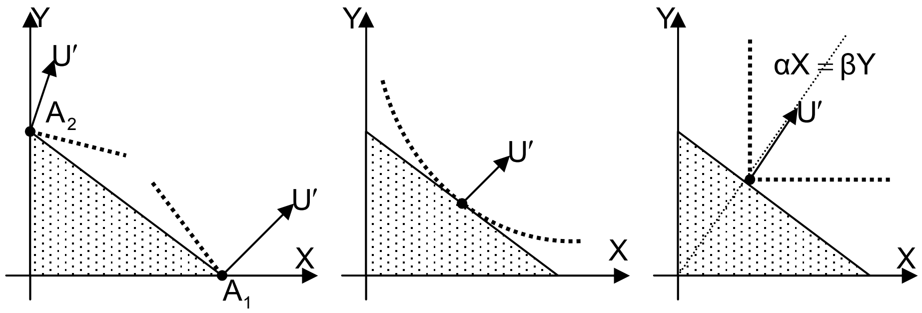
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη βέλτιστη κατανάλωση για τρεις χαρακτηριστικούς τύπους συνάρτησης χρησιμότητας:

1. $U = \alpha X + \beta Y$ *: γραμμική*

2. $U = \ln X^{\alpha} Y^{\beta} = \alpha \ln X + \beta \ln Y$ *: λογαριθμική Cobb-Douglas (C-D)*

3. $U = \min\{\alpha X, \beta Y\}$ *: Leontief*

Όπως φαίνεται και στα γραφήματα του παρακάτω σχήματος, είναι όλες τους οιονεί κοίλες και εφόσον ο περιορισμός είναι γραμμικός το περιορισμένο στάσιμο θα δίνει ολικό μέγιστο. Οι συντελεστές $\{\alpha, \beta\}$ είναι γνήσια θετικοί.



γραμμική Cobb-Douglas Leontief

μεγιστοποίηση χρησιμότητας: $\max_{\{X,Y\}}\{U = U(X,Y) \,||\, C = vX + wY = c\}$

Παρατήρηση. Υπενθυμίζουμε ότι θα βρούμε τις ίδιες λύσεις αν αντί των παραπάνω χρησιμοποιήσουμε διατακτικά ισοδύναμες συναρτήσεις. Π.χ. αντί της γραμμικής, τις συναρτήσεις:

$\alpha X + \beta Y + \gamma,\ (\alpha X + \beta Y)^2,\ \ln(\alpha X + \beta Y), \ldots$

αντί της C-D τις συναρτήσεις:

$AX^{\alpha}Y^{\beta},\ (X^{\alpha}Y^{\beta})^{s} = X^{s\alpha}Y^{s\beta}$

κλπ. Ειδικά, αυτό μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι οι δύο συντελεστές $\{\alpha, \beta\}$ αθροίζουν σε 1:

$\alpha + \beta = 1$

διότι σε κάθε περίπτωση μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τις συναρτήσεις με $1/(\alpha + \beta)$. Δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε τους δύο συντελεστές ως *βάρη* όσον αφορά την προτίμηση στα δύο αγαθά.

□

3. Γραμμική χρησιμότητα: $U = \alpha X + \beta Y$

Χαρακτηρίζεται από σταθερό ρυθμό υποκατάστασης μεταξύ των αγαθών στη χρησιμότητα:

$$U = \alpha X + \beta Y = u \Rightarrow dU = \alpha dX + \beta dY = 0 \Rightarrow \frac{dY}{dX} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Δηλαδή, β μονάδες του $X-$αγαθού υποκαθιστούν πάντοτε α μονάδες του $Y-$αγαθού. Λέμε ότι τα δύο αγαθά είναι *τέλεια υποκατάστατα* (perfect substitutes) στην κατανάλωση. Όπως φαίνεται και στο πρώτο γράφημα του παραπάνω σχήματος η λύση θα είναι γενικά συνοριακή οπότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Lagrange. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες Kuhn-Tucker ή να βρούμε τη λύση απευθείας αντικαθιστώντας από τον περιορισμό. Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε την λύση γραφικά ως την κορυφή με την μεγαλύτερη χρησιμότητα. Υπολογίζουμε πρώτα την χρησιμότητα στις δύο κορυφές:

$$A_1:\left\{X_1=\frac{c}{v},\ Y_1=0\right\}\Rightarrow U_1=\frac{\alpha}{v}c \qquad A_2:\left\{X_2=0,\ Y_2=\frac{c}{w}\right\}\Rightarrow U_1=\frac{\beta}{w}c$$

Η λύση θα είναι:

$$A_1:\left\{X_1=\frac{c}{v},\ Y_1=0\ \text{αν}\ \frac{v}{\alpha}\le\frac{w}{\beta}\right\},\ A_2:\left\{X_2=0,\ Y_2=\frac{c}{w}\ \text{αν}\ \frac{w}{\beta}\le\frac{v}{\alpha}\right\}$$

Δηλαδή προτιμούμε το αγαθό που είναι σχετικά φθηνότερο παίρνοντας δηλαδή υπόψη και το σχετικό βάρος όσον αφορά την προτίμηση.

4. Λογαριθμική χρησιμότητα τύπου Cobb-Douglas (C-D):

$$U=\ln X^{\alpha}Y^{\beta}=\alpha\ln X+\beta\ln Y$$

Όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα του παραπάνω σχήματος οι καμπύλες αδιαφορίας είναι υπερβολικές, και χαρακτηρίζονται από σταθερό ποσοστιαίο ρυθμό υποκατάστασης μεταξύ των αγαθών. Πράγματι, οι επιμέρους ελαστικότητες είναι σταθερές $\{\alpha,\beta\}$ αντίστοιχα, οπότε για σταθερή χρησιμότητα βρίσκουμε:

$$U=\ln X^{\alpha}Y^{\beta}=u\Rightarrow \%dU=\alpha(\%dX)+\beta(\%dY)=0\Rightarrow\frac{\%dY}{\%dX}=-\frac{\alpha}{\beta}$$

Δηλαδή, β% του $X-$αγαθού υποκαθιστά πάντοτε α% του $Y-$αγαθού, οριακά. Όπως φαίνεται και στο δεύτερο γράφημα του παραπάνω σχήματος η λύση θα είναι πάντοτε εσωτερική και επομένως περιορισμένη στάσιμη. Οι εξισώσεις Lagrange μας δίνουν τη λύση:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{U_X}{U_Y}=\frac{v}{w}\\&C=c\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\frac{\alpha Y}{\beta X}=\frac{v}{w}\\&vX+wY=c\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{c}{v},\ y=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{c}{w}$$

Παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα των μοναδιαίων τιμών τους, η δαπάνη για το κάθε αγαθό είναι μια σταθερή αναλογία της συνολικής δαπάνης, σε αντιστοιχία με τα βάρη προτίμησης:

$$vx=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}c,\ wy=\frac{\beta}{\alpha+\beta}c\ \Rightarrow\frac{vx}{wy}=\frac{\alpha}{\beta}\ .$$

5. Χρησιμότητα τύπου Leontief: $U=\min\{\alpha X,\beta Y\}$

Όπως διαπιστώνουμε από το τρίτο γράφημα καμπύλων αδιαφορίας του παραπάνω σχήματος, τώρα δεν υπάρχει υποκατάσταση μεταξύ των δύο αγαθών. Τα αγαθά καταναλώνονται στη σταθερή αναλογία που δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha X=\beta Y\Rightarrow\frac{Y}{X}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Οτιδήποτε περίσσευμα του ενός ή του άλλου αγαθού δεν προσφέρει επιπλέον χρησιμότητα. Λέμε ότι τα δύο αγαθά είναι *τέλεια συμπληρώματα* (perfect complements). Αναλυτικά η λύση μπορεί να βρεθεί με αντικατάσταση χρησιμοποιώντας την τμηματικά ορισμένη συνάρτηση χρησιμότητας. Γραφικά, όπως διαπιστώνουμε στο τρίτο γράφημα του παραπάνω σχήματος, η λύση βρίσκεται πάντοτε στην κορυφή όπου ο εισοδηματικός περιορισμός κόβει την παραπάνω ευθεία:

$$\{vX+wY=c\ \&\ \alpha X=\beta Y\}\Rightarrow x=\frac{\beta}{\beta v+\alpha w}c,\ y=\frac{\alpha}{\beta v+\alpha w}c$$

Τώρα το ποσοστό της δαπάνης για το κάθε αγαθό αυξάνει με την τιμή του. Μάλιστα ο λόγος των αντίστοιχων δαπανών είναι:

$$\frac{vx}{wy}=\frac{\beta v}{\alpha w}$$

6. Κανονική ζήτηση κατά Marshall. Θεωρούμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας με εισοδηματικό περιορισμό:

$$\max_{\{X,Y\}}\{U = U(X,Y) \| C = vX + wY = c\}$$

Στην παραπάνω γενική μορφή του προβλήματος εμφανίζονται τρεις παράμετροι $\{v,w,c\}$ που εκφράζουν τις μοναδιαίες τιμές των αγαθών και το διαθέσιμο εισόδημα. Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης, π.χ. με απλή αντικατάσταση από τον περιορισμό ή με την μέθοδο Lagrange, θα βρούμε τις βέλτιστες ποσότητες κατανάλωσης ως συναρτήσεις των παραμέτρων:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(v,w,c) \\ y &= y(v,w,c) \end{aligned}\right\} \textit{κανονικές συναρτήσεις ζήτησης (κατά Marshall)}$$

Είναι οι συναρτήσεις ζήτησης των δύο αγαθών εκφρασμένες μέσω των τιμών τους και της δαπάνης του διαθέσιμου εισοδήματος. Παρατηρούμε ότι:

Οι κανονικές συναρτήσεις ζήτησης είναι ομογενείς μηδενικού βαθμού ως προς τις τρεις παραμέτρους δηλαδή εξαρτώνται μόνο από τους λόγους: $\{v/c,\ w/c\}$. *Λέμε ότι δεν υπάρχει ψευδαίσθηση χρήματος.*

Απόδειξη. Για εσωτερικές λύσεις το παραπάνω συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια των εξισώσεων περιορισμένης στασιμότητας. Γενικώτερα, παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε και τις τρεις παραμέτρους με τον ίδιο συντελεστή, ο περιορισμός θα μείνει ο ίδιος:

$$vX + wY \le c \Leftrightarrow (tv)X + (tw)Y \le (tc)$$

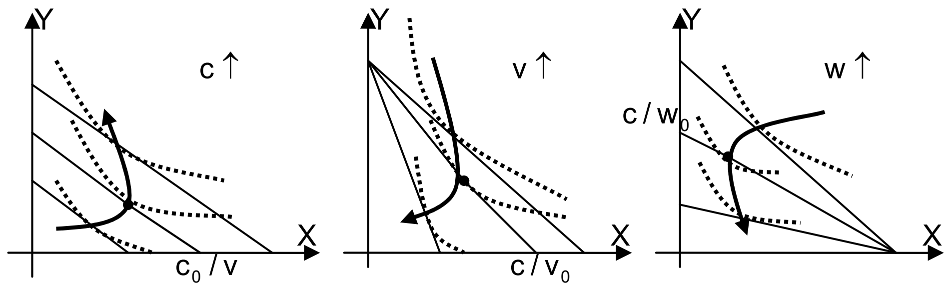
Επομένως η λύση δεν θα μεταβληθεί, που είναι το ζητούμενο.

□

7. Τροχιές ανάπτυξης. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την εξάρτηση της ζήτησης από την κάθε παράμετρο. Καθώς μια από τις παραμέτρους $\{v,w,c\}$ μεταβάλλεται, η ευθεία του εισοδηματικού περιορισμού μετακινείται και ο καταναλωτής αντιμετωπίζει καινούργιους συνδυασμούς αγαθών μεταξύ των οποίων καλείται να επιλέξει αυτόν με την μεγαλύτερη χρησιμότητα. Στο παρακάτω σχήμα δείχνουμε τα εξής:

1. Στο πρώτο γράφημα ο εισοδηματικός περιορισμός μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του όταν αυξάνει μόνο το εισόδημα c.
2. Στο δεύτερο γράφημα ο εισοδηματικός περιορισμός περιστρέφεται προς μεγαλύτερη κλίση καθώς αυξάνει μόνο η τιμή v του αγαθού στον οριζόντιο άξονα
3. Στο τρίτο γράφημα ο εισοδηματικός περιορισμός περιστρέφεται προς μικρότερη κλίση καθώς αυξάνει μόνο η τιμή w του αγαθού στον κατακόρυφο άξονα.

Σε κάθε περίπτωση η λύση ορίζει ένα σημείο (x,y) στον εισοδηματικό περιορισμό, και καθώς μια παράμετρος μεταβάλλεται το σημείο αυτό μετακινείται στο επίπεδο σχηματίζοντας μια τροχιά η οποία καλείται *τροχιά ανάπτυξης*.



τροχιές ανάπτυξης

Στα γραφήματα του παραπάνω σχήματος δείχνουμε με μαύρη καμπύλη ενδεικτικές τροχιές ανάπτυξης ως προς την διαθέσιμη δαπάνη c και ως προς τις τιμές των αγαθών. Χρησιμοποιούμε και τις παρακάτω ορολογίες.

1. Καθώς η διαθέσιμη δαπάνη c αυξάνει λέμε ότι ένα αγαθό είναι *κανονικό* αν η κατανάλωσή του επίσης αυξάνει, και ότι είναι *κατώτερο* αν αντίθετα η κατανάλωσή του ελαττώνεται. Στο πρώτο γράφημα του παραπάνω σχήματος, το δεύτερο αγαθό Y είναι πάντοτε κανονικό ενώ το πρώτο αγαθό X είναι κανονικό για εισοδήματα μικρότερα του c_0, αλλά γίνεται κατώτερο για μεγαλύτερα εισοδήματα.

2. Καθώς η μοναδιαία τιμή ενός αγαθού αυξάνει λέμε ότι το αγαθό είναι *συνηθισμένο* (ordinary) αν η κατανάλωσή του ελαττώνεται και ότι είναι τύπου *Giffen* αν αντίθετα η κατανάλωσή του αυξάνει. Για το άλλο αγαθό λέμε ότι είναι *υποκατάστατο* (substitute) αν η κατανάλωσή του αυξάνει και ότι είναι *συμπληρωματικό* (complement) αν η κατανάλωσή του ελαττώνεται. Στο δεύτερο γράφημα του παραπάνω σχήματος καθώς η τιμή v του πρώτου αγαθού X αυξάνει, το αγαθό είναι τύπου Giffen για τιμές μικρότερες του v_0 και συνηθισμένο για μεγαλύτερες, ενώ το δεύτερο αγαθό Y στον κατακόρυφο άξονα είναι συμπληρωματικό. Τέλος στο τρίτο γράφημα καθώς η τιμή w του αγαθού Y στον κατακόρυφο άξονα αυξάνει το ίδιο αγαθό είναι συνηθισμένο και η κατανάλωσή του πέφτει, ενώ το δεύτερο αγαθό X στον οριζόντιο άξονα είναι συμπληρωματικό για τιμές μικρότερες του w_0 και υποκατάστατο για μεγαλύτερες τιμές.

Παράδειγμα. Στα τρία γραφήματα του παρακάτω σχήματος δείχνουμε για τα τρία παραδείγματα που εξετάσαμε πως μεταβάλλεται η ζήτηση για τα δύο αγαθά καθώς η τιμή v του πρώτου αγαθού X αυξάνει. Σόλες τις περιπτώσεις τα αγαθά είναι κανονικά ως προς την δαπάνη και συνηθισμένα ως προς την τιμή τους. Όσον αφορά την μεταξύ τους σχέση, είναι υποκατάστατα στην γραμμική χρησιμότητα, ουδέτερα στην χρησιμότητα Cobb-Douglas, και συμπληρωματικά στην χρησιμότητα Leontief. Ειδικότερα, καθώς το v αυξάνει παρατηρούμε τα εξής:

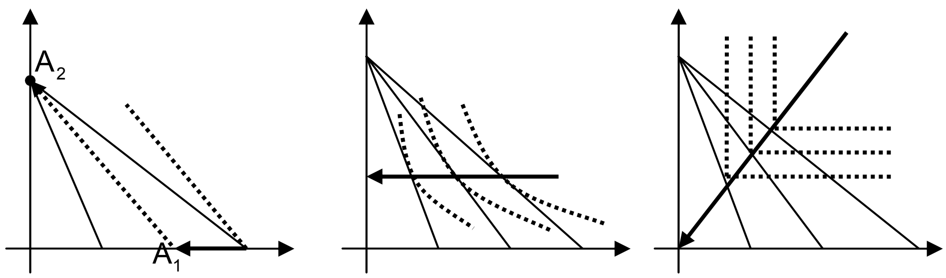
1. Στην γραμμική χρησιμότητα, για χαμηλά v καταναλώνεται μόνο το X, σε φθίνουσα ποσότητα καθώς το v αυξάνει, όπως δείχνει το μαύρο βέλος στο πρώτο γράφημα. Μόλις η κλίση του περιορισμού περάσει την κλίση της χρησιμότητας:

$$\frac{v}{w} \geq \frac{\alpha}{\beta}$$

η κατανάλωση περνάει απότομα από την κορυφή A_1 στην κορυφή A_2 του περιορισμού, όπου καταναλώνεται μόνο το Y σε σταθερή ποσότητα καθώς το v αυξάνει.

2. Στη χρησιμότητα τύπου Cobb-Douglas, η κατανάλωση του X πέφτει ενώ του Y μένει σταθερή.

3. Στη χρησιμότητα τύπου Leontief η κατανάλωση αμφότερων των αγαθών πέφτει.



γραμμική Cobb-Douglas Leontief

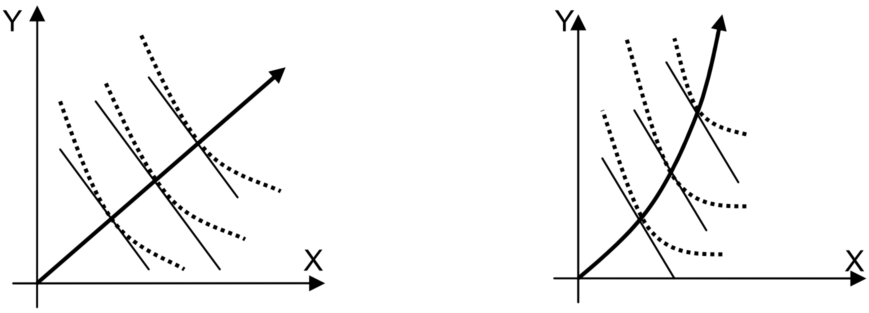
τροχιές ανάπτυξης

□

8. Ομοθετική χρησιμότητα-Καμπύλη Engel. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η *εισοδηματική τροχιά ανάπτυξης*. Καλείται και *καμπύλη Engel.* Στα τρία παραδείγματα που εξετάσαμε: γραμμική, Cobb-Douglas, και Leontief, η εξάρτηση της κατανάλωσης από το εισόδημα είναι γραμμική ομογενής:

$$x = Ac,\ y = Bc$$

οπότε και η τροχιά ανάπτυξης ως προς το εισόδημα είναι ευθεία, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα του παρακάτω σχήματος. Ο λόγος είναι ότι αυτές οι τρεις συναρτήσεις χρησιμότητας είναι ομογενείς. Οι ομογενείς συναρτήσεις, και γενικότερα οι ομοθετικές όπως καλούνται οι μονότονοι μετασχηματισμοί τους, έχουν την χαρακτηριστική ιδιότητα ότι οι καμπύλες αδιαφορίας έχουν σταθερή κλίση κατά μήκος κάθε ακτίνας διότι ο ρυθμός υποκατάστασης dY/dX εξαρτάται μόνο από το λόγο Y/X, δηλαδή είναι σταθερός κατά μήκος μιας ακτίνας. Επομένως καθώς το εισόδημα c αυξάνει και η ευθεία του εισοδηματικού περιορισμού μετακινείται παράλληλα, το σημείο επαφής με τις καμπύλες αδιαφορίας θα σχηματίζει ως τροχιά την ευθεία της αντίστοιχης ακτίνας. Συμπεραίνουμε ότι: *Για ομογενείς ή γενικότερα ομοθετικές συναρτήσεις χρησιμότητας η κατανάλωση είναι ισοελαστική ως προς το διαθέσιμο εισόδημα. Κάθε ποσοστιαία αύξηση του εισοδήματος προκαλεί την ίδια ποσοστιαία αύξηση στη ζήτηση των αγαθών.*



εισοδηματική τροχιά ανάπτυξης

Σε αντίθεση με τα παραπάνω, λέμε ότι ένα κανονικό αγαθό είναι *αναγκαίο* (necessity) αν η κατανάλωσή του είναι ανελαστική ως προς το εισόδημα, και *πολυτελείας* (luxury) αν είναι ελαστική. Έτσι όταν το διαθέσιμο εισόδημα μεταβάλλεται, η κατανάλωση του αναγκαίου αγαθού θα μεταβληθεί κατά μικρότερο ποσοστό από το εισόδημα και του πολυτελείας κατά μεγαλύτερο ποσοστό. Στο δεύτερο γράφημα του παραπάνω σχήματος δείχνουμε μια τροχιά ανάπτυξης που κλείνει προς τον $Y-$άξονα, οπότε το $Y-$αγαθό είναι πολυτελείας ενώ το $X-$αγαθό είναι αναγκαίο.

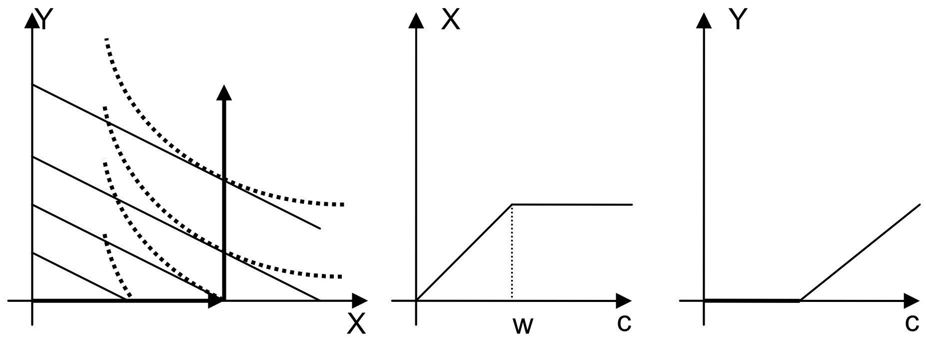
9. Ημιγραμμική (semilinear) καλείται η συνάρτηση χρησιμότητας της μορφής:

$$U = f(X) + \beta Y$$

Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες αδιαφορίας είναι κατακόρυφες μετατοπίσεις η μία της άλλης. Πράγματι, οι καμπύλες:

$$f(X) + \beta Y = u \Rightarrow Y = -f(X)/\beta + u/\beta$$

προκύπτουν από την $Y = -f(X)/\beta$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά u/β. Επομένως η κλίση θα είναι ίδια κατά μήκος της κάθε κατακόρυφης και συμπεραίνουμε όπως και στην περίπτωση των ομοθετικών συναρτήσεων χρησιμότητας ότι καθώς το εισόδημα αυξάνει, η τροχιά ανάπτυξης θα είναι κατακόρυφη ευθεία, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα παρακάτω. Δηλαδή καθώς το εισόδημα αυξάνει η κατανάλωση του πρώτου αγαθού X παραμένει σταθερή και όλο το επιπλέον εισόδημα αναλώνεται στο δεύτερο αγαθό Y.



ημιγραμμική χρησιμότητα

Παράδειγμα. Για το παρακάτω πρόβλημα με ημιγραμμική συνάρτηση χρησιμότητας:

$$\max\{U = \ln X + Y \parallel C = vX + wY = c\}$$

βρίσκουμε τη λύση με αντικατάσταση:

$$U = \ln X + \frac{1}{w}(c - vX) \Rightarrow U' = \frac{1}{X} - \frac{v}{w} = 0 \Rightarrow X = \frac{w}{v},\ Y = \frac{c}{w} - 1$$

Η λύση ισχύει μόνο εφόσον $Y \geq 0 \Rightarrow c \geq w$, άλλως το Y θα είναι συνοριακό μηδενικό, όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα παραπάνω, όπου δείχνουμε και την τροχιά ανάπτυξης καθώς η δαπάνη αυξάνει. Συμπεραίνουμε ότι ανάλογα του εισοδήματος, η λύση είναι:

1. $c \leq w \Rightarrow \left\{X = \frac{c}{v},\ Y = 0\right\}$ 2. $c \geq w \Rightarrow \left\{X = \frac{w}{v},\ Y = \frac{c - w}{w}\right\}$

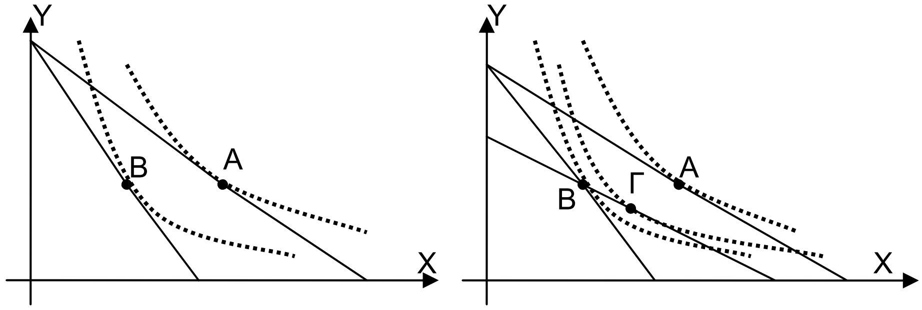
Δηλαδή εφόσον το εισόδημα είναι μικρό αναλώνεται όλο στο πρώτο αγαθό X μέχρι ένα επίπεδο κατανάλωσης και μετά μένει σταθερό, όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα. Στη συνέχεια όλο το επιπλέον εισόδημα αναλώνεται στο δεύτερο αγαθό Y όπως φαίνεται στο τρίτο γράφημα παραπάνω. Παρατηρούμε ότι μετά από κάποιο εισόδημα: $c \geq w$, η κατανάλωση του πρώτου αγαθού γίνεται σταθερή και επομένως ανελαστική ως προς το εισόδημα, ενώ του δεύτερου γίνεται ελαστική ως προς το εισόδημα. Δηλαδή το πρώτο αγαθό γίνεται αναγκαίο και το δεύτερο γίνεται πολυτελείας.

□

10. Φόρος μπορεί να επιβληθεί είτε έμμεσα φορολογώντας κάποιο είδος στην κατανάλωση όπως είναι ο γνωστός ΦΠΑ, είτε άμεσα φορολογώντας το εισόδημα. Στην πρώτη περίπτωση ο καταναλωτής αντιμετωπίζει αύξηση στην τιμή ενός προϊόντος, ενώ στην δεύτερη αντιμετωπίζει μείωση του διαθέσιμου εισοδήματος. Θα δείξουμε ότι, αν πρέπει να φορολογηθεί, ο καταναλωτής προτιμά την δεύτερη περίπτωση. Έστω $\{v, w\}$ οι μοναδιαίες τιμές πριν το φόρο και $\{v + t, w\}$ μετά. Ο νέος εισοδηματικός περιορισμός θα είναι:

$$(v + t)x + wy = c$$

Δηλαδή αυξάνει η τιμή του πρώτου αγαθού X στον οριζόντιο άξονα και, με σταθερό εισόδημα c, ο καταναλωτής θα προσαρμόσει την κατανάλωση όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα παρακάτω, πηγαίνοντας από τον αρχικό συνδυασμό $A:(x, y)$ στον νέο συνδυασμό $B:(x', y')$.



έμμεσος στην κατανάλωση (ΦΠΑ) άμεσος φόρος εισοδήματος

φόρος στην κατανάλωση

Η συνολική φορολογία θα είναι tx'. Εξετάζουμε τώρα και την περίπτωση που συλλέγεται ο ίδιος φόρος απευθείας από το εισόδημα, οπότε ο καταναλωτής θα αντιμετωπίζει τις ίδιες τιμές αλλά με μειωμένο εισόδημα. Ο εισοδηματικός περιορισμός θα μετακινηθεί παράλληλα:

$$vx + wy = c - tx'$$

Παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός $B:(x', y')$ ικανοποιεί και τον νέο περιορισμό, δηλαδή ο καταναλωτής έχει την δυνατότητα να τον επιλέξει, οπότε μπορεί να πετύχει τουλάχιστον την ίδια χρησιμότητα. Στην πραγματικότητα ο καταναλωτής θα επιλέξει νέο συνδυασμό $\Gamma:(x'', y'')$ με μεγαλύτερη χρησιμότητα από το Β όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα, αλλά βέβαια μικρότερη από το αρχικό Α.

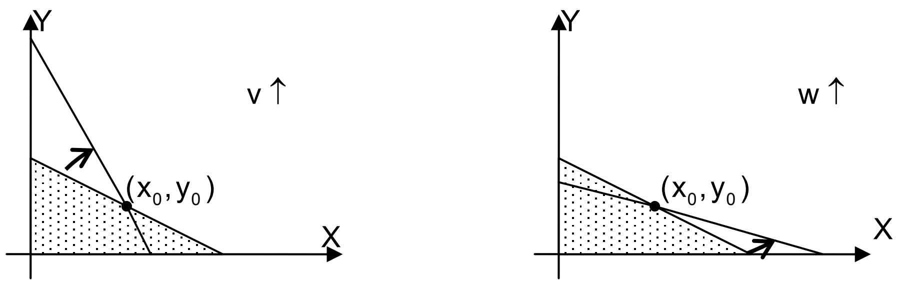
11. Αρχικός πλούτος. Έχουμε εξετάσει εισοδηματικούς περιορισμούς της μορφής:

$$vx + wy \le c$$

όπου οι τρεις παράμετροι $\{v, w, c\}$ είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Σε πολλές περιπτώσεις το εισόδημα είναι σε μορφή κατοχής ποσότητας του ενός η αμφοτέρων των αγαθών οπότε εξαρτάται από τις τιμές τους. Έτσι αν υποθέσουμε ότι ο καταναλωτής κατέχει *αρχικό πλούτο* (initial endowment) στη μορφή ποσότητας αγαθών (x_0, y_0) τις οποίες μπορεί να διαθέσει στις τρέχουσες τιμές, τότε ο εισοδηματικός περιορισμός θα έχει την μορφή:

$$vx + wy = vx_0 + wy_0$$

Είναι μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0). Καθώς οι τιμές μεταβάλλονται ο εισοδηματικός περιορισμός περιστρέφεται όπως και προηγουμένως αλλά τώρα γύρω από αυτό το σταθερό σημείο. Γίνεται πιο κατακόρυφη όταν αυξάνει το v όπως στο πρώτο γράφημα παρακάτω, και πιο οριζόντια όταν αυξάνει το w όπως στο δεύτερο γράφημα.



αρχικός πλούτος: $vx + wy \le vx_0 + wy_0$

Σε άλλες περιπτώσεις ο καταναλωτής μπορεί να έχει μόνο ένα μέρος του εισοδήματος στη μορφή ποσότητας του ενός αγαθού, π.χ. x_0, οπότε ο εισοδηματικός περιορισμός θα έχει την μορφή:

$$vx + wy = vx_0 + c$$

Τώρα καθώς το c μεταβάλλεται η ευθεία μετατοπίζεται παράλληλα όπως και προηγουμένως. Για να διαπιστώσουμε τι συμβαίνει όταν το v μεταβάλλεται αναδιατυπώνουμε την εξίσωση στη μορφή:

$$vx + wy = vx_0 + wy_0 \quad \text{όπου} \quad wy_0 = c \Rightarrow y_0 = c / w$$

Βρισκόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση και επομένως καθώς το v μεταβάλλεται θα περιστρέφεται περί αυτό το σημείο. Ειδικότερα γίνεται πιο απότομη όσο το v αυξάνει, όπως στο πρώτο γράφημα παραπάνω. Σε κάθε περίπτωση όταν λύνουμε ένα πρόβλημα με αρχικές ποσότητες θα πρέπει να διακρίνουμε τη *συνολική ζήτηση* (total demand) που είναι οι τελικές ποσότητες: (x, y) από την *καθαρή ζήτηση* (net demand) που είναι η διαφορά τους από τις αρχικές ποσότητες: $(x - x_0, y - y_0)$. Αν είναι θετική έχουμε αγορά ενώ αν είναι αρνητική έχουμε πώληση. Επίσης η συμπεριφορά της ζήτησης ως προς μεταβολές στις τιμές είναι τώρα περισσότερο πολύπλοκη, διότι μια μεταβολή στην τιμή ενός προιόντος το κάνει πιο ακριβό αλλά ταυτόχρονα αυξάνει και τον διαθέσιμο πλούτο. Στο τέλος αυτής της ενότητας θα εξετάσουμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

12. Αντισταθμισμένη ζήτηση κατά Hicks. Λύνοντας το πρόβλημα για μέγιστη χρησιμότητα εκφράσαμε τις βέλτιστες ποσότητες κατανάλωσης των δύο αγαθών ως συναρτήσεις των μοναδιαίων τιμών τους και της διαθέσιμης δαπάνης:

$$\max\{U(X, Y) \,||\, C = vX + wY \le c\} \Rightarrow \begin{cases} x = X(v, w, c\} \\ y = Y(v, w, c\} \end{cases}$$

Βρήκαμε έτσι τις κανονικές συναρτήσεις ζήτησης κατά Marshall που είναι οι γνωστές συναρτήσεις ζήτησης αγαθών. Στη γενική θεωρία της κατανάλωσης εμφανίζεται και το συμμετρικό του παραπάνω προβλήματος που αφορά την ελαχιστοποίηση της δαπάνης για επιδιωκόμενη χρησιμότητα. Λύνοντας αυτό το πρόβλημα βρίσκουμε τις βέλτιστες ποσότητες κατανάλωσης ως συναρτήσεις των μοναδιαίων τιμών και της επιδιωκόμενης χρησιμότητας:

$$\min\{C = vX + wY \,||\, U(X, Y) \ge u\} \Rightarrow \begin{cases} x = X(v, w, u) \\ y = Y(v, w, u) \end{cases}$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις ζήτησης αγαθών εξαρτώνται από την επιδιωκόμενη χρησιμότητα u και καλούνται *αντισταθμισμένες συναρτήσεις ζήτησης κατά Hicks* (compensated demand).

Παράδειγμα. Θεωρούμε τα δύο συμμετρικά προβλήματα βελτιστοποίησης στην κατανάλωση με λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας τύπου C-D:

$$U = \ln X^{\alpha} Y^{\beta} = \alpha \ln X + \beta \ln Y$$

1. $\max\{U = \alpha \ln X + \beta \ln Y \,||\, C = vX + wY \le c\}$

Σε προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε τις κανονικές συναρτήσεις ζήτησης κατά Marshall:

$$x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\frac{c}{v}, \; y = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\frac{c}{w}$$

2. $\min\{C = vX + wY \,||\, U = \alpha \ln X + \beta \ln Y \ge u\}$

Βρίσκουμε τις αντισταθμισμένες συναρτήσεις ζήτησης κατά Hicks:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{v}{w} = \dfrac{U_X}{U_Y} \\ U = u \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{v}{w} = \dfrac{\alpha Y}{\beta X} \\ X^{\alpha} Y^{\beta} = e^{u} \end{array}\right\} \Rightarrow x = e^{\frac{u}{\alpha+\beta}} \left(\frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}, \; y = e^{\frac{u}{\alpha+\beta}} \left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

□

13. Αντιστάθμιση. Υπενθυμίζουμε ότι όσον αφορά την εξάρτηση των κανονικών συναρτήσεων ζήτησης από τις παραμέτρους των μοναδιαίων τιμών των αγαθών και του διαθέσιμου εισοδήματος, η μονοτονία δεν είναι καθορισμένη. Όσον αφορά τις αντισταθμισμένες συναρτήσεις ζήτησης, διαπιστώνουμε καταρχήν ότι ως προς την χρησιμότητα η μονοτονία επίσης δεν είναι καθορισμένη, και έχουμε την ίδια διάκριση μεταξύ αγαθών κανονικών και κατώτερων. Αλλά όσον αφορά την εξάρτηση από τις τιμές, διαπιστώνουμε ότι:

Ως προς τις τιμές των αγαθών, οι αντισταθμισμένες συναρτήσεις ζήτησης είναι ομογενείς, δηλαδή εξαρτώνται μόνο από τον λόγο τους. Επίσης, η ζήτηση για το κάθε αγαθό είναι φθίνουσα συνάρτηση της τιμής του και αύξουσα συνάρτηση της τιμής του άλλου αγαθού.

Απόδειξη. Για εσωτερικές λύσεις η ομογένεια είναι άμεση συνέπεια των εξισώσεων Lagrange όπου οι τιμές εμφανίζονται μόνο ως προς το λόγο τους. Γενικότερα, παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές με τον ίδιο συντελεστή t τότε οι αντίστοιχες δαπάνες:

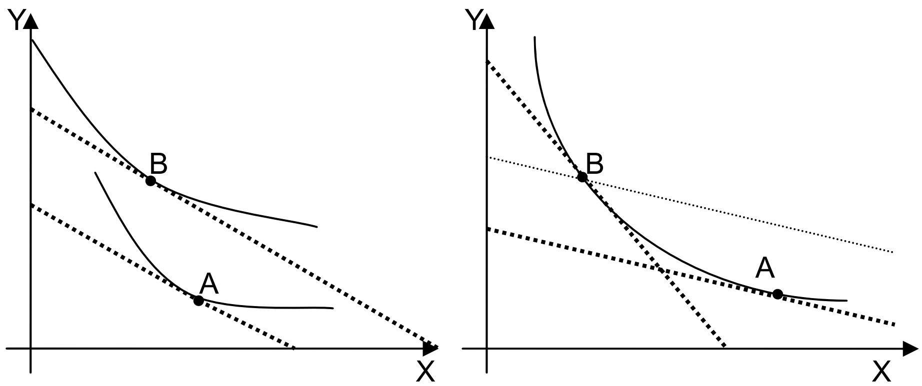
$$vX + wY \quad \& \quad (tv)X + (tw)Y = t(vX + wY)$$

θα έχουν μέγιστο στο ίδιο σημείο διότι η μία συνάρτηση κόστους είναι αύξων μετασχηματισμός της άλλης. Όσον αφορά την μονοτονία παρατηρούμε καταρχήν ότι η ζήτηση, την οποία για ευκολία υποθέτουμε εσωτερική (δηλαδή μη μηδενική), θα ικανοποιεί την συνθήκη περιορισμένης στασιμότητας:

$$\frac{U_x}{U_y} = \frac{v}{w}, \text{ με } U = u : \text{σταθερό}$$

Καθώς το v αυξάνει, το δεξιό επομένως και το αριστερό μέρος της πρώτης εξίσωσης θα πρέπει να αυξάνουν. Παρατηρούμε τώρα ότι το αριστερό μέρος είναι η απόλυτη τιμή του ρυθμού υποκατάστασης της συνάρτησης χρησιμότητας για την οποία υποθέτουμε ότι είναι οιονεί κοίλη και επομένως ότι έχει φθίνοντα ρυθμό υποκατάστασης. Συμπεραίνουμε ότι όταν το αριστερό μέρος αυξάνει θα πρέπει η συμμετοχή του x να ελαττώνεται και του y να αυξάνει που είναι και το ζητούμενο, όπως φαίνεται και στο δεύτερο γράφημα του παρακάτω σχήματος.

□



ελαχιστοποίηση δαπάνης: $\min\{C = vX + wY \,\|\, U(X,Y) \geq u\}$

Στο πρώτο γράφημα του παραπάνω σχήματος δείχνουμε ότι για μεγαλύτερη χρησιμότητα η αντισταθμισμένη ζήτηση του Y αυξάνει αλλά του X ελαττώνεται , καθώς πάμε από το A στο B. Έτσι το X είναι κατώτερο και το Y συνηθισμένο. Στο δεύτερο γράφημα δείχνουμε ότι όταν αυξάνει η τιμή v του πρώτου αγαθού η αντισταθμισμένη ζήτηση ελαττώνεται για το ίδιο και αυξάνει για το άλλο καθώς πηγαίνουμε από το A στο B. Παρατηρούμε επίσης ότι τώρα η δαπάνη είναι μεγαλύτερη. Δηλαδή:

Όταν η τιμή ενός αγαθού αυξάνει τότε προκειμένου να μείνουμε στο ίδιο επίπεδο χρησιμότητας θα πρέπει να αντισταθμίζεται το εισόδημα.

Εξ' ου και η ονομασία των αντισταθμισμένων συναρτήσεων ζήτησης.

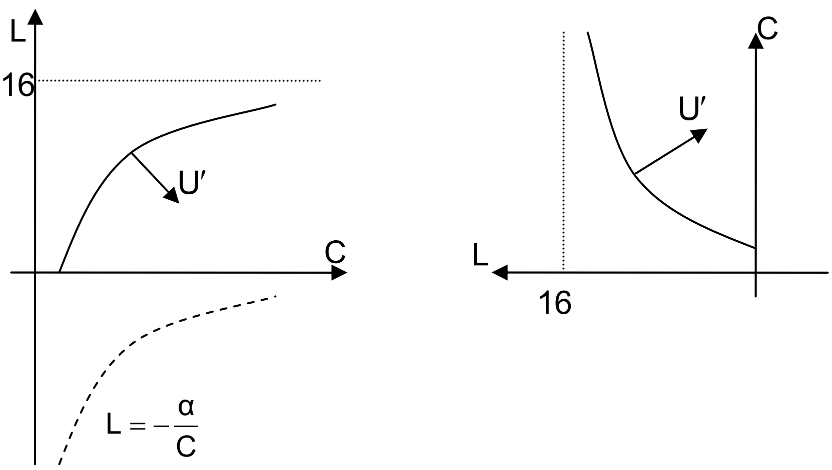
14. Λογαριθμική χρησιμότητα τύπου Stone-Geary. Σε πολλές περιπτώσεις η κατανάλωση ενός αγαθού μπορεί να προκαλεί βλάβη αντί για όφελος. Συχνά αυτό συμβαίνει σε μεγάλες ποσότητες κατανάλωσης οπότε λέμε ότι έχουμε φαινόμενα *κορεσμού* (saturation), αλλά μπορεί να εμφανιστεί και σε άλλες περιπτώσεις με κατάλληλη διεύρυνση της έννοιας του «αγαθού» ώστε να καλύπτει και το «μη αγαθό».

Παράδειγμα. Ένας εργαζόμενος εργάζεται L ώρες ημερησίως, και δαπανάει σε κατανάλωση ποσό C ημερησίως, με συνάρτηση χρησιμότητας:

$$U = \ln C(16-L) = \ln C + \ln(16-L) \text{ με } 0 \le L \le 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_C = 1/C > 0 \\ U_L = -1/(16-L) < 0 \end{cases}$$

Καλείται *λογαριθμική χρησιμότητα τύπου Stone-Geary*, και έχει τις εξής ιδιότητες μονοτονίας και κυρτότητας, όπως φαίνεται και στο πρώτο γράφημα παρακάτω:



Stone-Geary χρησιμότητα

1. Είναι $C-$αύξουσα, αλλά $L-$φθίνουσα. Οι καμπύλες αδιαφορίας έχουν τη μορφή:

$$C(16-L) = \alpha \Rightarrow L = 16 - \frac{\alpha}{C}, \ \alpha > 0$$

$$0 \le C, \ 0 \le L \le 16$$

Είναι αρνητικές υπερβολές μετατοπισμένες προς τα πάνω κατά 16. Έχουν θετική κλίση. Η αύξηση της εργασίας αντισταθμίζεται με αύξηση της κατανάλωσης.

2. Είναι οιονεί κοίλη με τις πάνω σταθμικές κυρτές, οπότε ενδιάμεσοι συνδυασμοί κατανάλωσης-εργασίας είναι προτιμότεροι από ακραίους όπου η εργασία και η κατανάλωση είναι αμφότερα πολύ μικρά ή πολύ μεγάλα.

3. Καθώς η εργασία αυξάνει πλησιάζοντας το πάνω όριο $L \to 16$, όλο και περισσότερη κατανάλωση απαιτείται για να αντισταθμίσει επιπλέον εργασία. Δηλαδή έχει αύξοντα ρυθμό αντιστάθμισης της εργασίας με κατανάλωση.

Παρατήρηση. Συχνά η συνάρτηση χρησιμότητας Stone-Geary παρουσιάζεται με περιστροφή του συστήματος κατά 90° προς τα αριστερά, όπως φαίνεται στο δεύτερο γράφημα. Ο οριζόντιος $L-$άξονας δείχνει τώρα προς τα πίσω υποδηλώνοντας τον χαρακτηρισμό της εργασίας ως μη αγαθού.

□

Παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι ο εργαζόμενος του προηγούμενου παραδείγματος αμείβεται με ωρομίσθιο w ενώ έχει και ένα πρόσθετο ημερήσιο εισόδημα e από άλλες πηγές. Θα λύσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης της χρησιμότητας όπου η κατανάλωση περιορίζεται από τον παρακάτω εισοδηματικό περιορισμό:

$$C \le wL + e \Rightarrow C - wL \le e$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ανισότητα με ισότητα διότι η χρησιμότητα είναι αύξουσα ως προς την κατανάλωση και επομένως θα εξαντλήσει τον περιορισμό. Ο εισοδηματικός περιορισμός έχει θετική κλίση και όπως φαίνεται στο πρώτο γράφημα παρακάτω, η χρησιμότητά θα μεγιστοποιείται σε εσωτερικό σημείο ή σε συνοριακό με $L = 0$. Μπορούμε να βρούμε τη λύση χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Lagrange, ή και απευθείας με αντικατάσταση από τον ισοτικό περιορισμό:

$$C = wL + e$$

Η χρησιμότητα εκφράζεται ως συνάρτηση του L:

$$U(L) = \ln C + \ln T = \ln(wL + e) + \ln(16 - L) \quad \text{με} \quad 0 \le L \le 16$$

Είναι κοίλη και το μέγιστο βρίσκεται στο στάσιμο:

$$U'(L) = \frac{w}{wL + e} - \frac{1}{16 - L} = 0 \Rightarrow w(16 - L) - (wL + e) = 0 \Rightarrow L = 8 - \frac{e}{2w}$$

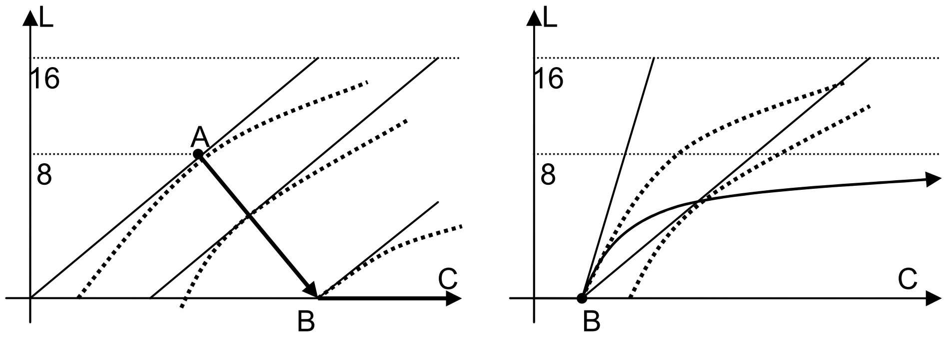
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $L \ge 0: 16w - e \ge 0 \Rightarrow e \le 16w$. Η ποσότητα εργασίας είναι θετική και επομένως αποδεκτή ως λύση.
2. $L \le 0: 16w - e \le 0 \Rightarrow e \ge 16w$. Η παραπάνω ποσότητα εργασίας είναι αρνητική, οπότε η λύση θα είναι η μηδενική.

Συμπεραίνουμε ότι θα προσφέρει εργασία μόνο στην περίπτωση 1 που η αμοιβή είναι υψηλή σε σχέση με το εισόδημα. Σαυτή την περίπτωση η εργασία και η κατανάλωση θα είναι:

$$C = \frac{e}{2} + 8w,\ L = 8 - \frac{e}{2w} \quad \text{εφόσον} \quad w \ge \frac{e}{16}$$

Στα γραφήματα παρακάτω δείχνουμε με μαύρη γραμμή την τροχιά ανάπτυξης, στο πρώτο γράφημα καθώς το εισόδημα αυξάνει, και στο δεύτερο καθώς το ωρομίσθιο αυξάνει.



αυξανόμενο εισόδημα e αυξανόμενη αμοιβή w

προσφορά εργασίας

Ειδικότερα:

1. Με σταθερό w όταν το e αυξάνει, η εισοδηματική ευθεία:

$$C - wL = e$$

μετακινείται παράλληλα προς τα δεξιά στην κατεύθυνση αύξησης της κατανάλωσης, όπως στο πρώτο γράφημα. Η λύση αρχίζει από το σημείο Α με μέγιστη εργασία $L = 8$ όταν $e = 0$, και καταλήγει στο σημείο Β με μηδενική εργασία όταν $e = 16w$. Στη συνέχεια συνεχίζει με μηδενική εργασία όσο το e αυξάνει.

2. Με σταθερό e όταν το w αυξάνει, η εισοδηματική ευθεία:

$$C - wL = e \Rightarrow L = \frac{C - e}{w}$$

περιστρέφεται προς τα δεξιά και γίνεται πιο οριζόντια όπως στο δεύτερο γράφημα. Η προσφορά εργασίας αρχίζει από το B όταν το ωρομίσθιο είναι $w = e/16$. Στη συνέχεια καθώς το ωρομίσθιο αυξάνει η προσφερόμενη εργασία επίσης αυξάνει αλλά με φθίνοντα ρυθμό όσο πλησιάζει το πάνω όριο των 8 ωρών.

□

15. Μη αγαθά. Στο πρόβλημα της βέλτιστης προσφοράς εργασίας που εξετάσαμε παραπάνω:

$$\max\{U = \ln C(16 - L) \,||\, E = C - wL = e,\ 0 \le C,\ 0 \le L \le 16\},$$

η εργασία L ήταν μη αγαθό. Η απόκτησή του αντιστοιχεί σε προσφορά εργασίας και η αύξησή του προϋποθέτει επιδότηση δηλαδή αρνητική τιμή $-w$. Αλλάζουμε τώρα την προοπτική χρησιμοποιώντας αντί του μη αγαθού της εργασίας το αγαθό του ελεύθερου χρόνου, δηλαδή της *σχόλης* (leisure):

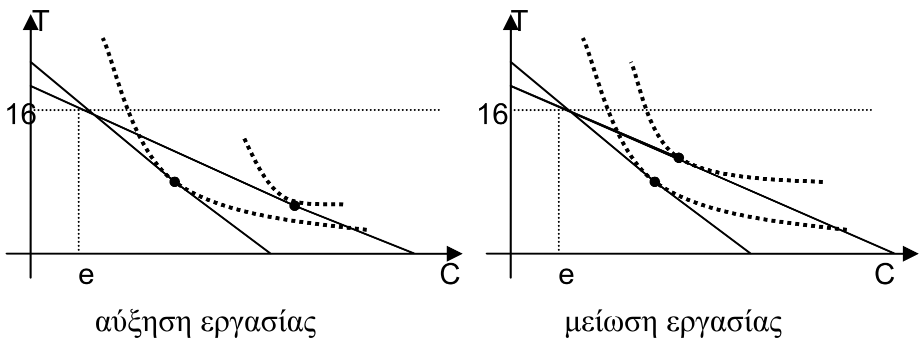
$$T = 16 - L$$

Γενικά, το αρνητικό ενός αγαθού είναι μη αγαθό και αντιστρόφως. Αντικαθιστώντας και στην χρησιμότητα και στο περιορισμό, η διατύπωση του προβλήματος στο επίπεδο $\{C, T\}$ θα έχει την μορφή:

$$\max_{C,Y}\{V = \ln CT \,||\, M = C + wT = e + w16,\ 0 \le C,\ 0 \le T \le 16\}$$

Τώρα η σχόλη T είναι αγαθό και η απόκτησή του γίνεται με κόστος w. Επίσης ο εισοδηματικός περιορισμός εκτός από το εισόδημα e έχει και ένα αρχικό απόθεμα σχόλης $T_0 = 16$ που αποτιμάται επίσης με αξία w. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα το πρόβλημα είναι τώρα σε κανονική μορφή και καθώς το w αυξάνει η εισοδηματική ευθεία περιστρέφεται γύρω από τον αρχικό πλούτο: $(C_0 = e, T_0 = 16)$ προς μικρότερη κλίση. Υποθέτοντας ότι η σχόλη συμπεριφέρεται ως κανονικό και συνηθισμένο αγαθό, αύξηση του ωρομίσθιου w έχει δύο αντικρουόμενες συνέπειες.

1. Αντιστοιχεί σε αύξηση της τιμής του ελεύθερου χρόνου και επομένως μείωση της ζήτησής του ως κανονικού αγαθού, δηλαδή μεγαλύτερη προσφορά εργασίας.
2. Ταυτόχρονα προκαλεί αύξηση του εισοδήματος $16w$ στο δεξιό μέρος που οδηγεί σε αύξηση της ζήτησής του ως συνηθισμένου αγαθού, δηλαδή λιγότερη προσφορά εργασίας.



αύξηση της αμοιβής

Για την συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας υπερισχύει η πρώτη επίδραση και έχουμε αύξηση της εργασίας με το ωρομίσθιο, όπως στο πρώτο γράφημα. Στο δεύτερο γράφημα δείχνουμε πως με διαφορετική συνάρτηση χρησιμότητας αύξηση του ωρομισθίου μπορεί να προκαλέσει αύξηση της σχόλης δηλαδή μείωση της προσφοράς εργασίας.